

Számítási módszerek a fizikában 1, 6. hét

Lineáris alterek, skaláris szorzás és Gram–Schmidt-ortogonalizáció

I. Lineáris alterek.

1. Az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvényterben alteret alkotnak-e a következő halmazok?

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\} \quad \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\} \quad \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \leq 0\}$$

2. A valós sorozatok $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ terében alteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

$$\begin{aligned} \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_1 = 2a_3 + 3a_5\} & \quad \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_2 = a_4 a_5\} \\ \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1\} & \quad \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a \text{ számtani sorozat}\} \end{aligned}$$

II. Lineáris függetlenség.

- Ha u és v lineárisan független vektorok, akkor milyen α és β paraméterek esetén lesznek az $\alpha u + \beta v$, $u + v$ vektorok lineárisan függetlenek?
- Igaz-e, hogy ha az $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ vektorok közül bármely 9 vektor lineárisan független, akkor mind a 10 is lineárisan független?
- Hány lineárisan független vektor van az alábbi vektorok között?

$$v_1 = (1, 1, 1, 1) \quad v_2 = (2, 2, 1, 4) \quad v_3 = (1, -1, 1, -1) \quad v_4 = (2, 1, 1, 3)$$

- Az $\{a + b \cos(x) + c \cos^2(x) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ térben bázist alkotnak-e az $1 + \cos(x)$, $\cos(x) + \cos^2(x)$ és $\cos(2x)$ vektorok?

III. Legyen $V = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$, azaz V a $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomok vektortere, továbbá legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ paraméter.

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezés skaláris szorzás.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (p, q) \mapsto \int_0^\alpha p(x)q(x) \, dx$$

2. Mekkora a $p(x) = x^2 + 1$ és a $q(x) = x^3$ polinomok által bezárt szög a V vektortérben?

IV. Skaláris szorzás a síkon.

1. Mutassuk meg, hogy a $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterekkel definiált

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - p x_1 y_2 - q x_2 y_1$$

leképezés pontosan akkor skaláris szorzás, ha $p = q \in]-1, 1[$ teljesül.

2. Legyen $p \in]-1, 1[$ paraméter és

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - p x_1 y_2 - p x_2 y_1.$$

Mely p értékek esetén lesz az $(1, 0)$ és az $(1, 1)$ vektorok által bezárt szög 30° , 45° és 60° ?

V. Adjuk meg az alábbi vektorok Gram–Schmidt ortogonalizáltját!

- A vektortér az $\mathbb{R}^3$ a megszokott skaláris szorzással, a kezdeti vektorok $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, -1)$ és $v_3 = (3, 2, 1)$.
- A vektortér a legfeljebb másodfokú polinomok tere, két vektor skaláris szorzata $\langle p, q \rangle = \int_0^1 (pq)$, a kezdeti vektorok $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ és $p_3(x) = x^2$.