

Számítási módszerek a fizikában 1, 5. hét

A tér affin altereinek felírása, egymástól vett távolságuk és a tér elemi lineáris transzformációinak a felírása

I. Affin alterek.

1. Írjuk fel a $A = (2, 3, 1)$ és a $B = (4, 5, -1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és irányvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.
3. Írjuk fel a $A = (2, 3, 4)$, $B = (4, 5, -1)$ és a $C = (3, 1, 3)$ pontokon átmenő sík egyenletét.
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és normálvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.

II. Határozzuk meg az alábbi távolságokat.

1. Mekkora a $(2, 1, 3)$ és a $(4, 6, -1)$ pont távolsága?
2. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és az $r(t) = (1, 12, 3) + t(2, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes távolsága?
3. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és a $2x - 4y + 2z = 1$ sík távolsága?
4. Mekkora az $\frac{x-1}{5} = 2-y = z-1$ és a $2-x = y-5 = z+1$ egyenesek távolsága?
5. Mekkora az $r(t) = (1, 1, 3) + t(0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $x - 2y + z = 1$ sík távolsága?
6. Mekkora a $2x - 4y + 2z = 1$ és az $x - 2y + z = 1$ síkok távolsága?

III. Elemi térgeometriai feladatok.

1. Mekkora az $A = (-1, 3, 2)$, a $B = (2, 3, 5)$ és a $C = (3, 5, -2)$ csúcsokkal rendelkező háromszög szögei, kerülete és területe?
2. Egy paralelepipedon egyik csúcsa $A = (2, 3, 1)$ és a vele szomszédos másik három csúcs $X = (3, 2, 4)$, $Y = (-1, 2, 3)$ és $Z = (2, 1, 4)$. Határozzuk meg a paralelepipedon hiányzó csúcsainak koordinátáit és a paralelepipedon térfogatát.

IV. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő, $v \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A $v = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő, $n \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az $n = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a (x, y) síkbeli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az $(1, 1, 0)$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
- 5* Határozzuk meg az $n \in \mathbb{R}^3$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

V. Tekintsünk egy egydimenziós harmonikus rezgőmozgást adott $D \in \mathbb{R}^+$ (direkciós állandó) és $m \in \mathbb{R}^+$ (tömeg) paraméterekkel. A koordinátarendszer kezdőpontja legyen a rugó nyugalmi hosszánál. Adott $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban a test helye legyen $x(t)$ sebessége pedig $v(t)$. Ezekből képezzük a $z(t) = (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ vektort. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ időpillanathoz létezik olyan $A(t)$ lineáris transzformáció, melyre $z(t) = A(t)z(0)$ teljesül.

VI*. Tekintsük az alábbi egydimenziós tökéletesen rugalmas ütközéssel kapcsolatos problémát. Egy $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű kiskocsi $v_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességgel közelít a merev fal felé. A kiskocsi és a fal között egy $m \in]0, M[$ tömegű test van, mely $u_0 \in]-v_0, \infty[$ sebességgel közelít a kiskocsi felé. A feladatban minden ütközést tekintsünk teljesen rugalmasnak. A kiskocsi és a test n -edik ütközése után a kiskocsi sebessége a fal felé legyen v_n , illetve a test sebessége a fal felé u_n .

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vezessük be a következő mennyiségeket: $\alpha_n = \sqrt{M}v_n$, $\beta_n = \sqrt{m}u_n$ és $w_n = (\alpha_n, \beta_n)$. Mutassuk meg, hogy az ütközés ekkor a $w_{n+1} = Bw_n$ alakba írható, ahol $B = \frac{1}{M+m} \begin{pmatrix} M-m & -2\sqrt{mM} \\ 2\sqrt{mM} & M-m \end{pmatrix}$.
2. Igazoljuk, hogy ha $\varphi = \arccos\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$, akkor $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.
3. Mutassuk meg, hogy az ütközések száma $N = \left\lfloor \frac{1}{\varphi} \left(\pi - \arctg(x) - \arctg\left(x \frac{u_0}{v_0}\right) \right) \right\rfloor + 1$, ahol $x = \sqrt{\frac{m}{M}}$, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az egészrész függvény.
4. Figyeljük meg, hogy az $u_0 = 0$ esetben az ütközések száma nem függ a kiskocsi v_0 sebességétől! Próbáljuk dimenzióanalízissel megmagyarázni ezt a jelenséget. Mélyebb ismeretekkel az is megmutatható, hogy az $u_0 = 0$ esetben az ütközések száma (kis x értékek esetén)

$$N = \left\lfloor \frac{\pi}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{45}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \right\rfloor.$$

Ha a fallal vett ütközések számoljuk, akkor kis x értékek esetén az összes ütközések száma

$$N^* \approx \frac{\pi}{x}.$$

Speciális x értékek mellett az összes ütközések száma numerikus számítások szerint az alábbi.

x	N^*
10^0	3
10^{-1}	31
10^{-2}	314
10^{-3}	3141
10^{-4}	31415
10^{-5}	314159