# Kalkulus 2, 2023/24 II. félév, vizsgatematika

**1. Egyenlőtlenségek és improprius integrál.**
Hölder-egyenlőtlenség. Minkowski-egyenlőtlenség. Improprius-integrál. Integrálkritérium sorokra. Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben és tulajdonságaik. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja, belseje és tulajdonságaik. Sűrű halmaz.

**2. Sorozatok az $\mathbb{K}^n$ térben.**
Határérték egyértelműsége. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Halmaz zártságának jellemzése sorozattal. Sorozatok összegének és számszorosának a határértéke. Cauchy-sorozat. Cauchy-sorozat tulajdonságai. Teljes halmaz. A $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ tér teljessége.

**3. Kompakt halmazok.**
Kompakt halmaz és alaptulajdonságai. Cantor-féle közösrész-tétel. Kompakt halmaz topologikus jellemzése a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Kompakt halmaz sorozatokkal való jellemzése a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben (Bolzano–Weierstrass-tétel). Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai. Kompakt halmazon értelmezett folytonos injekció inverze folytonos.

**4. Függvények.** Függvény határértéke. Határérték műveleti tulajdonságai. Átviteli elv határértékre. Függvény folytonossága. Folytonosság műveleti tulajdonságai. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Egyenletesen folytonos függvények. Heine-tétel.

**5. Normák ekvivalenciája, sorok és lineáris leképezések.** Ekvivalens normák. Normák ekvivalenciájának következményei. Sorok. Sorok műveleti tulajdonságai. Abszolút konvergens sorok. Lineáris leképezések folytonossága. Riesz-féle reprezentációs tétel véges dimenzióban. Operátornorma. Norma szubmultiplikativitása. Carl Neumann-féle sor. Invertálható elemek halmazának nyíltsága. Invertálás folytonossága.

**6. Multilineáris leképezések, Banach-féle fixpont tétel és konvex halmazok szétválasztása.**
Multilineáris leképezés normája. Pozitív (negatív), pozitív (negatív) definit és indefinit multilineáris leképezés. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel. Diszjunkt konvex zárt és kompakt halmaz szétválasztása.

**7. Függvénysorozat és függvénysor.**
Függvénysorozat pontonkénti határfüggvénye, pontonkénti, egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Függvénysor pontonkénti összegfüggvénye, pontonkénti, egyenletes, lokálisan egyenletes és abszolút konvergenciája. Folytonos függvények egyenletes konvergenciája. Weierstrass-tétel (függvénysorok egyenletes konvergenciájáról). Adott $M \subseteq \mathbb{K}^n$ esetén a $(C^b(M, \mathbb{K}^m), \|\cdot\|_{\sup})$ függvénytér. A $C^b(M, \mathbb{K}^m)$ térbeli konvergencia és az egyenletes konvergencia kapcsolata.

**8. Függvénysor(ozat) integrálása/deriválása, Abel-tétel és Bernstein-polinomok.**
Függvénysor és függévnysorozat tagonkénti deriválhatósága és integrálhatósága. Hatványsor és tulajdonságai. Cauchy–Hadamard-tétel. Abel-tétel. Bernstein-polinomokkal való approximáció.

**9. Differenciálszámítás alapfogalmai.**
Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontbeli differenciálhatósága, differenciálhatósága és deriváltja. Függvény deriváltjának az egyértelműsége. Vektorértékű függvény differenciálhatóságának visszavezetése skalárértékű függvény differenciálhatóságára. Függvények összegének, szorzatának és kompozíciójának deriváltja. Függvény pontbeli iránymenti deriváltja.

**10. Folytonos differenciálhatóság.**
Függvény parciális deriváltja. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény Jacobi-mátrixa és Jacobi-determinánsa. Függvény gradiense, divergenciája, rotációja. Nabla-szimbólum és Laplace-operátor. Kapcsolat a folytonos differenciálhatóság és a folytonos parciális deriváltak létezése között.

**11. Inverz- és implicitfüggvény tétel, valamint többszörös differenciálhatóság.**
Inverzfüggvény tétel. Az implicitfüggvény tétel. Függvény $n$-szeres differenciálhatósága, folytonos differenciálhatósága és végtelenszer való differenciálhatósága.

**12. Szélsőérték.**
Schwarz-tétel. Taylor-sorfejtés. Taylor-formula. Infinitezimális Taylor-formula. Függvény lokális maximuma, minimuma, szigorú lokális maximuma és minimuma. Függvény lokális szélsőértékének jellemzése a függvény deriváltjaival.

**13. Feltételes szélsőérték és konvexitás.**
Függvény lokális maximuma és minimuma adott feltétel mellett. feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Lagrange-multiplikátor. Konvex függvény. Kétszer differenciálható függvény konvexitásának jellemzése az első és a második deriválttal.

**14. Többváltozós függvények integrálása.** Térgörbe, térgörbe paraméterezése és ívhossza. Skalár- és vektorértékű függvény vonalmenti integrálja. Felület, felület paraméterezése, normálvektora és felszíne. Skalár- és vektorértékű függvény felületi integrálja. Tértartomány, tértartomány paraméterezése és térfogata. Skalárértékű függvény integrálja tértartományon.

**15. Integráltételek.** Skalár- és vektorpotenciálos vektormezők. Csillagszerű és egyszeresen összefüggő halmazok. Elégséges feltétel skalárpotenciál és vektorpotenciál létezéséhez. Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel.

**16. Fourier-sorfejtés.**
Trigonometrikus polinomok és alaptulajdonságaik. Weierstrass approximációs tétele. Függvény Fourier-együtthatói és Fourier-sora. Fourier-féle teljes ortogonális függvényrendszer. A $k$-szor folytonosan differenciálható függvény Fourier-együtthatóinak becslése. A kétszer folytonosan differenciálható periodikus függvények Fourier-sora.