

# FORMÁLIS ÉS SZEMLÉLETES VEKTORANALÍZIS

Serény György

1998

# Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	1
1.1 Vektoriális szorzat általánosítása	1
1.2 Görbék és felületek véges dimenziós lineáris normált tereken	3
1.3 Vonal-, felületi- és térfogati integrálok	8
2. Vektorfüggvények jellemzése integráljaikkal	16
2.1 Vektorfüggvények szemléltetése	16
2.2 Felületmenti integrál	17
2.3 Vonalmenti integrál	23
3. Síkvektoranalízis	30
3.1 Divergencia	30
3.1.1 A deriváltoperátor skalárinvariánsa	30
3.1.2 Divergencia és fluxus, divergencia és forrássűrűség	31
3.2 Rotáció	34
3.2.1 A deriváltoperátor vektorinvariánsa	34
3.2.2 Rotáció és cirkuláció, rotáció és örvénysűrűség	36
3.3 Vektorfüggvények jellemzőinek számítása	39
3.4 Két fundamentális fizikai alkalmazás	43
3.4.1 Ponttöltés elektromos tere	43
3.4.2. Végtelen vezető mágneses tere	46
3.5 Az integráltételek alkalmazásai	48
3.5.1. Egyéb integráltételek	48
3.5.2. Felület- és vonalmenti integrálok számítása	49
3.6 Potenciálmélet elemei	51
3.6.1 Egzisztencia és unicitás	51
3.6.2 Potenciálkeresés	58
3.6.3 A ponttöltés erőterének és duálisának potenciálja	60
3.6.4 Az egzakt differenciálegyenlet	65
3.7 Feladatok	68
4. Magasabb dimenziós általánosítások	70
4.1 Divergencia	70
4.2 Rotáció	71
4.3 Vektorfüggvények jellemzőinek számítása	75
4.4 Két fundamentális fizikai alkalmazás	75
4.4.1 n-dimenziós Coulomb törvény	75
4.4.2 Végtelen vezető mágneses tere	77
4.5 Az integráltételek további alkalmazásai	78
4.5.1 Egyéb integráltételek	78
4.5.2 Felület- és vonalmenti integrálok számítása	80
4.5.3 Egy geometriai alkalmazás: az n-dimenziós kúp térfogata	81
4.5.4 Egy fizikai alkalmazás: Archimedes törvénye	82
4.6 Potenciálmélet elemei	83
4.6.1 Egzisztencia és unicitás	83
4.6.2 Potenciálkeresés	84
4.6.3 A ponttöltés erőterének és duálisának potenciálja	85
4.7 Feladatok	86

# 1. Alapfogalmak

Ebben az előkészítő fejezetben a vektorfüggvények, (azaz  $\mathbf{R}^n$  valamely részhalmazából  $\mathbf{R}^m$ -be képező függvények) integráljának (pontosabban több különböző integráljának) fogalmát definiáljuk a többváltozós függvények integrálfogalmának általánosításával. Először azonban az általános definícióhoz szükséges alapfogalmakat vezetjük be. Az első paragrafusban az "irányított nagyság" fogalmát definiáljuk, míg a másodikban megadjuk azokat a speciális alakzatokat, melyeken integrálni fogunk.

## 1.1 Vektoriális szorzat általánosítása

A többváltozós függvények integrálfogalmát úgy szeretnénk általánosítani, hogy az integrál az integrálási tartomány térbeli elhelyezkedésére is érzékeny legyen. Ehhez a tartományt irányított elemekre kell felosztanunk, tehát szükségünk lesz egy "irányított nagyság (terület, térfogat stb.)" fogalomra, melyet a vektoriális szorzatból fogunk származtatni. Mivel egy olyan integrálfogalmat akarunk kapni, mely nem csak háromdimenziós térre alkalmazható (hanem – többek között – a síkra is), a vektoriális szorzat fogalmát *minden* egynél nagyobb véges dimenzióra általánosítjuk. Emlékeztetünk arra, hogy a háromdimenziós  $a$  és  $b$  vektorok vektoriális szorzata az  $c$  vektor, mely merőleges mind  $a$ -ra mind  $b$ -re, hossza az  $a$  és  $b$  által kifeszített paralelogramma területe és iránya olyan, hogy  $a, b$  és  $c$  jobbrandszert alkot. Az ebben a definícióban szereplő fogalmak kiterjesztése tetszőleges egynél nagyobb véges dimenzióra közvetlenül fogja szolgáltatóni a vektoriális szorzatnak megfelelő általános fogalmat. Ennek definíciója után kiszámításának módszerével foglalkozunk (külön kitérve a két- és háromdimenziós esetre) és megadjuk legfontosabb tulajdonságait.

A paralelogramma területének általánosítása  $n$ -dimenziós térben tetszőleges  $n$  darab vektor által kifeszített paralelotop térfogata, melyet a vektorok által meghatározott determináns abszolút értéke ad meg. Ennek a fogalomnak módosításával juthatunk az  $n$ -dimenziós térben valamely  $1 \leq k \leq n$  darab vektor által kifeszített paralelotop térfogatának fogalmához.

### 1.1 Definíció (Paralelepipedon térfogatának általánosítása)

Legyen  $n, k \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $a_i \in \mathbf{R}^n$  minden  $1 \leq i \leq k$ -re. Legyen  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$   $\mathbf{R}^n$  olyan orthonormált bázisa, melyre fennáll, hogy  $a$  elemei benne vannak az  $e' = (e_1, e_2, \dots, e_k)$  által kifeszített altérben. Az  $a$  által kifeszített paralelotop  **$k$ -dimenziós térfogatán**, melyet  $V(a)$ -val jelölünk, azon mátrix determinánsának abszolút értékét értjük, mely  $a$  elemeinek  $e'$ -beli oszlopvektoraiból áll.

### 1.2 Megjegyzések

- (1) A fenti definíció értelmes, mindig van a feltételeknek megfelelő  $e$  bázis.
- (2) A determináns tulajdonságaiból következően:
  - (a) a fent definiált  $k$ -dimenziós térfogat csak  $a$ -tól függ, a választott  $e$  bázistól nem.
  - (b) a paralelotop  $k$ -dimenziós térfogatának fogalma a szakasz hosszának, a paralelogramma területének és a paralelepipedon térfogatának általánosítása.

### 1.3 Példa

Legyen  $n = 3$ ,  $k = 2$ ,  $a = (a_1, a_2)$ , ahol  $a_1 = (2, 0, 0)$ ,  $a_2 = (1, 3, 0)$ . Ha  $e = (i, j, k)$   $\mathbf{R}^3$  szokásos bázisa, azaz  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  és  $k = (0, 0, 1)$ , akkor  $e' = (i, j)$ . Így

$$V(a) = \begin{vmatrix} a_1(1) & a_1(2) \\ a_2(1) & a_2(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

#### 1.4 Definíció (Jobbszavar szabály általánosítása)

Legyen  $e$   $\mathbf{R}^n$  szokásos bázisa és legyen  $f$  tetszőleges  $n$  elemű lineárisan független vektorrendszere  $\mathbf{R}^n$ -nek.  $f$  **jobbsodrású** vektorrendszer, ha  $\det \underline{\mathbf{T}}_{ef} > 0$ . ( $\underline{\mathbf{T}}_{ef}$  az  $e$ -ről az  $f$ -re való áttérés mátrixa.)

#### 1.5 Definíció (Vektoriális szorzat általánosítása)

Legyen  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n > 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ .

$\text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  az az egyértelműen meghatározott  $\mathbf{R}^n$ -beli vektor, mely

- (1) merőleges az  $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  altérre
- (2) hossza az  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  által kifeszített paralelepipedon  $n-1$  dimenziós térfogata
- (3) iránya olyan, hogy az  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  vektorrendszer jobbsodrású.

#### 1.6 Állítás (Vektoriális szorzat kiszámításának általánosítása)

Legyen  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n > 1$  és legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , tetszőleges  $\mathbf{R}^n$ -beli vektorok. Legyen  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$   $\mathbf{R}^n$  valamely jobbsodrású orthonormált bázisa. Ekkor

$$\text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot (e_1 A_1 + e_2 A_2 + \dots + e_n A_n)$$

ahol  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bármely olyan  $n \times n$ -es mátrix első sorának  $i$ -edik eleméhez tartozó előjeles aldeteminánsa, melynek  $j$ . sora ( $j = 2, \dots, n$ )  $a_{j-1}$   $e$ -beli sorvektora.

#### 1.7 Megjegyzés

Mivel a fenti állítás miatt  $\text{CROSS}$  kiszámítása analóg egy determinánsnak első sora szerinti kifejtésével, gyakran fogjuk használni az alábbi mnemotechnikailag hasznos jelölést :

$$\text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(n-1) & a_1(n) \\ a_2(1) & a_2(2) & \dots & a_2(n-1) & a_2(n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}(1) & a_{n-1}(2) & \dots & a_{n-1}(n-1) & a_{n-1}(n) \end{vmatrix},$$

ahol persze a  $i$ . sor ( $i = 2, \dots, n$ )  $a_{i-1}$   $e$ -beli sorvektora.

*Speciálisan*

(1) ha  $n = 2$ , akkor  $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ ,  $i = (1, 0)$ ,  $j = (0, 1)$  jelölésekkel :

$$\text{CROSS}(v) = - \begin{vmatrix} i & j \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = (-v_2 i + v_1 j) = (-v_2, v_1)$$

vagyis  $\text{CROSS}(v)$   $v$ -nek  $+\pi/2$ -el való elforgatottja. Ebből nyilván

$$\text{CROSS}(\text{CROSS}(v)) = -v$$

(2) ha  $n = 3$ , akkor a  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$ ,  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$ ,  $k = (0, 0, 1)$  jelöléseket használva :

$$\text{CROSS}(v, w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = v \times w$$

#### 1.8 Állítás ( $\text{CROSS}$ örökli a vektoriális szorzat tulajdonságait)

- (1)  $\text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_{n-1}) = -\text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_{n-1})$
- (2)  $\text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, b, \dots, b, \dots, a_{n-1}) = 0$

- (3)  $\text{CROSS}(a_1 + b, a_2, \dots, a_{n-1}) = \text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + \text{CROSS}(b, a_2, \dots, a_{n-1})$   
 (4)  $\text{CROSS}(\lambda \cdot a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \lambda \cdot \text{CROSS}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$

## 1.2 Görbék és felületek véges dimenziós lineáris normált tereken

Rátérünk  $\mathbf{R}^n$  azon részhalmazainak definiálására és legfontosabb jellemzőik megadására, melyek integrálási tartományként szerepelhetnek. A tárgyalás során néhány példával illusztráljuk az újonnan bevezetett fogalmakat.

Az alábbi definíció annak a szemléletes felületfogalomnak az egzakt megfelelője és általánosítása, mely szerint "a körlapból nyújtással, csavarással, összenyomással szakítás és belső pontban való ragasztás nélkül kapott alakzatok a felületek".

### 1.9 Definíció (Felületek)

Tegyük fel, hogy  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ .

(1) Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges halmaz. Bármely  $f$  függvény **szakaszonként folytonosan deriválható**  $H$ -n (jelben  $f \in \dot{C}_1(H)$ ), ha  $f$  folytonos  $H$ -n és  $H$  előáll véges sok olyan mérhető páronként közös belső pont nélküli részhalmazának uniójaként, melyek mindegyikének belsejében folytonosan deriválható és itt a deriváltja korlátos.

(2) Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges.  $H$  **lezártjának** nevezzük azt a  $\bar{H}$  halmazt, melynek elemei  $H$  elemei és  $H$  torlódási pontjai.  $H$  **összefüggő**, ha nincs  $A, B \subseteq H$ , hogy  $A \cup B = H$ ,  $\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \emptyset$ .

(3) Legyen  $m \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq n \leq m$  és legyen  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  zárt, korlátos, összefüggő, mérhető és nem üres belsejű halmaz. Legyen  $r = r(u)$   $A$ -n értelmezett,  $A$ -n szakaszonként folytonosan deriválható és  $A$  belsejében invertálható  $\mathbf{R}^m$ -be képező függvény, melynek parciális deriváltjai, az

$$r_u = (r_{u_1}, r_{u_2}, \dots, r_{u_n})$$

vektor komponensei (melyek maguk is  $\mathbf{R}^n$ -beli vektorok) – ahol léteznek – lineárisan függetlenek. A  $\text{Rg } r$  halmazt az  $r$  **által definiált (n dimenziós) (m dimenzióbeli) felületnek** és  $r$  - et a felület **(explicit) egyenletének** nevezzük.

(4) Ha a felület dimenziója azonos annak a térnek dimenziójával, melynek részhalmaza, azaz  $n = m$ , **térrésznek**, ha eggyel kisebb annál, azaz  $n = m - 1$ , akkor **valódi (hiper) felületnek** nevezzük. Ha egy valódi hiperfelület lineáris altér eltöltja, akkor **hipersíknak** nevezzük. Az egydimenziós felületeket **görbéknek** nevezzük.

(5)  $\mathbf{R}^n$  kölcsönösen egyértelmű inverzeivel együtt folytonos leképezéseit **homeomorfizmusoknak** nevezzük. Az  $n$ -dimenziós zárt gömbök homeomorf képeiként előálló felületeket **elemi héjaknak**, míg az egydimenziós elemi héjakat, azaz azokat a görbéket, melyek zárt intervallumok homeomorf képei **elemi íveknek** nevezzük. **Szakasznak** nevezzük az  $r(t) = r_0 + te$ ,  $t \in I$  alakú függvények által definiált görbéket, ha  $I \subseteq \mathbf{R}$  valamely intervallum és  $r_0, e \in \mathbf{R}^n$ ,  $e \neq 0$ . Egy  $n$ -dimenziós felület **belső pontjai** azok a pontok, melyek előállnak valamely  $n$ -dimenziós nyílt egységömb egy pontjának olyan homeomorfizmus szerinti képeként, melynél az egész egységömb képe a felületre esik. A felület belső pontjainak halmazát a felület **belsejének** nevezzük és  $\text{Int } F$  - el jelöljük, a többi pontokat a felület **határpontjainak** nevezzük, ezek a felület **határát** alkotják. Egy felületet **zártnak** nevezünk, ha minden pontja belső pont.

### 1.10 Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a fenti definícióban nem minden jelző nélkül csak felület, hanem *valamely  $r$  függvény által definiált* felület szerepel. Tehát felületen nem  $\mathbf{R}^n$  valamely részhalmazát önmagában, hanem ezt a részhalmazt mint egy (a fenti feltételeknek eleget tevő)  $r$  függvény értékészletét értjük, *magával az  $r$  függvényvel együtt*. Pontosabb volna tehát, ha azt mondanánk, hogy felületen egy olyan  $(F, r)$  párt

értük, melyre  $F = \text{Rg } r$ , ez azonban nincs összhangban köznapi felület képünkkel, továbbá a jelölést és a terminológiát is túlságosan elbonyolítaná. Másszóval, ahogy az alábbiakban látni fogjuk, különbséget teszünk két olyan felület között, melyeknek egyenletei  $\mathbf{R}^n$  ugyanazon részhalmazát határozzák meg. Azt is látni fogjuk, hogy, bár sokszor ennek a különbségtetésnek nincs jelentősége, vannak esetek, amikor lényeges elvi következményekkel jár. Mindenesetre fontos, hogy a továbbiakban:

*ha mást nem mondunk, akkor felületen mindig valamely  $r$  függvénnyel definiált felületet és egyenletén mindig ezt az  $r$  függvényt értjük.*

Az alábbi példákban és a továbbiakban is – ha mást nem mondunk – a felületek egyenleteiben szereplő konstansok, melyek a felületek méreteit rögzítik (sugár:  $R$ , magasság:  $h$ , stb.) mindig pozitívak.

### 1.11 Példák

(1)(a)  $a, b \in \mathbf{R}^n$ .  $a$  és  $b$ -t összekötő szakasz:  $r(t) = a + t(b - a)$ ,  $t \in [0, 1]$

(b)  $R$  sugarú origóközéppontú körvonal a síkban:  $r(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

(c)  $R$  sugarú  $z$  tengelyű origócsúcsú  $\pi/4$  félnyílásszögű kúppalástra írt egyenletes menetemelkedésű csavarvonal:

$$r(t) = (t \cos t, t \sin t, t), t \in [0, R]$$

(2)(a)  $R$  sugarú origóközéppontú gömbfelület:

$$r(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v), u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

(b)  $R$  sugarú  $z$  tengelyű  $h$  magas hengerpalást:

$$r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v), u \in [0, 2\pi], v \in [0, h]$$

(c)  $R$  sugarú  $z$  tengelyű origócsúcsú  $\pi/4$  félnyílásszögű kúppalást:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), u \in [0, R], v \in [0, 2\pi]$$

(3)(a) Alulról és felülről is lezárt  $R$  sugarú  $z$  tengelyű  $h$  magas hengerfelület:

$$r(u, v) = \begin{cases} ((v - h) \cos u, (v - h) \sin u, h) & \text{ha } h \leq v \leq R + h, 0 \leq u \leq 2\pi \\ (R \cos u, R \sin u, v) & \text{ha } 0 < v < h, 0 \leq u \leq 2\pi \\ ((v + R) \cos u, (v + R) \sin u, 0) & \text{ha } -R \leq v \leq 0, 0 \leq u \leq 2\pi \end{cases}$$

(b)  $R$  sugarú origóközéppontú körlap:

– mint kétdimenziós térrész:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v), u \in [0, R], v \in [0, 2\pi]$$

– mint kétdimenziós (háromdimenzióbeli) valódi felület:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0), u \in [0, R], v \in [0, 2\pi]$$

(c) Az  $y = x^2$  és az  $y = \sqrt{x}$  által határolt kétdimenziós térrész:

$$r(u, v) = (u, v), u \in [0, 1], v \in [u^2, \sqrt{u}]$$

(4)(a) Négydimenzióbeli  $R$  sugarú  $w$  tengelyű  $h$  magasságú háromdimenziós gömbhenger:

$$r(u, v, w) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v, w), u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi], w \in [0, h]$$

(b) Négydimenzióbeli  $R$  sugarú  $w$  tengelyű  $h$  magasságú négydimenziós gömbhenger(test):

$$r(s, u, v, w) = (s \cos u \sin v, s \sin u \sin v, \cos v, w), s \in [0, R], u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi], w \in [0, h]$$

### 1.12 Megjegyzések

(1) Az elnevezések egybeesése zavaró lehet, de a két fogalomcsoport, egy felület belső– ill. határpontja és zártsága egyfelől, a felületnek, mint *halmaznak* belső– ill. határpontja és zártsága másfelől, lényegesen eltér egymástól. Speciálisan azonban, nyilván, térrész határához tartozó pontjai ill. belső pontjai éppen a térrésznek, mint az  $\mathbf{R}^n$  normált tér egy részhalmazának belső– ill. határ pontjai.

(2) A síkban a valódi felületek a görbék.

(3) Definiálhatjuk a nulla dimenziós felületeket is, ezek persze az egyelemű ponthalmazok.

(4) Vegyük észre, hogy látszólagos bonyolultsága ellenére, a felület definíciója nagyon természetes feltételeket tartalmaz. Vegyük sorra ezeket. A definiáló függvény értelmezési tartománya zárt, korlátos, összefüggő, mérhető és nem üres belsejű. A zártság feltétele azt jelenti, hogy egy-egy felület "kontúrját", "szélét" is a felülethez tartozónak tekintjük, a korlátosság azt, hogy csak véges alakzatokat tekintünk felületnek, az összefüggőség pedig nyilván annak a természetes követelménynek formális megjelenése, hogy csak "egy darabból álló" alakzatokat tekintünk felületnek. A mérhetőségre azért van szükségünk, mert felületeken integrálni is akarunk. Végül az utolsó feltétel az alább tárgyalt másik, a függvényre vonatkozó kikötéssel együtt kizárja az elfajuló eseteket, biztosítja azt, hogy például egy görbe "valóban" görbe legyen, ne pedig egy pont, mint abban az esetben, ha megengednénk üres belsejű, azaz egy pontból álló intervallumokat is, mint görbéket definiáló függvények értelmezési tartományait. Magára a definiáló függvényre három megkötés vonatkozik : szakaszonkénti folytonos deriválhatóság, a határoktól eltekintve való invertálhatóság és végül a parciálisok lineáris függetlensége. Az első feltétel azt jelenti, hogy pl. egy kétdimenziós felületen csak görbe mentén lehetnek "törésvonalak" és csak "kevés csúcs lehet rajta", a nagyon "összetört" alakzatok nem felületek. Az invertálhatósági feltétel lényegében azt jelenti, hogy a felület belsejében nincsenek "elágazások", különböző részeit nem "ragasztjuk össze" "túl sokszor". Végül az utolsó feltétel a felület "jó" megadásának követelménye, biztosítja, hogy a felületek bizonyos alább definiálandó jellemzőit kiszámíthassuk az egyenletükből. Így például az  $r(t) = (t, t)$   $t \in [-1, 1]$  síkbeli  $45^\circ$ -os egyenes szakasz érintő irányvektora nyilván *mindenütt* az  $\dot{r}(t) = (1, 1)$ . Am, ha ugyanezt a szakaszt az  $s(t) = (t^3, t^3)$ ,  $t \in [-1, 1]$  egyenletével definiáljuk, akkor  $\dot{s}(0) = (0, 0)$  nem adja meg az origóban is létező érintőt.

(5) Könnyen megmutatható, hogy a valós egyenes összefüggő részhalmazai az intervallumok (lásd a 1.26 (2)(a) feladatot), tehát a görbék egyenletei mindig *intervallumokon* értelmezett függvények.

(6) Az a tény, hogy halmazok belsejét és felületek belsejét azonos szimbólummal (Int) jelöljük, nem okoz zavart, mert felületekre mindig *csak* az utóbbit alkalmazzuk.

### 1.13 Definíció (Felületek jellemzői)

(1) Legyen  $n \geq 1$  és  $F$  az  $r = r(u)$ ,  $u \in A \subseteq \mathbf{R}^n$  által definiált  $n$ -dimenziós valódi felület.

(a) Az  $F$  **felszíne** :

$$|F| = \int_A |\text{CROSS}(r_u)| du = \int_A |\text{CROSS}(r_{u_1}, r_{u_2}, \dots, r_{u_n})| du_1 du_2 \dots du_n$$

(b) A  $\text{CROSS}(r_u)$  vektorfüggvényt  $F$  **irányításának**,  $\text{CROSS}(r_u)$  ill.  $\text{CROSS}(r_u)/|\text{CROSS}(r_u)|$  egy adott pontbeli értékét  $F$  adott pontbeli **(felületi) normálisának** ill. **egységnormálisának** nevezzük.

(c) Legyen  $F$  az  $r = r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in A$  által definiált  $n$ -dimenziós valódi felület

$$A' = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n : (-u_1, u_2, \dots, u_n) \in A\} \text{ és}$$

$$s = s(u_1, u_2, \dots, u_n) = r(-u_1, u_2, \dots, u_n), (u_1, u_2, \dots, u_n) \in A'$$

$-F$ -el jelöljük és az  $F$ -el **ellentétes irányítású** felületnek nevezzük az  $s$  által definiált valódi felületet.

Ha az  $F$  felület egy  $V$  térrész határának részhalmaza, akkor  $F$  irányítását ( $V$ -ből nézve) **kifelé irányításnak** és  $F$ -et ( $V$ -ből nézve) **kifelé irányított**nak nevezzük, ha minden  $u \in \text{Do } r_u$  esetén van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$r(u) + \delta \cdot \text{CROSS}(r_u(u)) \notin V \text{ minden } 0 < \delta < \varepsilon \text{ esetén.}$$

(d) Legyen  $r_0 = r(u_0) \in F$ . A  $\text{CROSS}(r_u(u_0))$  normálvektorú  $r_0$ -on átfektetett hipersíkot  $F$   $r_0$ -beli **érintő (hiper)síkjának** nevezzük.

(2) Legyen  $L$  az  $r = r(u)$ ,  $u \in A \subseteq \mathbf{R}$  által definiált görbe.

(a)  $L$  ívhossza:

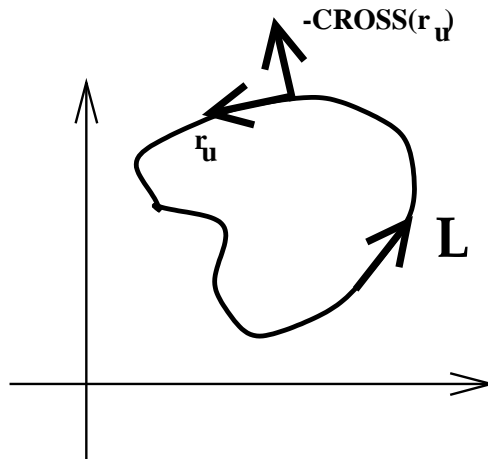
$$|L| = \int_A |r_u| du$$

(b) Az  $r_u$  vektorfüggvényt  $L$  **irányításának**,  $r_u$  ill.  $r_u/|r_u|$  egy adott pontbeli értékét  $L$  adott pontbeli **érintővektorának** ill. **érintőegységvektorának** nevezzük.

(c) Legyen  $L$  az  $r = r(u)$ ,  $u \in A$  által definiált görbe.  $-L$ -el jelöljük és az  $L$ -el **ellentétes irányítású** görbének nevezzük az

$$s = s(u) = r(-u), u \in A' = \{u \in \mathbf{R} : -u \in A\} \text{ által definiált görbét.}$$

Ha az  $L$  görbe a kétdimenziós térben valamely  $V$  térrész határának részhalmaza, akkor  $L$  irányítását ( $V$ -ből nézve) **pozitív irányításnak** és  $L$ -et ( $V$ -ből nézve) **pozitívan irányított**nak nevezünk, ha az  $F = -L$  (valódi) felület kifelé irányított:



(d) Legyen  $r_0 = r(u_0) \in L$ . Az  $r_u(u_0)$  irányvektorú  $r_0$ -on átmenő egyenest  $L$   $r_0$ -beli **érintőjének** (**érintő egyenesének**) nevezzük.

(3) Legyen  $n \geq 1$  és  $V$  az  $r = r(u)$ ,  $u \in A \subseteq \mathbf{R}^n$  által definiált  $n$ -dimenziós térrész.  $V$  térfogata:

$$|V| = \int_A |\det r_u| du$$

ahol  $\det r_u$   $r = r(u)$  Jacobi determinánsa.

### 1.14 Megjegyzések

(1) A fenti definícióban szereplő integrálok nyilván léteznek, hiszen az adott feltételek esetén az integrandus folytonos függvénye változóinak. Belátható továbbá, hogy ha  $F$  és  $F'$  az  $r$ -el ill.  $r'$ -vel definiált felületek és  $\text{Rg } r = \text{Rg } r'$  akkor  $F$  és  $F'$  ívhossza, felszíne ill. térfogata megegyezik (vö az 1.20 (1) megjegyzéssel). Másrészt háromdimenziós esetben bizonyos természetes megkötéseknek eleget tevő egyenesszakaszokból (síklapokból) álló (ill. síklapokkal határolt) alakzatokkal való közelítés esetén a közelítő alakzatok ívhosszának (felszínének ill. térfogatának) sorozata a fent definiált ívhosszhoz (felszínhez ill. térfogathoz) konvergál. Ez azért van így, mert például az ívhossz esetén – *nagyon* leegyszerűsítve – az adott görbe egy felosztásakor az  $i$ . felosztáselem hossza megközelítően a két végpontját összekötő húr

$|\Delta r_i| \approx |\dot{r}(t_i)| \cdot \Delta t_i$  hossza, tehát a  $\sum |\dot{r}(t_i)| \cdot \Delta t_i$  összeg az ívhossz egy közelítése, ez pedig az  $\int_A |r_u| du$  egy integrálközelítő összege. (A felszínre és térfogatra vonatkozóan analóg gondolatmenetek érvényesek.) Mivel továbbá mindhárom mennyiség nemnegatív additív halmazfüggvény és a háromdimenziós térben egyenesszakaszokból (síklapokból) álló (ill. síklapokkal határolt) alakzatok esetén az eredeti ívhosszt (felszín ill. térfogatot) adja meg, jogosan tekinthetők az ívhossz (felszín ill. térfogat) klasszikus fogalma általánosításainak.

(2) Ami az irányítással kapcsolatos mennyiségek geometriai jelentését illeti, a görbe adott pontbeli érintője a ponton átmenő szelők határhelyzete, míg az érintősík a ponton átmenő és a felület által tartalmazott görbék érintőjének síkja (vö. (26) (6)), a felületi normális ennek a síknak a normálisa.

(3) A továbbiakban a görbék egyenletében a változót általában  $u$  helyett  $t$ -vel jelöljük, hangsúlyozandó, hogy egydimenziós változóról van szó. Továbbá történelmi okokból a  $t$  szerinti deriváltat általában  $\cdot$ -al jelöljük.

(4) Nulla dimenziós felületek esetén:

a) felszínükön elemszámukat értjük, azaz felszínüket 1-nek tekintjük

b) irányításukon olyan  $e$  függvényeket értünk, melyek elemeikhez egydimenziós egységvektorokat, azaz a  $+1, -1$  számok valamelyikét rendelik, ellentétes irányítású alakzatnak nevezzük azt az alakzatot, melynek irányítása az eredeti  $(-1)$ -szerese és az egydimenziós térrész határáként adódó nulla dimenziós felület kifelé irányításának definícióját az általános definícióból úgy kapjuk, hogy abban a CROSS helyett az  $e$ -t szerepeltetjük.

(4) A kétdimenziós térben valamely  $V$  térrész határának részeként adódó  $L$  görbe  $r_u$  irányítása ( $V$ -ből nézve) pontosan akkor pozitív ha  $L$  bármely  $r$  pontjára, melyben létezik az  $r_u$  érintővektor és  $V$  egy tetszőleges  $s$  belső pontjára igaz, hogy az  $r - s$  és az  $r_u$  vektor jobbsodrású vektorrendszert alkot. (Ez azt jelenti, hogy a görbét az óramutató járásával ellenkező irányban járjuk be.)

**1.15 Példa** Az  $R$  sugarú  $z$  tengelyű origócsúcsú  $\pi/4$  félnyílásszögű  $R$  magasságú  $F$  kúppalást felszínének kiszámítása.

$F$  egyenlete :  $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), 0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi$ . Ezzel  $r_u = (\cos v, \sin v, 1)$  és  $r_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$ , így  $r_u \times r_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ ,  $|r_u \times r_v| = \sqrt{2}u$ , tehát

$$|F| = \int_A |r_u \times r_v| dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{2}u dudv = \sqrt{2}R^2\pi.$$

### 1.16 Definíció

Legyen  $F$  valódi felület. Ha  $f = f(r)$  olyan többváltozós függvény melyre igaz, hogy

$$r \in F \quad \text{iff} \quad r \in \text{Do } f \text{ és } f(r) = 0,$$

akkor az  $f(r) = 0$  egyenletet  $F$  egy **implicit egyenlet**ének nevezzük.

**1.17 Példák** Különböző felületek explicit egyenletei.

(1) Síkban

(a)  $R$  sugarú origóközéppontú gömbfelület :  $x^2 + y^2 = R^2$

(b)  $R$  sugarú  $y$  tengelyű  $h$  magasságú félhengerpalást :  $x^2 = R^2, 0 \leq y \leq h, x > 0$

(c)  $R$  sugarú  $y$  tengelyű  $h$  magasságú origócsúcsú  $\pi/4$  félnyílásszögű kúppalást :

$$x^2 = y^2, 0 \leq z \leq h$$

(2) Háromdimenziós térben

(a)  $R$  sugarú origóközéppontú gömbfelület :  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(b)  $R$  sugarú  $z$  tengelyű  $h$  magasságú hengerpalást :  $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h$

(c)  $R$  sugarú  $z$  tengelyű  $h$  magasságú origócsúcsú  $\pi/4$  félnyílásszögű kúppalást:

$$x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h$$

(3) Négydimenziós térben

(a)  $R$  sugarú origóközéppontú gömbfelület :  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$

- (b)  $R$  sugarú  $w$  tengelyű  $h$  magasságú hengerpalást:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $0 \leq w \leq h$   
(c)  $R$  sugarú  $w$  tengelyű  $h$  magasságú origócsúcsú  $\pi/4$  félnyílásszögű kúppalást:

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2, 0 \leq w \leq h$$

**1.18 Példa** A  $w = xyz$  felület  $P = (1, 2, 3, 6)$  pontbeli érintő hipersíkja egyenletének kiszámítása.

A felület (egy véges részének) explicit egyenlete (alkalmas  $A \subseteq \mathbf{R}^3$ -al)  $r(x, y, z) = (x, y, z, xyz)$ ,  $(x, y, z) \in A$  és  $r_x = (1, 0, 0, yz)$ ,  $r_y = (0, 1, 0, xz)$ ,  $r_z = (0, 0, 1, xy)$ . Ha  $\mathbf{R}^4$  szokásos bázisa  $(i, j, k, l)$ , akkor ezekkel

$$-\text{CROSS}(r_x, r_y, r_z) = \begin{vmatrix} i & j & k & l \\ 1 & 0 & 0 & yz \\ 0 & 1 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 1 & xy \end{vmatrix} = yz \cdot i - (-xz) \cdot j + xy \cdot k - 1 \cdot l = (yz, xz, xy, -1).$$

Így  $-\text{CROSS}(r_x, r_y, r_z)|_P = (6, 3, 2, -1)$ . Az érintősík implicit egyenlete tehát:  $6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) - (w-6) = 0$ , vagyis  $6x + 3y + 2z - w = 12$ .

Nos, a görbék és valódi felületek lesznek  $\mathbf{R}^n$  azon részhalmazai, melyek majd vizsgálatainkban integrálási tartományként szerepelnek. Így most már minden rendelkezésre áll ahhoz, hogy megadjuk a többváltozós függvények integrálfogalmának lehetséges kiterjesztéseit.

## 1.3 Vonal-, felületi és térfogati integrálok

Az alábbiakban megadjuk a többváltozós függvények integrálfogalmának görbékre és valódi felületekre ill. vektorfüggvényekre vonatkozó általánosításait. Szabadon fogalmazva, a vonal(felületi) integrál olyan integrálközelítő összegek sorozatának határértéke, mely összegekben az egyes tagok a görbe(felület) egy adott felosztásának valamely elemébe eső valamely reprezentáns pontbeli függvényértéknek és egy, az ezen felosztáselem méretét jellemző mennyiségnek a szorzata, speciálisan vektorfüggvény *görbe(felület)menti* integrálja esetén a felosztáselem *irányított* ívhosszával(felszínével) való skaláris (más esetben vektoriális) szorzata, míg *ívhossz(felszín) szerinti* integrálja esetén a felosztáselem ívhosszával (felszínével), mint skalárral való szorzata.

Az alábbi definícióban felhasználjuk vektorérfüggvények többes integráljának fogalmát, melyet a komponenseik integráljai által alkotott vektorként értelmezünk. Nyilvánvaló azonban, hogy – bár (amint azt később megmutatjuk) vannak kivételek – az alább definiált fogalmak közül a legszemléletesebben azok az integrálok értelmezhetőek, melyek definíciójához erre nincs szükség, tehát azok az integrálok, melyek többváltozós függvények integráljaira vezetnek. Másszóval, az ívhossz ill. felszín szerinti integrálok többváltozós, azaz skalárfüggvényekre, a görbe- és felületmenti integrálok pedig vektorfüggvényekre alkalmazhatóak legtermészetesebben. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az alább definiált integráltípusok közül a legfontosabbak, melyeknek elvi jelentőségük van, a vektorfüggvények görbe- és felületmenti integráljai. Az ezek által definiált mennyiségeknek, melyek segítségével a vektorfüggvényeket nagyon természetesen és szemléletesen lehet jellemezni, fontos fizikai alkalmazásai vannak. A *térfogati* (a térrészekre vonatkozó) integrál definíciója persze nem más, mint a többváltozós függvények integráljára vonatkozó integráltranszformáció (hiszen a térrészek egyenletei nyilvánvalóan a tér paramétertranszformációi).

A definíciót követően az integrál legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk és illusztráljuk két rövid példán, majd külön tárgyaljuk a vonal- és felületi integrálok közötti összefüggést a kétdimenziós esetben, hiszen későbbi részletes tárgyalásunk színtere a sík lesz; végül pedig a normáltaromány fogalmának általánosításaként egy olyan speciális, de gyakorlatilag minden lényeges esetet magában foglaló térrész típust definiálunk, melynek határán könnyű integrálni.

### 1.19 Definíció (Integrálok)

Legyen  $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$  tetszőleges,  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^m$ , ahol  $m = 1$  vagy  $m = n$ . (Az alábbi definíciókban a  $\cdot$  jel nyilván értelemszerűen skalárral való szorzást ill. skaláris szorzást jelent attól függően, hogy  $m = 1$  ( $v$  skalárértékű) vagy  $m = n$  ( $v$  vektorértékű).) Legyen  $v \in C(H)$ .

(1) Legyen az  $L$  görbe egyenlete  $r = r(t) \in H \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $t \in I \subseteq \mathbf{R}$ .

$v$  **vonalmonti** (vagy **görbementi**) **integrálja**  $L$ -en:

$$\int_L v dr = \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

$v$  **ívhossz szerinti integrálja**  $L$ -en :

$$\int_L v |dr| = \int_I v(r(t)) |\dot{r}(t)| dt$$

(2) Legyen az  $F$  valódi felület egyenlete  $r = r(u) \in H \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $u \in A \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ .

$v$  **felületmenti integrálja**  $F$ -en :

$$\int_F v df = \int_A v(r(u)) \cdot \text{CROSS}(r_u(u)) du$$

$v$  **felszín szerinti integrálja**  $F$ -en :

$$\int_F v |df| = \int_A v(r(u)) |\text{CROSS}(r_u(u))| du$$

(3) Fenti jelölésekkel ha  $m = n = 3$ , akkor

$v$  **vektorértékű görbementi integrálja**  $L$ -en:

$$\int_L v \times dr = \int_I v(r(t)) \times \dot{r}(t) dt$$

$v$  **vektorértékű felületmenti integrálja**  $F$ -en:

$$\int_F v \times df = \int_A v(r(u)) \times \text{CROSS}(r_u(u)) du$$

(4) Legyen  $V$  térrész egyenlete  $r = r(u)$ ,  $u \in A$ .

$v$  **térfogati integrálja**  $V$ -n:

$$\int_V v dV = \int_A v(r(u)) |\det r_u(u)| du$$

ahol  $\det r_u(u)$  az  $r = r(u)$  Jacobi determinánsa.

A görbementi és ívhossz szerinti integrálokat közös néven **vonaltintegráloknak**, míg a felületmenti és felszín szerinti integrálokat **felületi integráloknak** nevezzük.

### 1.20 Megjegyzések

(1) A fenti definícióban szereplő integrálok nyilván léteznek, hiszen az adott feltételek esetén az integrandus nullmértékű halmaz kivételével folytonos függvénye változóinak. Továbbá, bizonyos feltételek mellett az integrálok függetlenek a felületeket definiáló egyenletektől, csak az általuk meghatározott halmaztól függenek. Pontosabban, ha  $F$  és  $F'$  az  $r$ -el ill.  $r'$ -vel definiált valódi felületek és  $\text{Rg } r = \text{Rg } r'$ , akkor tetszőleges  $\text{Rg } r$ -en folytonos függvény integráljai  $F$ -en és  $F'$ -n megegyeznek, amennyiben **felületmenti** integrál esetén még azt is feltesszük, hogy  $F$  és  $F'$  azonos irányításúak, azaz van olyan térrész, hogy mindketten kifele vannak irányítva, mint ezen térrész határának részhalmazai. Hasonló tartalmú állítást

lehet megfogalmazni vonalintegrálokra vonatkozóan is (vö. az 1.26 (13) feladattal).

(2) Nyilván nulla dimenziós felületek esetén is értelmezhetőek a felületi integrálok, ezeken a függvénynek az adott pontbeli (felület vagy vonalmenti integrálás esetén, melyek ilyenkor persze egybeesnek, ennek irányításával megszorozott) helyettesítési értékét értjük.

A vonal- és felületi integrálok egyik leglényegesebb tulajdonsága, hogy, mint az eddig megismert összes integráltípusok, additív intervallumfüggvények. Ahhoz, hogy ezt a tényt pontosan megfogalmazzhassuk, a felosztás fogalmát általánosítanunk kell felületekre.

### 1.21 Definíció (Felületek lefedése és felosztása)

(1) Ha véges sok, páronként közös belső pont nélküli halmaz (felület) uniója egy  $H$  halmaz ( $F$  felület), akkor ezt a véges sok halmazt (felületet) együttesen  $H$  ( $F$ ) egy **lefedésének** és az egyes halmazokat (felületeket) a lefedés **elemeinek** nevezzük.

(2) Legyen  $f$  tetszőleges függvény,  $H \subseteq \text{Dof}$ . A  $g$  függvény  $f$ -nek  $H$ -ra való **megszorítása**, ha  $\text{Dof} = H$  és minden  $x \in H$  esetén  $g(x) = f(x)$ .

(3) Legyen  $F$  az  $r$  függvény által definiált felület.  $\text{Dof}$  egy lefedése esetén  $r$ -nek a lefedés elemeire való megszorítása által definiált felületeket együttesen  $F$  egy **felosztásának** nevezzük. Azt, hogy  $F_1, F_2, \dots, F_k$   $F$  egy felosztása, így jelöljük:  $\sum_{i=1}^k F_i = F$ .

A most következő összes állítás közvetlen következménye a vonal- és felületmenti integrál definícióinak és a többes integrálok megfelelő tulajdonságainak (lásd az 1.26 (12)(a) feladatot).

### 1.22 Állítás (Integrálok tulajdonságai)

(1) *Vonal- és felületi integrál örökli az egyváltozós függvények integráljának tulajdonságait:*

(a) *Integrál lineáris homogén operáció*

(b) *Integrál additív halmazfüggvény, azaz*

$$\int_{\sum_{i=1}^n L_i} v \, dr = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} v \, dr \quad \text{és} \quad \int_{\sum_{i=1}^n F_i} v \, df = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} v \, df$$

(c)

$$\int_{-L} v \, dr = - \int_L v \, dr \quad \text{és} \quad \int_{-F} v \, df = - \int_F v \, df$$

(d) *ha  $m \leq v(r) \leq M$  minden  $r \in L$  ill.  $r \in F$  esetén, akkor*

$$m \cdot |L| \leq \int_L v \, dr \leq M \cdot |L| \quad \text{ill.} \quad m \cdot |F| \leq \int_F v \, df \leq M \cdot |F|$$

(2) *Ha  $v_e$   $v$ -nek  $L$  érintőegységvektorára,  $e$ -re eső vetülete, azaz  $e = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$ -el  $v_e = (v, e)$  és  $v_n$   $v$ -nek  $F$  egységnormálisára,  $n$ -re eső vetülete, azaz  $n = \frac{\text{CROSS}(r_u(u))}{|\text{CROSS}(r_u(u))|}$ -el  $v_n = (v, n)$ , akkor*

$$\int_L v \, dr = \int_L v_e |dr| \quad \text{ill.} \quad \int_F v \, df = \int_F v_n |df|$$

### 1.23 Példák

(1) Az

$$\int_L k \times r \, dr$$

integrál kiszámítása ha  $k = (0, 0, 1)$  és  $L$  az  $r = r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  egyenlettel definiált  $[xy]$ -síkbeli pozitív irányítású egységkör.

(a)  $k \times r(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ,  $\dot{r}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ,  $(k \times r(t)) \cdot \dot{r}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ , így

$$\int_L k \times r \, dr = \int_0^{2\pi} (k \times r(t)) \cdot \dot{r}(t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

(b) Felhasználva a vonalmenti és ívhossz szerinti integrálok közötti fenti összefüggést, továbbá azt, hogy  $L$   $\dot{r}$  irányú  $e$  érintő egységvektora és  $k \times r$  azonos irányúak, tehát  $(k \times r)_e$ ,  $k \times r$ -nek  $e$ -re eső vetülete éppen  $|k \times r|$ , valamint figyelembe véve, hogy  $k$  és  $r$  merőlegesek egymásra (hisz a kör benne van az  $[xy]$  síkban) és hogy a körön  $|r| = 1$ , azt kapjuk, hogy

$$\int_L k \times r \, dr = \int_L (k \times r)_e |dr| = \int_L |k \times r| |dr| = \int_L |k| \cdot |r| |dr| = \int_L |r| |dr| = \int_L |dr| = |L| = 2\pi.$$

(2) Az

$$\int_F r \, dr$$

integrál kiszámítása, ha  $F$  az  $r = r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $0 \leq u \leq R$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$  egyenlettel definiált  $R$  sugarú  $z$  tengelyű  $\pi/4$  félnyílásszögű kúppalást (melyre  $-F$  kifelé irányított).

(a)  $r_u = (\cos v, \sin v, 1)$ ,  $r_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$ , így  $r_u \times r_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ ,  $r \cdot (r_u \times r_v) = -u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v + u^2 = 0$ , tehát

$$\int_F r \, dr = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot (r_u \times r_v) \, dudv = 0$$

(b) A felületi integrál definíciója alapján az integrál 0, ha az integrandus a felület pontjaiban merőleges az érintősík normálvektorára. Origócsúcsú kúp esetén minden felületi pontban az  $r$  helyvektor alkotó irányú és ez merőleges az érintősík normálisára, tehát a  $v(r) = r$  függvény integrálja egy ilyen kúp bármely részén 0.

#### 1.24 Megjegyzés (A kétdimenziós eset)

Mivel a görbék az egydimenziós felületek,  $n = 2$  esetén a görbék és a valódi felületek egybeesnek. Így a sík valamely valódi felületén egyidejűleg értelmezett tetszőleges kétdimenziós vektor-vektor függvény görbementi és felületmenti integrálja is. Az alábbiakban a fenti definíciók alapján megadjuk a kettő közötti összefüggést egy (valamely térrészből nézve) pozitívan irányított  $L$  görbe és (a pozitív irányítottság definíciója alapján kifelé irányított)  $F = -L$  esetén:

$$\int_F v \, df = \int_L \text{CROSS}(v) \, dr \quad \text{és} \quad \int_L v \, dr = - \int_F \text{CROSS}(v) \, df.$$

Valóban, legyen a pozitívan irányított  $L$  síkgörbe egyenlete:  $r = r(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . Felhasználva, hogy kétdimenziós esetben  $\text{CROSS}((x, y)) = (-y, x)$  (lásd az 1.7 (1) megjegyzést), azt kapjuk, hogy  $F = -L$  - re:

$$\begin{aligned} \int_F v \, df &= \int_{-L} v \, df = - \int_L v \, df = - \int_I v(r(t)) \cdot \text{CROSS}(\dot{r}(t)) \, dt = \\ &= - \int_I (v_1, v_2) \cdot (-\dot{y}, \dot{x}) \, dt = - \int_I (-v_1 \dot{y} + v_2 \dot{x}) \, dt = - \int_I (v_2, -v_1) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) \, dt = \\ &= \int_I (-v_2, v_1) \cdot \dot{r}(t) \, dt = \int_L (-v_2, v_1) \, dr = \int_L \text{CROSS}(v) \, dr \end{aligned}$$

Másrészt, mivel  $\text{CROSS}(\text{CROSS}(-v)) = v$  és  $\text{CROSS}(-v) = -\text{CROSS}(v)$ , ebből

$$\int_L v \, dr = \int_L \text{CROSS}(\text{CROSS}(-v)) \, dr = \int_L \text{CROSS}(-\text{CROSS}(v)) \, dr = - \int_F \text{CROSS}(v) \, df$$

Bár azt, hogy a vonal- és felületi integrálok *felosztások* esetén additív halmazfüggvényként viselkednek könnyű bizonyítani, az alkalmazásokban ez általában nem elég, azt kellene tudni, hogy *lefedések* esetén is ilyenek. A gyakorlatban elégnek bizonyul csak bizonyos speciális tartományok határai esetén vizsgálni ezt a kérdést, melyek köre azért még elég tág ahhoz, hogy az összes "normális" térrészeket tartalmazza, csak a "torzszülötteket" zárja ki a tekintetbe veendő halmazok közül (vö az 1.26 (18) feladattal). Ezeket a speciális halmazokat néhány rájuk vonatkozó megjegyzést követően az alábbiakban definiáljuk.

A kétváltozós függvények integrálszámítása során bevezetett normáltartományt a sík egy olyan rész-halmazaként definiáltuk, melyet – szabadon fogalmazva – egyváltozós függvények görbéi határolnak. Az alábbi definícióban a koordinátafelület a függvény görbéjének megfelelő általános fogalom és a reguláris normáltartomány az ilyenek által határolt térrész. Végül a normál térrészt a tér egy olyan rész-halmazaként definiáljuk, melynek szerkezete biztosítja, hogy a határára vett integrált visszavezethessük normáltartományok határára, azaz koordinátafelületekre való integrálásra. Ugyanis a definícióban rögzített feltételek fennállása esetén bizonyítható, hogy a normál térrész felosztható normáltartományokra oly módon, hogy a felosztás elemeinek a térrész belsejébe eső határszakaszain vett integrálok kiejtik egymást, míg a maradék határszakaszokon vett integrálok összege a térrész határára vett integrált adja (lásd az 1.26 (15)(b) és (17) feladatokat).

### 1.25 Definíció (Normáltartomány általánosítása)

Legyen  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$  és legyen  $V \subseteq \mathbf{R}^n$  egy az identitásfüggvénnyel definiált térrész.

(1)(a) Ha  $n = 1$  és  $V$  nem üres belsejű zárt intervallum, akkor  $V$ -t (reguláris) normáltartománynak nevezzük.

(b) Legyen  $n > 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  $V$ -t **az  $i$ . tengelyre vonatkoztatva  $n$  dimenziós (reguláris) normáltartománynak** nevezzük, ha van olyan  $H \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$  reguláris normáltartomány és vannak olyan  $f, g$   $H$ -n értelmezett szakaszonként folytonosan deriválható  $(n-1)$ -változós függvények, hogy

$$\begin{aligned} & \text{minden } (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \text{Int } H \text{ esetén} \\ & g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) < f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ & \text{továbbá minden } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \text{ esetén } x \in V \text{ iff} \\ & (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in H \text{ és} \\ & g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq x_i \leq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

(c) Legyen  $n > 1$ .  $V$ -t **(reguláris) normáltartománynak** nevezzük, ha minden  $1 \leq i \leq n$  esetén az  $i$ . tengelyre vonatkoztatva reguláris normáltartomány.

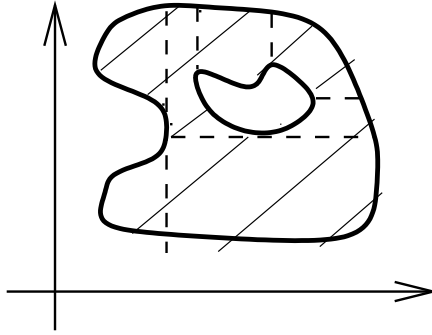
(2) Az (1)(b)-ben szereplő feltételeket kielégítő  $H$  normáltartomány és  $f$  függvény esetén az

$$\begin{aligned} r = r(x) = & (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n), \\ & (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in H \end{aligned}$$

alakú függvények által definiált és a velük ellentétes irányítású felületeket ( $n$  dimenzióbeli) ( $i$ . tengely szerinti) **koordinátafelületeknek** nevezzük. (Speciálisan a síkon a koordinátafelületek az  $r = r(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$  és az  $r = r(y) = (g(y), y)$ ,  $y \in [c, d]$  alakú függvények által definiált valódi felületek.) Továbbá koordinátafelületnek tekintünk minden nulldimenziós felületet is.

(3)  $V$ -t **normál térrésznek** nevezzük, ha  $V$  lefedhető olyan kifelé irányított határu reguláris normáltartományokkal, melyek mindegyikének határa szintén lefedhető úgy, hogy ezen lefedések  $V$  határára eső elemei  $V$  határának egy koordinátafelületekből álló lefedését adják,  $V$ -ből nézve kifelé vannak irányítva és belsejük pontosan egy normáltartomány határának része, míg a határok lefedésének minden többi elemére fennáll, hogy azok ellentétes irányítással pontosan két normáltartomány határának lefedésében szerepelnek elemként (az illusztrációt lásd a túldoldalon).

Nos, koordinátafelületekkel való lefedésre vonatkozóan, így normál térrészek határának bizonyos lefedésére vonatkozóan is, az integrálok megőrzik additívitasukat. Ezt a tényt pontos formában az alább következő 1.26 (15)(b) és (17) feladatokban fogalmazzuk meg.



### 1.26 Feladatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha  $a$  és  $b$  jobbsodrású rendszert alkot, akkor  $a$ -t pozitív (azaz az óramutató járásával ellenkező irányú)  $\pi$ -nél kisebb szöggel való elforgatás viszi  $b$ -be!

(2)(a) Bizonyítsuk be, hogy  $\mathbf{R}$  összefüggő részhalmazai az intervallumok!

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  és minden  $x, y \in H$  összeköthető  $H$ -n belül elemi ívvel, akkor  $H$  összefüggő!

(3) Egy halmaz **konvex**, ha minden pontpárja összeköthető a halmazon belüli szakasszal.

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden konvex halmaz összefüggő!

(b) Adjunk példát  $\mathbf{R}^3$ -beli konvex, továbbá nem konvex, de összefüggő felületekre!

(4)(a) Bizonyítsuk be, hogy a felületek zárt, korlátos halmazok!

(b) Legyen  $\mathcal{L}$  tetszőleges normált lineáris tér és legyen  $H \subseteq \mathcal{L}$  korlátos, zárt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $x \in \mathcal{L}$  esetén, ha  $x \notin H$ , akkor van  $x$ -nek olyan  $S(x)$  környezete, hogy  $S(x) \cap H = \emptyset$ .

(c) Legyen  $\mathcal{L}$  tetszőleges normált lineáris tér és legyenek  $H_1, H_2 \subseteq \mathcal{L}$  diszjunkt korlátos, zárt halmazok. Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $d > 0$ , hogy minden  $x \in H_1, y \in H_2$  esetén  $\|x - y\| \geq d$ . (A  $d(H_1, H_2) = \inf\{\|x - y\| : x \in H_1, y \in H_2\} \geq d > 0$  számot  $H_1$  és  $H_2$  **távolságának** nevezzük.)

(d) Bizonyítsuk be, hogy véges sok zárt halmaz uniója zárt! Igaz-e ez végtelen sok halmaz esetén is?

(5)(a) Bizonyítsuk be, hogy a koordinátafelületek valóban felületek!

(b) Bizonyítsuk be, hogy a koordinátafelületek elemi héjak!

(6) Legyen  $F$  az  $n$ -dimenziós valódi felület egy implicit egyenlete  $f(r) = 0$ ,  $r_0 \in F$  és  $\text{grad } f(r_0) \neq 0$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden  $r_0$ -on átmenő, a felület által tartalmazott görbe  $r_0$ -beli érintője a  $\text{grad } f(r_0)$  normálisú  $r_0$ -beli érintő hipersíkba esik.

(7)(a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  egyenlete  $r = r(u)$ ,  $u \in A'$ , akkor  $r^* \text{Int } A \subseteq \text{Int } F$ !

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  és  $F'$  az  $r$ -el ill.  $r'$ -vel definiált azonos dimenziós felületek és  $\text{Rg } r = \text{Rg } r'$  akkor  $\text{Int } F = \text{Int } F'$ !

(8) Bizonyítsuk be, hogy ha az  $F$  egydimenziós felület egyenlete  $r = r(t)$ ,  $t \in A$  és  $-F$  egyenlete  $s = s(t)$ ,  $t \in A'$ , akkor

(a)  $\text{Rg } r = \text{Rg } s$

(b)  $F$  pontjaiban  $F$  és  $-F$  irányítása egymás  $(-1)$ -szeresei, azaz, ha  $r(t) = s(t')$ , valamely  $t \in A$ ,  $t' \in A'$  esetén, akkor  $\text{CROSS}(\dot{s}(t')) = -\text{CROSS}(\dot{r}(t))$ .

(9) Legyen  $F$  az  $r = r(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$  által definiált görbe.

- (a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  elemi ív, akkor  $\text{Int } F = r^* \text{Int } I$ , tehát  $F$  határa az  $\{r(a), r(b)\}$  halmaz.  
 (b) Igaz-e, hogy ha  $r$  invertálható  $\text{Int } I$ -n és  $r(a) = r(b)$ , akkor  $F$  zárt felület?

(10) Ha az  $L$  görbe  $r = r(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$  egyenlete olyan, hogy minden  $a < c < b$  esetén az  $r$ -nek mind az  $[a, c]$ -re mind a  $[c, b]$ -re való megszorítása által definiált görbe elemi ív, akkor  $L$ -et **egyszerű ívnek** nevezzük. (Nyilván minden elemi ív egyszerű ív is.) Legyen az  $L$  egyszerű ív egyenlete  $r = r(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$ .  $r(a)$ -t  $L$  **kezdőpontjának** és  $r(b)$ -t  $L$  **végpontjának** nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy

- (a)  $r$  invertálható mind az  $(a, b]$ -n, mind az  $[a, b)$ -n és *folytonosan* invertálható  $(a, b)$ -n,  
 (b)  $L$  akkor és csak akkor zárt ha  $r(a) = r(b)$ ,  
 (c)  $L$  akkor és csak akkor elemi ív ha nem zárt.  
 (d) Az  $r = r(t) = (R \sin t, R \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  egyenlettek definiált grbe zárt.

(11) Legyenek  $a < b < c$  tetszőleges valósok és tegyük fel, hogy  $r_1 = r_1(t)$ ,  $t \in [a, b]$  és  $r_2 = r_2(t)$ ,  $t \in [b, c]$  elemi íveket definiálnak és  $r_1(b) = r_2(b)$ . Legyen

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{ha } t \in [a, b] \\ r_2(t) & \text{ha } t \in [b, c] \end{cases}, \quad t \in [a, c]$$

(Ez az  $r_1$  és  $r_2$  által definiált görbék **egymáshoz csatolása**.) Bizonyítsuk be, hogy

- (a) ha  $\text{Rg } r_1 \cap \text{Rg } r_2 = \{r(b)\}$ , akkor  $r$  elemi ívet definiál és  
 (b) ha  $r_2(c) = r_1(a)$  és  $\text{Rg } r_1 \cap \text{Rg } r_2 = \{r(a), r(b)\}$ , akkor  $r$  egyszerű ívet definiál!

(12)(a) Bizonyítsuk be a vonal- és felületi integrálokhoz az 1.22 Állításban felsorolt tulajdonságait !

(b) Bizonyítsuk be a síkbeli (egydimenziós) valódi felületek esetén a következőt:

ha  $F$  az  $r = r(t)$   $t \in I$  által definiált felület,  $f$   $I$ -n definiált szigorúan monoton növekvő deriválható függvény, akkor az  $s(t) = r(f(t))$ ,  $t \in I' = (f^{-1})^* I$  által definiált  $F'$  felület esetén  $\text{Rg } r = \text{Rg } s$  és bármely az  $F$ -en folytonos  $v$  függvény esetén

$$\int_F v \, df = \int_{F'} v \, df.$$

(13) Legyenek  $L$  és  $L'$  egyszerű ívek egyenletei  $r = r(t)$ ,  $t \in I$  ill.  $s = s(t)$ ,  $t \in I'$ . (Az egyszerű ív definíciójához lásd a (10) feladatot.) Tegyük fel, hogy  $L$  és  $L'$  kezdőpontjai egybeesnek, továbbá  $\text{Rg } r = \text{Rg } s$ . Legyen  $G = \text{Rg } r$ . Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $v \in C(G)$  esetén  $v$ -nek  $L$ -en és  $L'$ -ön vett vonalintegráljai megegyeznek!

(14) Legyenek  $a < b$  és  $c < d$  tetszőleges valósok és legyenek  $L_1$  és  $L_2$  az  $r_1 = r_1(t)$ ,  $t \in [a, b]$  ill. az  $r_2 = r_2(t)$ ,  $t \in [c, d]$  által definiált elemi ívek. Tegyük fel, hogy

$$(a) \quad r_1(b) = r_2(c) \text{ és } \text{Rg } r_1 \cap \text{Rg } r_2 = \{r_1(b)\}$$

vagy

$$(b) \quad r_1(b) = r_2(c), \quad r_1(a) = r_2(d) \text{ és } \text{Rg } r_1 \cap \text{Rg } r_2 = \{r_1(a), r_1(b)\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha  $L$  az  $r = r(t)$ ,  $t \in I$  egyenlettel definiált olyan  $L$  görbe, melyre  $\text{Rg } r = \text{Rg } r_1 \cup \text{Rg } r_2$ , akkor minden  $L$ -en folytonos  $v$  függvény esetén

$$\int_L v \, dr = \int_{L_1} v \, dr + \int_{L_2} v \, dr.$$

(15)\* (a) Legyen  $V$  kétdimenziós normál térrész és  $F$  zárt felület része  $V$  határának. Bizonyítsuk be, hogy  $V$  határának minden  $F_1, F_2, \dots, F_n$  lefedéséből kiválasztható  $F$ -nek egy  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  lefedése.

(b) Legyen  $V$  tetszőleges kétdimenziós térrész. Legyen  $F$   $V$ -ből nézve kifelé irányított valódi felület része  $V$  határának. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n \geq 2$  és az  $F_1, F_2, \dots, F_n$  olyan  $V$ -ből nézve kifelé irányított koordinátafelületekkel való lefedése  $F$ -nek, melyek mindegyike egy  $V$  által tartalmazott reguláris normáltartomány határának része, akkor bármely  $F$ -en folytonos  $v$  függvény esetén

$$\int_F v \, df = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} v \, df.$$

(c) Legyenek  $V_1, V_2$  kétdimenziós normál térrészek és  $V_2 \subseteq \text{Int}V_1$ . Legyenek  $V_1$  és  $V_2$  kifelé irányított határai az  $F_1$  és  $F_2$  felületek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $V = V_1 \setminus \text{Int}V_2$  olyan térrész, melynek határát  $F_1$  és  $F_2$  lefedi, továbbá  $F_1$  és  $-F_2$   $V$ -ből nézve kifelé vannak irányítva.

(d) Bizonyítsuk be, hogy ha  $V$  az origóközéppontú  $R$  sugarú körlap, akkor  $V$  normál térrész melynek az  $r = r(t) = (R \sin t, R \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  egyenlettel definiált  $F$  körvonal a határa.

**(16)** Legyenek  $a < b$  valósok,  $f, g \in \dot{C}_1[a, b]$ ,  $V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ . Bizonyítsuk be, hogy ha az  $F$  egydimenziós valódi felület egyenlete

(a)  $r = r(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in (a, b)$ , akkor  $F$   $V$ -ből nézve kifelé van irányítva,

(b)  $r = r(x) = (x, g(x))$ ,  $x \in [a, b]$ , akkor  $-F$   $V$ -ből nézve kifelé van irányítva.

**(17)** Legyenek  $a < b$  tetszőleges valósok és  $f, g \in \dot{C}_1[a, b]$  olyanok, hogy  $g(x) < f(x)$  minden  $x \in (a, b)$ -re. Legyen

$$V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

kétdimenziós reguláris normáltartomány. Legyenek továbbá

$$\begin{aligned} F_1 & \text{ az } r_1(x) = (x, f(x)), x \in [a, b], \\ F_2 & \text{ az } r_2(x) = (x, g(x)), x \in [a, b], \\ F_3 & \text{ az } r_3(x) = (a, y), y \in [g(a), f(a)] \text{ és} \\ F_4 & \text{ az } r_4(x) = (b, y), y \in [g(b), f(b)] \end{aligned}$$

által definiált egydimenziós felületek, továbbá legyen  $F$   $V$  kifelé irányított határa. ( $F_3$ -at és  $F_4$ -et természetesen csak akkor definiáljuk ha  $g(a) < f(a)$  ill.  $g(b) < f(b)$ .) A (15) (b) feladat eredményének felhasználása nélkül bizonyítsuk be hogy  $F_1, F_2, F_3, F_4$   $V$  határának lefedése (ahol  $g(a) = f(a)$  esetén a harmadik,  $g(b) = f(b)$  esetén a negyedik elem hiányzik) és bármely  $F$ -en folytonos  $v$  függvény esetén

$$\int_F v \, df = \int_{F_1} v \, df - \int_{F_2} v \, df + \int_{F_3} v \, df - \int_{F_4} v \, df$$

(ahol  $g(a) = f(a)$  esetén a harmadik,  $g(b) = f(b)$  esetén a negyedik tag hiányzik).

**(18)** Mutassunk példát olyan síkbeli reguláris normáltartományokra, melyek nem normál térrészek!

## 2. Vektorfüggvények jellemzése integráljaikkal

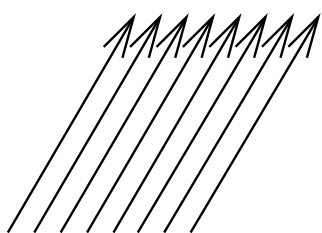
Szeretnénk a vektorfüggvények változásának jellemzésére az egyváltozós függvények deriváltjához hasonlóan szemléletes jelentéssel bíró olyan fogalmakat keresni, melyek pontonként leírják a vektorfüggvény nagyságának és irányának változását külön-külön, hiszen maga a deriváltoperátor további elemzés nélkül erre nem alkalmas, a vektor irányának és nagyságának változását együtt adja meg. Ehhez természetesen először is magának a vektorfüggvénynek a szemléltetésére kell eszközöket keresnünk.

### 2.1 Vektorfüggvények szemléltetése

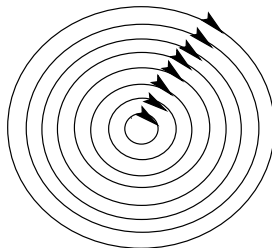
Vizsgáljuk meg tehát hogyan lehetne szemléltetni a vektorfüggvényeket! A matematikai fogalmaknak általában két fajta szemléltetése van. Az egyik tulajdonképpen **alkalmazást** jelent, azt, hogy a matematikai mennyiségeknek konkrét (pl. fizikai) jelentést tulajdonítunk. Ez annak az eljárásnak a megfordítása, amikor valamely fizikai jelenség matematikai modelljét keressük. Így például egy háromváltozós függvényt mindig tekinthetünk hőmérsékleteloszlás függvénynek, kezelhetjük úgy, mint egy olyan függvényt, mely a tér minden pontjához az adott pontbeli hőmérsékletet rendeli. A másik, a **grafikus szemléltetés** során a matematikai mennyiségekhez geometriai jelentést rendelünk abból a célból, hogy geometriai objektumok segítségével ábrázolhassuk őket és így a szó szoros értelmében szemléletes képet nyerjünk róluk.

A vektorfüggvények leggyakoribb két alkalmazása közül az egyik az, amikor a függvény értékeit adott pontbeli erőnek (pl. elektromos, mágneses, gravitációs erőnek) tekintjük; ilyen esetben a vektorfüggvényt **erőtérnek** nevezzük. A másik gyakori alkalmazás esetén a függvény értékeit valamilyen áramló anyag (pl. folyadék, gáz vagy akár hömpölygő köögörgeteg, felvonuló embertömeg) adott pontbeli sebességének tekintjük, azaz a vektorfüggvény valamely pontbeli értékének iránya az áramlás irányát, míg nagysága az egységnyi idő alatt ebben az irányban átáramló anyagsűrűséget, azaz, egy, erre az irányra merőleges, egységnyi felszínű (valódi) felületen átáramló anyag mennyiségét adja meg (háromdimenziós folyadék áramlás esetén pl.  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \frac{1}{\text{sec}}$ -ban). Ekkor a függvényt **áramlási térnek** hívjuk.

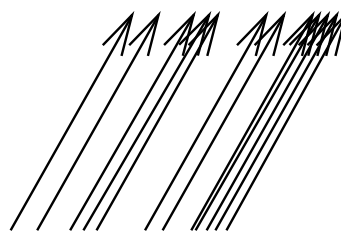
Grafikusan egy vektorfüggvényt olyan görbesereggel, az ún. **erővonalakkal** (vagy **áramvonalakkal**) ábrázolhatunk vázlatosan, melyek esetén egy adott pontban a vektorfüggvény irányát a ponton áthaladó görbe érintőjének iránya, míg nagyságát a görbesereg adott pontbeli sűrűsége, azaz az érintőre merőleges egységnyi felszínű felületen áthaladó (azt metsző) erővonalak száma adja meg. Az alábbiakban megadjuk néhány egyszerű speciális síkbeli erőter erővonalas ábrázolását. (A későbbiekben is mindig, ha mást nem mondunk az erővonalas ábrázolások síkvektorterekre vonatkoznak, az általános esetet ezen lehet a legkényelmesebben illusztrálni.) **Homogén nagyságú(irányú)** egy tér ha nagysága(iránya) állandó, ellenkező esetben **inhomogén nagyságú(irányú)**, **homogén** ha homogén nagyságú és irányú, végül **inhomogén** ha nem homogén.



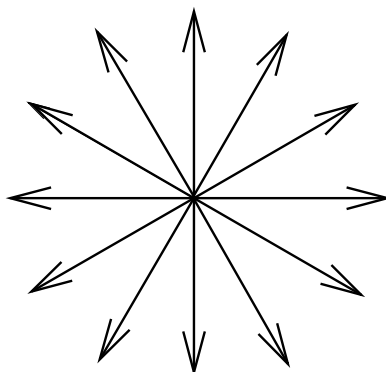
Homogén erőter



Homogén nagyságú  
inhomogén erőter



Homogén irányú  
inhomogén erőter



Inhomogén nagyságú és irányú erőter

Vizsgáljuk meg, hogy milyen fizikai jelentés tulajdonítható a görbe- és felületmenti integrálok az áramlási tér terminusaiban, illetve mi felel meg ezeknek az integrálok az erővonalas ábrázolás esetén! Mint látni fogjuk, a felületmenti integrál a vektorfüggvény nagyságváltozásával van kapcsolatban, míg a vektorfüggvény irányváltozását a vonalmenti integrál jellemzi.

## 2.2 Felületmenti integrál

A felületmenti integrál szemléletes jelentését először az áramlási tér esetén (rögzített időegységre vonatkoztatva) vizsgáljuk meg. Mivel a vektorfüggvény ilyenkor egy irányított sűrűség és a felületmenti integrál ezen sűrűség felületi normálisra eső vetületének az integrálja, a felületmenti integrál a felületen átáramló anyag előjeles összemennyisége, azaz a felületen keresztül a felület irányítása által meghatározott irányban és az ellenkező irányban áramló anyag mennyiségének különbsége. Például nyilvánvalóan egy olyan véges síktartomány mint felület esetén, mely mentén az áramlás iránya állandó, ha a sík párhuzamos az áramlás irányával, akkor az integrál nulla és az integrál akkor maximális, ha a sík merőleges az áramlás irányára.

A fentiekből következően egy térrész *kifelele* irányított határfelülete esetén a felületmenti integrál éppen a felület által bezárt térrészből kiáramló és az oda beáramló anyag mennyiségének különbsége, azaz a térrészben keletkező (vagy negatív előjel esetén eltűnő) anyag mennyisége, másszóval az áramló anyag mennyiségének a tekintett térrészen történő *megváltozása*. Következésképp, az, hogy egy ilyen felületre vonatkozó felületmenti integrál nulla, azt jelenti, hogy amennyi anyag a térrészbe érkezik, ugyanannyi távozik is onnan, tehát nem keletkezik és nem is tűnik el itt anyag, pontosabban, az itt keletkező és eltűnő anyag mennyisége azonos.

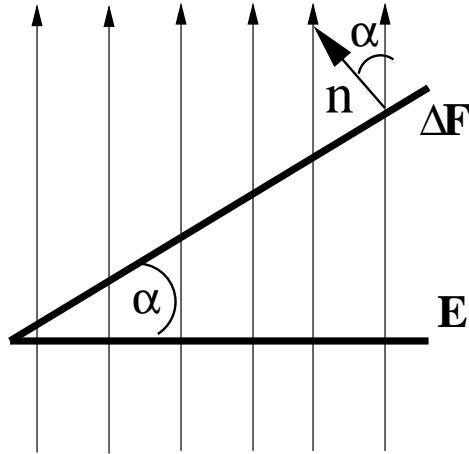
Analóg módon grafikus szemléltetés esetén a felületmenti integrál a a felületen áthaladó összes erővonalak száma. Valóban, az erőter egy kicsiny, homogénnek tekinthető darabját tekintve (az ábrát lásd a túloldalán), ha egy egységnyi felszínű, az erővonalakra merőleges  $E$  felületdarabon áthaladó erővonalak száma  $k = |v|$ , akkor a vele  $\alpha$  szöget bezáró  $\Delta F$  felületdarabon ugyanezek az erővonalak áthaladnak, de  $\Delta F$  felszíne már  $\frac{1}{\cos \alpha}$ , így rajta az erővonalak sűrűsége

$$\frac{k}{\frac{1}{\cos \alpha}} = k \cdot \cos \alpha = |v| \cdot \cos \alpha = v \cdot n = v_n,$$

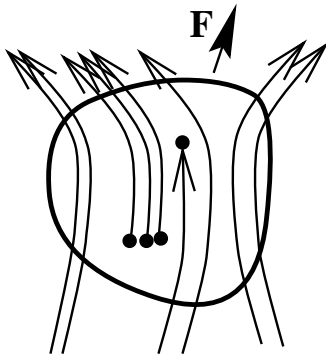
ahol  $n$   $\Delta F$  egységnormálisa és  $v_n$   $v$ -nek erre eső vetülete.  $K$ -t, az egész  $F$ -en áthaladó erővonalak számát, nyilván az erővonalsűrűség felszín szerinti integrálja adja meg. Felhasználva az 1.22 (2) állítást, azt kapjuk, hogy

$$K = \int_F v_n |df| = \int_F v df,$$

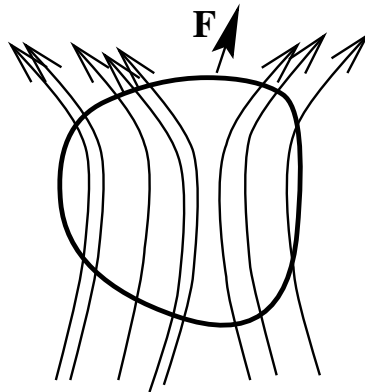
amit meg akartunk mutatni.



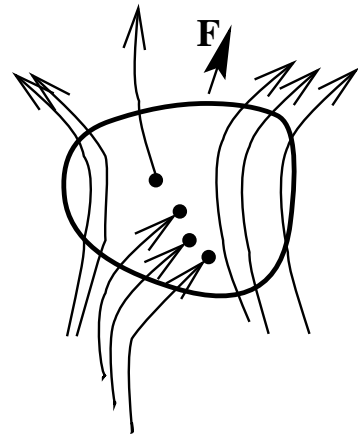
Tehát a felületmenti integrál a a felületen áthaladó összes erővonalak száma. Persze itt is az, hogy a felületen *áthaladó* azt jelenti, hogy a felületi normális irányába és azzal ellentétes irányban áthaladó erővonalak számának előjeles összege. Ebből következően egy térrészt határoló *kifele* irányított felület esetén a felületmenti integrál a térrészből ki- és oda belépő erővonalak számának, másszóval a felületen a két irányban áthaladó összes erővonalak számának különbsége, azaz az erővonalszámnak a térrészben történő *megváltozása*. Az integrál tehát pontosan akkor nulla, ha a felület által bezárt térrészben az ott eredő és eltűnő erővonalak száma megegyezik, vagyis, ahány erővonal a térrészbe belép, ugyanannyi ki is lép onnan. Speciálisan ez a helyzet, ha az erőter erővonalai mindkét irányban végtelenek vagy pedig zártak. Ekkor sehol nem erednek új erővonalak és nem is tűnnek el sehol. Azokat a pontokat, ahol új erővonalak keletkeznek **források**nak, míg azokat, ahol erővonalak szűnnek meg, **nyelők**nek nevezzük.



$$\int_F v \, df > 0$$



$$\int_F v \, df = 0$$



$$\int_F v \, df < 0$$

## 2.1 Definíció

Egy  $v$  vektorfüggvénynek az  $F$  felületen vett felületmenti integrálja a  $v$ -nek  $F$ -re vonatkozó ( $F$ -re számított) **fluxusa**.

Az eddig elmondottak alapján a fluxus egy – egy térrészben a vektorfüggvény *nagyságának* (az általa leírt anyag *összemennyiségének*) változását adja meg.

## 2.2 Példa A

$$v(x, y) = (f(x), 0), \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$

és a

$$w(x, y) = (f(y), 0), \quad x \in [a, b], y \in [c, d]$$

vektorfüggvények ( $f \in C(\mathbf{R})$  pozitív és szigorúan monoton növekvő függvény) fluxusának kiszámítása a

$$V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

koordinátatengelyekkel párhuzamos élű téglalap, mint kétdimenziós térrész kifejele irányított határára vonatkozóan.

Legyen  $V$  kifejele irányított határa  $F$  és legyenek

$$F_1 \text{ az } r_1(x) = (x, d), \quad a \leq x \leq b,$$

$$F_2 \text{ az } r_2(x) = (x, c), \quad a \leq x \leq b,$$

$$F_3 \text{ az } r_3(y) = (a, y), \quad c \leq y \leq d,$$

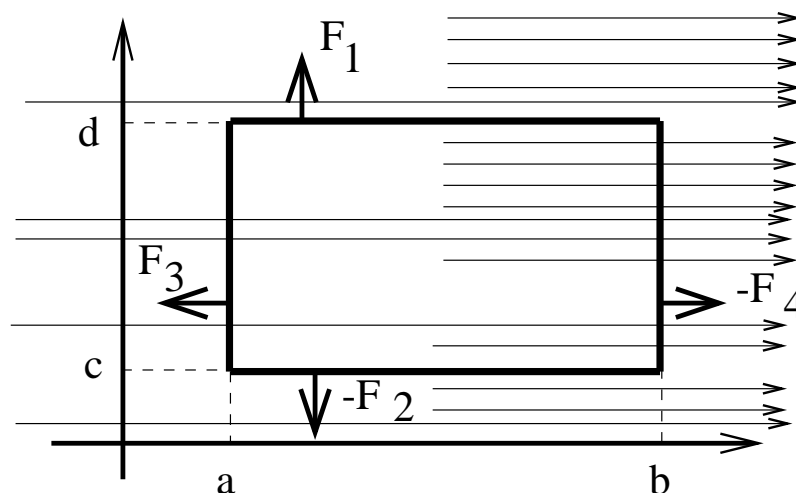
$$F_4 \text{ az } r_4(y) = (b, y), \quad c \leq y \leq d$$

által definiált felületek. Az integrálnak a normáltartományok határain való additivitását használva (lásd az 1.26 (15) (b) vagy az 1.26 (17) feladatot) adódik, hogy

$$\int_F v \, df = \int_{F_1} v \, df - \int_{F_2} v \, df + \int_{F_3} v \, df - \int_{F_4} v \, df$$

( $F_2$  és  $F_4$  azért szerepelnek negatív előjellel, mert  $-F_2$  és  $-F_4$  vannak  $V$ -ből kifejele irányítva, hiszen például  $r_2'(x) = (1, 0)$  miatt  $F_2$  irányítása  $\text{CROSS}(r_2') = (0, 1)$ ).

$$(1) \quad v(x, y) = (f(x), 0), \quad x \in [a, b], y \in [c, d]$$



Mivel  $v$ -nek csak  $x$  irányú komponense van, így mindenütt merőleges  $F_1$  és  $F_2$  normálisaira, tehát

$$\int_{F_1} v \, df = \int_{F_2} v \, df = 0.$$

Valóban, például  $r_1'(x) = (1, 0)$ , így  $\text{CROSS}(r_1') = (0, 1)$ , következésképpen

$$\int_{F_1} v \, df = \int_a^b (f(x), 0) \cdot (0, 1) \, dx = \int_a^b 0 \, dx = 0.$$

Másrészt,  $r_3(y) = (a, y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , tehát  $F_3$  pontjaiban  $x = a$ , így  $v(r_3(y)) = (f(a), 0)$ . Továbbá,  $r_3'(y) = (0, 1)$ , így  $\text{CROSS}(r_3') = (-1, 0)$ , tehát

$$\int_{F_3} v \, df = \int_c^d v(r_3(y)) \cdot \text{CROSS}(r_3') \, dy = \int_c^d (f(a), 0) \cdot (-1, 0) \, dy =$$

$$= \int_c^d -f(a) dy = -f(a) \int_c^d dy = -f(a)(d-c)$$

és pontosan ugyanígy

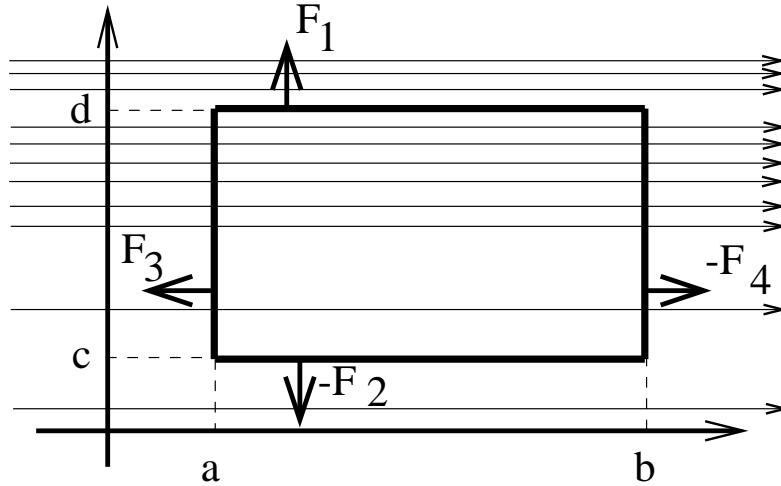
$$\int_{F_4} v df = -f(b)(d-c),$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_F v df &= \int_{F_1} v df - \int_{F_2} v df + \int_{F_3} v df - \int_{F_4} v df = \\ &= -f(a)(d-c) - (-f(b)(d-c)) = (f(b) - f(a))(d-c) > 0. \end{aligned}$$

A  $V$ -ben keletkező erővonalak száma tehát  $(f(b) - f(a))(d-c)$ , ahogy ez várható is, hiszen ez nem más mint az  $F_3$ -on belépő erővonalak számának  $(d-c) \cdot f(a)$ -nak és az  $F_4$ -en kilépő erővonalak számának  $(d-c) \cdot f(b)$ -nek a különbsége, mert  $F_3$ -on az erővonalak sűrűsége  $|v(x, y)| = f(a)$ ,  $F_4$ -en pedig  $|v(x, y)| = f(b)$ .

$$(2) \quad w(x, y) = (f(y), 0), \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$



Hasonlóan az előző esethez, mivel  $w$ -nek is csak  $x$  irányú komponense van, tehát mindenütt merőleges  $F_1$  és  $F_2$  normálisaira, azaz

$$\int_{F_1} w df = \int_{F_2} w df = 0.$$

A két másik integrált szintén az előző esettel analóg módon számíthatjuk:

$$\int_{F_3} w df = \int_c^d w(r_3(y)) \cdot \text{CROSS}(r_3'(y)) dy = \int_c^d (f(y), 0) \cdot (-1, 0) dy = - \int_c^d f(y) dy$$

és ugyanígy

$$\int_{F_4} w df = - \int_c^d f(y) dy,$$

vagyis

$$\int_F w df = \int_{F_1} w df - \int_{F_2} w df + \int_{F_3} w df - \int_{F_4} w df = \int_{F_3} w df - \int_{F_4} w df = 0,$$

amint az persze várható is volt, hisz az  $F_3$ -on belépő minden erővonal  $F_4$ -en kilép mert  $w$  erővonalai mindkét irányban végtelenek, nincsenek sem forrásai, sem nyelői.

A fenti példa szépen illusztrálja, hogy a fluxus csak a vektorfüggvény, azaz az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra érzékeny, az erre merőleges változásra nem, pontosabban a változásnak csak az erővonalak irányára vett vetületét méri.

Nos, a fentiek szerint a fluxus csak az átáramló anyag mennyiségének ill. az áthaladó összes erővonalak számának egy-egy felület által bezárt *térrészen való* megváltozását adja meg, így elég durva módon, csak egy tartomány egészén **globálisan** jellemzi a vektorfüggvényt, hasonlóan ahhoz, ahogy egy egyváltozós függvényt jellemez egy-egy adott intervallum szélein felvett értékeinek különbsége. Hogyan tudnánk ennek segítségével egy **lokális**, pontonkénti jellemzőt definiálni? Szembeszökő az analógia az egyváltozós függvények deriváltjának fogalmával. Ott is a függvény egy-egy résztartományon, speciálisan intervallumon, való megváltozása áll rendelkezésre és ezt a megváltozást a tartomány mértékével (az intervallum hosszával) elosztva kapunk egy, a függvény relatív megváltozását jellemző adatot, melyből aztán a tartományt egy pontra "zsugorítva", azaz valamely adott pontot tartalmazó intervallumok hosszát nullához közelítve kapjuk meg a deriváltat, a függvény változását az adott pontban jellemző mennyiséget. Vektorfüggvény esetén az ennek megfelelő, a "lokális fluxusváltozást" megadó fogalom egy adott pontban a függvény nagyságának változását jellemzi, szemléletes jelentése az adott pontban a térfogategységre jutó anyagmennyiség ill. erővonalszám változás, azaz az *anyagmennyiség ill. erővonalszám változás* adott pontbeli *sűrűsége*.

### 2.3 Definíció

Legyen  $n$  tetszőleges pozitív egész szám.

(1) Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges korlátos halmaz. A  $d(H) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in H\}$  számot  $H$  **átmérőjének** nevezzük és  $d(H)$ -val jelöljük.

(2) Legyen  $r_0 \in \mathbf{R}^n$  tetszőleges,  $H_k \subseteq \mathbf{R}^n$  minden  $k \in \mathbf{N}$ -re. Azt mondjuk, hogy a  $(H_k)$  sorozat az  $r_0$ -ra **zsugorodik** ha  $r_0 \in \text{Int } H_k$  minden  $k \in \mathbf{N}$ -re és  $d(H_k) \xrightarrow{k} 0$ .

### 2.4 Definíció

Legyen  $n$  tetszőleges pozitív egész szám.

Legyen  $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges nyílt halmaz,  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^n$  folytonos  $G \setminus \{r_0\}$ -on. Ha a  $(V_k)$   $r_0$ -ra zsugorodó  $\mathbf{R}^n$ -beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozatára, melyre minden  $k \in \mathbf{N}$  esetén  $V_k \subseteq G$  határa a kifelé irányított  $F_k$  valódi felület, a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df$$

(véges vagy végtelen) határérték létezik és ugyanaz, akkor ezt a mennyiséget  $v$   $r_0$ -beli **forrassűrűségének** nevezzük. Azt a függvényt, mely megadja  $v$  forrassűrűségét minden olyan pontban, ahol létezik és véges,  $s(v)$ -vel jelöljük. Ha  $r_0$ -ban a forrassűrűség pozitív, akkor  $v$ -nek **forrása**, ha negatív, akkor pedig **nyelője** van  $r_0$ -ban.

### 2.5 Megjegyzés

A definícióban szereplő feltételek természetesen, hiszen  $v$  folytonossága biztosítja integrálhatóságát,  $G$  nyíltsága azt, hogy van az adott pontra zsugorodó olyan térrész-sorozat, melynek minden elemén  $v$  folytonos, végül a tekintetbe vett térrész sorozat normalitása, kizárva a "túl speciális, furcsa, torz" térrészeket, garantálja, hogy a definiált határérték  $v$ -t és nem magát a térrész sorozatot jellemzi.

**2.6 Példa** A 2.2 Példában szereplő vektorfüggvények  $r_0 = (x_0, y_0)$  pontbeli forrassűrűségének meghatározása.

Jelenlegi eszközeinkkel egyelőre nem tudjuk megvizsgálni, hogy létezik-e egy függvény forrassűrűsége, csak azt tudjuk megállapítani, hogy mekkora az értéke, *feltéve, hogy létezik*. Tehát tegyük fel, hogy mindkét esetben létezik a forrassűrűség. Szükségünk lesz továbbá arra a feltevésre is, hogy  $f$  folytonosan deriválható  $r_0$  valamely környezetében.

Ha létezik forrassűrűség, akkor bármely  $r_0$ -ra zsugorodó normál térrész-sorozatra ugyanannyi lesz a forrassűrűség definíciójában szereplő határérték, tehát tekinthetünk egy koordinátatengelyekkel párhuz-

most élű téglalapokból álló  $(V_k)$  térrész sorozatot, ahol

$$V_k = \{(x, y) : a_k \leq x \leq b_k, c_k \leq y \leq d_k\}, \quad a_k \leq x_0 \leq b_k, c_k \leq y_0 \leq d_k$$

és

$$\lim_k (b_k - a_k) = \lim_k (d_k - c_k) = 0.$$

Felhasználva a 2.2 Példa eredményét, a  $v(x, y) = (f(x), 0)$  függvény esetén

$$\begin{aligned} s(v) \Big|_{r_0} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} \cdot (f(b_k) - f(a_k))(d_k - c_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Továbbá, ugyanígy a  $w(x, y) = (f(y), 0)$  esetén

$$s(w) \Big|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} w \, df = 0$$

hiszen a 2.2 Példa alapján  $w$  fluxusa minden  $F_k$ -ra nulla.  $w$   $r_0$ -beli forrassűrűsége tehát nulla, amint az várható is abból, hogy  $w$  erővonalai mindkét irányban végtelenek, így  $w$ -nek nincs sehol forrása. (Hol használtuk azt a feltételt, hogy  $r_0$  valamely környezetében  $f$  folytonosan deriválható? A válaszhoz lásd a 2.14 (1) feladatot.)

Természetesen a forrassűrűség örökli a fluxusnak azt a tulajdonságát, hogy csak a vektorfüggvény, azaz az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra érzékeny, az erre merőleges nagyságváltozásra nem. Ezt tükrözi eredményünk, melynek alapján az sejtethető, hogy a forrassűrűségbe a vektorfüggvény *első* komponensének *csak*  $x$ -től míg (nyilván szimmetriaokokból) *második* komponensének *csak*  $y$ -től való függése szól bele méghozzá a megfelelő változó szerinti deriválton keresztül. Kézenfekvő arra gondolni, hogy az operáció, mely ezt az eredményt szolgáltatja a megfelelő változó szerinti parciális deriválás, vagyis ha

$$v_1 = (f(x, y), 0), \quad v_2 = (0, g(x, y)),$$

akkor – egy olyan nyílt halmazon ahol  $f$  és  $g$  folytonosan deriválhatóak –

$$s(v_1) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{és} \quad s(v_2) = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Nos, a példában követett eljáráshoz teljesen hasonlóan ez tényleg könnyen megmutatható (lásd a 2.14 (1) feladatot), így a síkbeli általános esetben, ha

$$v = v_1 + v_2 = (f(x, y), g(x, y)),$$

akkor – felhasználva, hogy mind az integrál, mind pedig a határérték lineáris operáció –

$$s(v) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

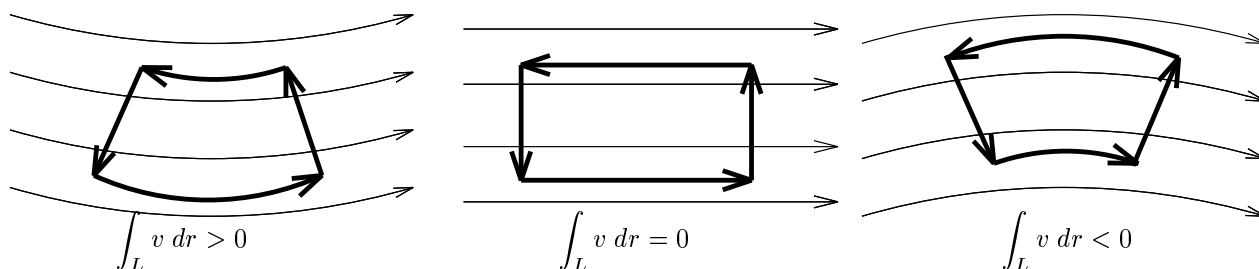
Erre az összefüggésre alább még visszatérünk, most azonban a másik integrál vizsgálatát kezdjük el.

## 2.3 Vonalmenti integrál

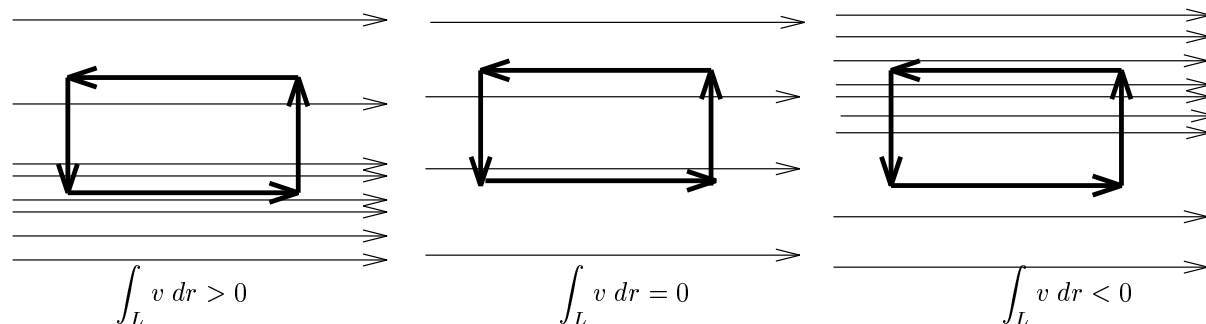
Az áramlási tér esetén a vektorfüggvény egy irányított sűrűség és a vonalmenti integrál ezen sűrűség érintőre eső vetületének az integrálja, a vonalmenti integrál tehát egy egységnyi keresztmetszetű, az adott irányított görbével, mint hossz tengellyel adott csőben levő anyag *összimpulzusa* (pl.  $(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \frac{1}{\text{sec}}) \cdot \text{m} = \frac{1}{\text{m}^2} (\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}})$ -ban), azaz annak mérőszáma, hogy ha a csőn kívül az anyag áramlását megszüntetnénk, akkor a csőben milyen irányban (előre vagy hátra) és milyen sebességgel mozogna az anyag. Például nyilvánvalóan egy olyan egyenes szakasz, mint görbe esetén, mely mentén az áramlás iránya állandó, ha a szakasz merőleges az áramlás irányára, akkor az integrál nulla és az integrál akkor maximális, ha a szakasz párhuzamos az áramlás irányával.

A fentiekből következően zárt görbe esetén a görbementi integrál éppen – előjeltől függően – a görbe irányában és azzal ellentétesen egy egységnyi keresztmetszetű csőben áramló anyag impulzusainak különbsége és azt mutatja, hogy az áramlást környezetétől elkülönítve és magára hagyva milyen irányú és sebességű keringést végez a görbe mentén az anyag.

(1) Homogén nagyságú erőter:



(2) Homogén irányú erőter:



Analóg módon grafikus szemléltetés esetén a görbementi integrál azt méri, hogy a görbe mentén mozogva mekkora utat tettünk meg milyen sűrű erővonalak mentén azok irányában és ellenkező irányban.

### 2.7 Definíció

Egy  $v$  vektorfüggvénynek az  $L$  görbén vett vonalmenti integrálja  $v$ -nek  $L$ -re vonatkozó ( $L$ -re számított) **cirkulációja** (**örvénylése**).

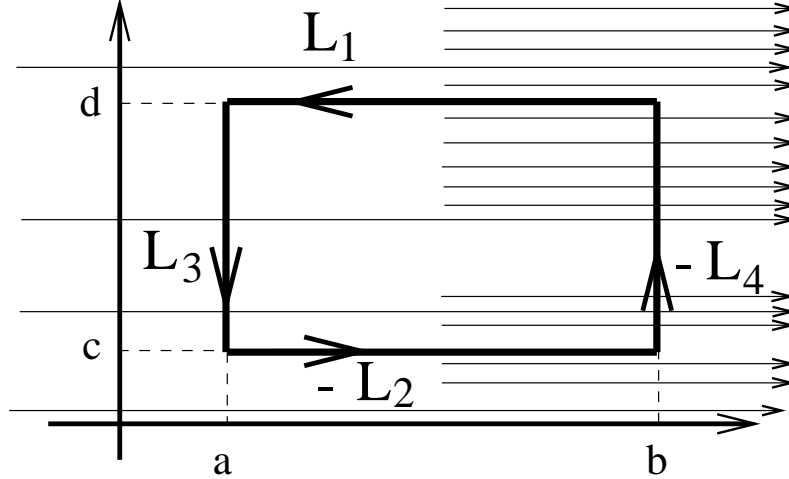
Az eddig elmondottak azt mutatják és a példák azt illusztrálják, hogy a cirkuláció homogén nagyságú vektorfüggvény esetén annak *irányváltoztatásával*, azaz az erővonalak görbültségével kapcsolatos. Lényeges azonban, hogy homogén irányú erőternek (melyben az erővonalak nem görbülnek) is lehet nem nulla cirkulációja. Ennek oka, hogy – szabadon fogalmazva – a cirkuláció a fluxusnak a vektortér irányára vonatkozó duálisa, vagyis pontosan fordítva viselkedik mint a fluxus: az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra nem érzékeny, de az erre merőleges nagyságváltozásra igen. Az azonban igaz, hogy *homogén nagyságú erőter esetén* a cirkuláció akkor és csakis akkor nulla, ha az erővonalak nem görbülnek, vagyis ilyenkor a cirkuláció valóban méri a vektorfüggvény irányváltoztatását, azaz az erővonalak görbültségét.

**2.8 Példa** A 2.2 Példában szereplő vektorfüggvények cirkulációjának kiszámítása az ott definiált  $V$  térrész határára, mint egy, a  $V$ -ből nézve pozitívan irányított  $L$  görbére vonatkozóan.

A görbe irányításának definíciója szerint (lásd az 1.13 (c) definíciót) az  $L = -F$  görbe lesz pozitívan irányított. Legyen  $L_i = -F_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Normáltartományok határain az integrál additív (az 1.26 (15) (b) vagy az 1.26 (17) feladat eredménye az 1.24 Megjegyzés miatt alkalmazható a vonalmenti integrálokra is), így azt kapjuk, hogy

$$\int_L v \, dr = \int_{L_1} v \, dr - \int_{L_2} v \, dr + \int_{L_3} v \, dr - \int_{L_4} v \, dr$$

(1)  $v(x, y) = (f(x), 0)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$



Mivel  $v$ -nek csak  $x$  irányú komponense van, így mindenütt merőleges  $L_3$  és  $L_4$  érintőire, tehát

$$\int_{L_3} v \, dr = \int_{L_4} v \, dr = 0.$$

Valóban, például  $r'_3(y) = (0, 1)$ , így

$$\begin{aligned} \int_{L_3} v \, dr &= \int_{-F_3} v \, dr = - \int_{F_3} v \, dr = \\ &= - \int_a^b (f(x), 0) \cdot (0, 1) \, dx = - \int_a^b 0 \, dx = 0. \end{aligned}$$

Másrészt,  $r_1(x) = (x, d)$ ,  $a \leq x \leq b$ , tehát  $v(r_1(x)) = (f(x), 0)$  és  $r'_1(x) = (1, 0)$ , így

$$\begin{aligned} \int_{L_1} v \, dr &= \int_{-F_1} v \, dr = - \int_{F_1} v \, dr = \\ &= - \int_a^b v(r_1(x)) \cdot r'_1 \, dx = - \int_a^b (f(x), 0) \cdot (1, 0) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

és teljesen hasonlóan

$$\int_{L_2} v \, dr = - \int_a^b f(x) \, dx,$$

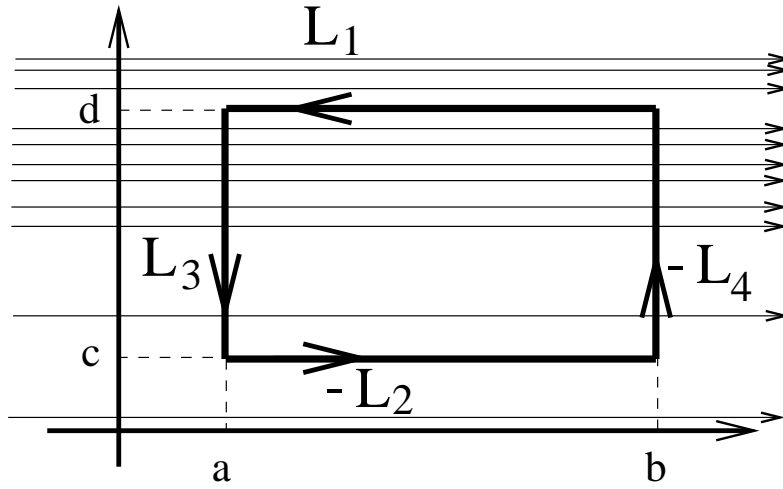
tehát

$$\int_L v \, dr = \int_{L_1} v \, dr - \int_{L_2} v \, dr + \int_{L_3} v \, dr - \int_{L_4} v \, dr = \int_{L_1} v \, dr - \int_{L_2} v \, dr =$$

$$= - \int_a^b f(x) dx - (- \int_a^b f(x) dx) = 0.$$

Ez az eredmény egybevág szemléletünkkel, hiszen a görbe mentén mozogva ugyanakkora utat tettünk meg azonos sűrűségű erővonalak mentén az erővonalak irányában ( $-L_2$ -n), mint ellenkező irányban ( $L_1$ -en), hiszen – mivel  $v$  csak  $x$ -től függ, az erővonalak sűrűsége azonos  $L_2$ -n és  $L_1$ -en, nevezetesen  $|v(x, y)| = f(x)$  minden  $x \in [a, b]$  esetén.

(2)  $w(x, y) = (f(y), 0)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$   $w$ -re is igaz, hogy csak  $x$  irányú komponense van, így



mindenütt merőleges  $L_3$  és  $L_4$  érintőire, azaz

$$\int_{L_3} w dr = \int_{L_4} w dr = 0.$$

A két másik integrált szintén az előző esettel analóg módon számíthatjuk.

$$\begin{aligned} \int_{L_1} w dr &= \int_{-F_1} w dr = - \int_{F_1} w dr = - \int_a^b w(r_1(x)) \cdot r_1' dx = \\ &= - \int_a^b (f(d), 0) \cdot (1, 0) dx = - \int_a^b f(d) dx = -f(d) \int_a^b dx = -f(d)(b-a) \end{aligned}$$

és persze ugyanilyen módon kapjuk azt is, hogy

$$\int_{L_2} w dr = -f(c)(b-a),$$

tehát végül

$$\begin{aligned} \int_L w dr &= \int_{L_1} w dr - \int_{L_2} w dr + \int_{L_3} w dr - \int_{L_4} w dr = \int_{L_1} w dr - \int_{L_2} w dr = \\ &= -f(d)(b-a) - (-f(c)(b-a)) = (f(c) - f(d))(b-a) < 0. \end{aligned}$$

Nos, az (1) esethez hasonlóan ez az eredmény is várható volt, mert bejárva a görbét nagyobb sűrűségű erővonalak mentén mozogunk az erővonalakkal ellentétes irányban ( $L_1$  mentén, ahol az erővonalak sűrűsége  $|v(x, y)| = f(d)$ ), mint velük azonos irányban ( $-L_2$  mentén, ahol az erővonalak sűrűsége  $|v(x, y)| = f(c) < f(d)$ ), mindkét esetben ugyanolyan hosszú utat téve meg. A példa illusztrálja azt a fent már említett tényt is, hogy a cirkuláció az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra nem érzékeny, de az erre merőleges nagyságváltozásra igen.

Arról, hogy a cirkulációból mint globális fogalomból hogyan származtatható a deriválás analógiájára egy lokális fogalom *mutatis mutandis* (megváltoztatva a megváltoztatókat) lényegében ugyanazokat mondhatjuk el, mint a fluxus esetén. Két fontos különbség azonban van.

Az egyik, hogy a háromdimenziós térben a keringésnek, melyet a cirkuláció mér nemcsak iránya és nagysága, hanem tengelye is van, azon görbe síkjának normálisa (ha van ilyen sík), melyen a cirkulációt számítjuk. Egy pont környezetében azonban a különböző síkokba eső örvénylés nagymértékben különbözhet. Például a  $v(x, y, z) = (f(y), 0, 0)$  függvény esetén nyilván annak alapján, amit a 2.8 Példában láttunk, az  $[xy]$  síkkal párhuzamos síkokban fekvő görbék esetén a cirkuláció sohasem nulla, de nyilván az  $[xz]$  síkkal párhuzamos síkokban (amelyek mindegyikében  $v$  egy-egy homogén síkvektortérnek tekinthető, hiszen ezen síkokban a függvény állandó) a cirkuláció nulla. Következésképp, a cirkuláció pontonkénti változatának is, ami nyilván áramlási tér esetén az anyag adott pontbeli örvénylését méri, van tengelye, tehát nem lehet csupán egy skalár, hanem olyan vektornak kell lennie, melynek egyenese az örvénylés tengelyét, iránya annak (jobbcsavar szerinti) irányát, nagysága pedig erősségét adja meg.

A másik különbség a forrassűrűség és a cirkuláció pontonkénti változata között az, hogy az örvénylés, mint valmely tengely körüli elfordulás, alapvetően *kétdimenziós* fogalom. Valóban, a tiszta örvénylés egy síkbeli elforgatás. A térbeli tengelykörüli forgatás is egy, a tengelyre merőleges (tehát az összes vektorra közös) síkban való elforgatás, és a valódi térbeli örvénylés, mint pl. valamely csavarvonal mentén való mozgás sem más mint egy síkbeli elforgatás és egy rá merőleges tengely mentén való eltolás kompozíciója. Tehát az elforgatás kétdimenziós fogalmának nincs természetes háromdimenziós általánosítása. Következésképp a cirkuláció pontonkénti változatát alapvetően csak a kétdimenziós esetre definiáljuk, a háromdimenziós változatot erre visszavezetve értelmezzük annak alapján, hogy az örvénysűrűség lineáris operáció és egy háromdimenziós vektorfüggvény örvénysűrűségének bármely koordinátatengely irányába eső komponensét csak a függvénynek erre a koordinátatengelyre merőleges koordinátasíkjába eső vetületének, mint egy kétdimenziós vektorfüggvénynek örvénysűrűsége határozza meg (hiszen a harmadik, a síkra merőleges tengelybe eső komponens nem szól bele egyetlen a síkba eső görbére vett görbementi integrálba sem). (Továbbá az egyszerűség kedvéért háromdimenzióban az örvénysűrűséget csak folytonossági pontokban értelmezzük és értékeinek csak véges mennyiségeket engedünk meg.) Magasabb dimenzióban egyáltalában nem vizsgáljuk a fogalmat.

## 2.9 Definíció

Legyen  $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^2$  tetszőleges nyílt halmaz,  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  folytonos  $G \setminus \{r_0\}$ -on. Ha az  $(F_k)$   $r_0$ -ra zsugorodó  $\mathbf{R}^2$ -beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozatára, melyre minden  $k \in \mathbf{N}$  esetén  $F_k \subseteq G$  határa a pozitívan irányított  $L_k$  görbe, a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} v \, dr$$

(véges vagy végtelen) határérték létezik és ugyanaz, akkor ezt a mennyiséget  $v$   $r_0$ -beli **örvénysűrűségének** nevezzük. Azt a függvényt, mely megadja  $v$  örvénysűrűségét minden olyan pontban, ahol létezik és véges,  $c(v)$ -vel jelöljük.

## 2.10 Definíció

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^3$  tetszőleges nyílt halmaz,  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  folytonos és legyen  $e = (e_1, e_2, e_3)$   $\mathbf{R}^3$  szokásos bázisa. Az  $e_n$  és  $e_m$  ( $n, m = 1, 2, 3$ ,  $n \neq m$ ) vektorok által kifeszített koordinátasíkkal párhuzamos  $S$  síkban a koordinátasíkba eső  $v' = v_n e_n + v_m e_m$  kétdimenziós vektorfüggvény ( $S$ -ben a harmadik változó konstans)  $C(v')$  **örvénysűrűség vektora** az a  $w$  vektor, mely merőleges  $S$ -re, hossza a  $v'$  függvény (mint az  $e_n$  és  $e_m$  által generált kétdimenziós lineáris térbeli vektorfüggvény)  $c'$  örvénysűrűségének abszolút értéke, iránya pedig olyan, hogy az  $e_n$ ,  $e_m$ ,  $\text{sign } c' \cdot w$  jobbsodrású rendszert alkotnak.

A  $c(v) = C(v_2, v_3) + C(v_3, v_1) + C(v_1, v_2)$  függvényt  $v$  **örvénysűrűségének** nevezzük.

**2.11 Példa** A 2.2 Példában szereplő vektorfüggvények  $r_0 = (x_0, y_0)$  pontbeli örvénysűrűségének meghatározása.

Természetesen eljárásunk a 2.2 Példában alkalmazottal analóg. Ha létezik forrassűrűség, akkor bármely  $r_0$ -ra zsugorodó normál térrész-sorozatára ugyanannyi lesz a definícióban szereplő határérték, tehát tekinthetünk egy koordinátatengelyekkel párhuzamos élű téglalapokból álló  $(F_k)$  térrész sorozatot, ahol

$$F_k = \{(x, y) : a_k \leq x \leq b_k, c_k \leq y \leq d_k\}, a_k \leq x_0 \leq b_k, c_k \leq y_0 \leq d_k$$

és

$$\lim_k (b_k - a_k) = \lim_k (d_k - c_k) = 0.$$

Felhasználva a 2.2 Példa eredményét, a  $v(x, y) = (f(x), 0)$  függvény esetén nyilván

$$c(v)|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} v \, dr = 0,$$

vagyis az  $r_0$ -beli cirkulációsűrűség, ha létezik, akkor nulla és persze ugyanígy a  $w(x, y) = (f(y), 0)$  függvény esetén

$$\begin{aligned} c(w)|_{r_0} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} w \, df = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} \cdot (f(c_k) - f(d_k))(b_k - a_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(c_k) - f(d_k)}{d_k - c_k} = -f'(y_0) \end{aligned}$$

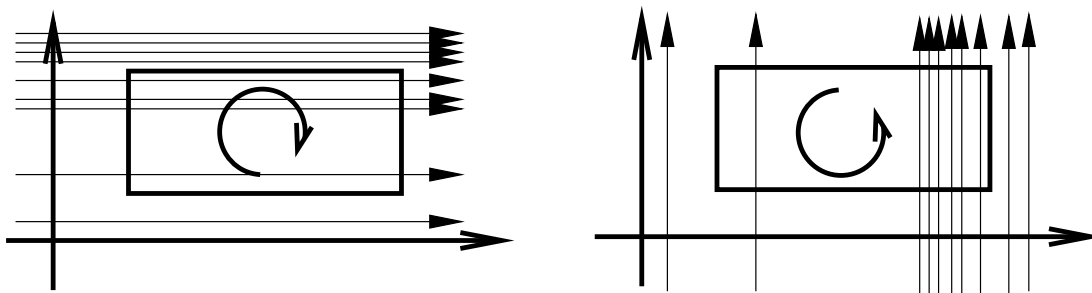
(feltéve, hogy  $f$  folytonosan deriválható  $r_0$  valamely környezetében). Ahogy eljárásunk és eredményeink is mutatják, nyilván a 2.6 Példa utáni, a forrassűrűséggel kapcsolatos megjegyzés analogonja igaz a cirkulációsűrűségre. Az ott elmondottak szellemében abból következően hogy – amint azt a példa is illusztrálja – természetesen a cirkulációsűrűség örökli a cirkuláció azon tulajdonságát, hogy az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra nem, csak az erre merőleges nagyságváltozásra érzékeny, könnyen megjósolható a

$$v_1 = (f(x, y), 0) \quad \text{és} \quad v_2 = (0, g(x, y)),$$

alakú vektorfüggvények cirkulációsűrűsége. Valóban, annak alapján, hogy  $v_1$  cirkulációsűrűségét (negatív előjellel) csak  $y$ -től való függése,  $v_2$ -ét pedig csak  $x$ -től való függése befolyásolja, azt várjuk (ami a 2.14 (1) példában alkalmazott eljárással analóg módon valóban bizonyítható is), hogy egy olyan nyílt halmazon ahol  $f$  és  $g$  folytonosan deriválhatóak

$$c(v_1) = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{és} \quad c(v_2) = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Arról is könnyen meggyőzhetjük magunkat, hogy a fenti összefüggésekben az előjelek is helyesek, hiszen, ahogy ábránk is illusztrálja,



egy pozitív, növekedő  $f$  függvény esetén az  $(f(y), 0)$  cirkulációja negatív, míg a  $(0, f(x))$  cirkulációja pozitív, hiszen az előbbi az óramutató járásával megegyező irányú, míg az utóbbi azzal ellenkező őrvenylést idéz elő. Ez nem is meglepő, hiszen a két függvény egymás tükörképei az  $y = x$  egyenesre vonatkozóan, egymásból az  $x$  és  $y$  tengelyek felcserélésével jönnek létre, a tükrözés pedig megfordítja a körüljárást. (Helyezzük egy tükört az ábrákon az  $y = x$  egyenesre a lap síkjára merőlegesen és a tükörben a másik ábrát kapjuk meg.)

Nos, a fentiek alapján – felhasználva, hogy mind az integrál, mind pedig a határérték lineáris homogén operáció – megadhatunk egy, a a síkbeli általános esetre vonatkozó állítást, melybe belefoglaljuk a 2.6 Példa után megfogalmazott, a forrassűrűségre vonatkozó gondolatmenetünk eredményét is:

## 2.12 Állítás

Ha a sík egy nyílt részhalmazán létezik a  $v$  vektorfüggvény forrassűrűsége,  $f$  és  $g$  itt folytonosan deriválható függvények és

$$v = (f(x, y), g(x, y)),$$

akkor itt

$$s(v) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{és} \quad c(v) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A következő fejezetben ezt az állítást lényegesen erősebb formában, a forrassűrűség létezésére vonatkozó elégséges feltétellel kiegészítve fogjuk bizonyítani.

A fent definiált két lokális, egy-egy pontot jellemző fogalmat, a forrás- ill. örvénysűrűséget globális változatukból a fluxus ill. örvénylés fogalmából vezettük le. Természetesen merül fel a kérdés, hogyan fordítható meg ez a viszony, megkaphatóak-e a globális fogalmak a lokálisakból, és ha igen hogyan. A kérdésre adott válasz két különböző informális gondolatmenettel is megsejthető.

Egyrészt, mivel a lokális fogalmakat az egyváltozós függvények deriváltjának analógiájára mintegy "térfogati derivált"-ként vezettük be, az analógiát folytatva, azt várhatjuk, hogy a megfordítás a térfogati integrálás lesz. Másrészt, mivel a szemléletes jelentésükkel kapcsolatban elmondottak alapján mindkét fent definiált lokális fogalom, a forrassűrűség és örvénysűrűség is valóban sűrűség-jellegű fogalom, nyilvánvalóan adódik a következtetés, hogy egyfelől egy adott térrész kifelelé irányított határfelületére vonatkozó fluxus, mint a felület által bezárt térrészen belüli *teljes* anyag- ill. erővonalváltozás nem más, mint az ezen mennyiség pontonkénti változásának, azaz *változás-sűrűségének* (és ez éppen a forrassűrűség) integrálja erre a térrészre; másfelől a cirkulációra nyilvánvalóan az ezzel analóg állítás igaz. Fogalmazzuk meg tehát sejtésünket.

## 2.13 Sejtés

(1) Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^n$  nyílt és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^n$  tetszőleges. Ha a  $V \subseteq G$   $n$ -dimenziós normál térrész határa az  $F$  kifele irányított valódi felület és  $V$ -n létezik a folytonos  $s(v)$  forrassűrűség, akkor

$$\int_F v \, df = \int_V s(v) \, dV.$$

(2) Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges. Ha az  $F \subseteq H$  kétdimenziós normál térrész határa az  $L$  pozitívan irányított görbe és  $F$ -en létezik a folytonos  $c(v)$  örvénysűrűség, akkor

$$\int_L v \, dr = \int_F c(v) \, dV$$

Nos, a következő fejezetet fenti sejtésünk helyességének igazolásával fogjuk kezdeni. A bizonyítás a vektoranalízis két központi tételéhez és a 2.12 Állítás egy erősebb változatához vezet majd.

Mielőtt azonban rátérnénk erre, egy lényeges általános megjegyzést kell tennünk. Viszszatekintve a fejezetben tárgyalt fogalmakra, nem lehet nem észrevenni, hogy egy sajátos kettősség érvényesül minden definícióban, példában, állításban: valamilyen értelemben mindegyiknek van egy-egy megfelelője. Ennek oka az, hogy a két integráltípus, továbbá azon fogalmak, melyeket ezek segítségével definiáltunk egy speciális, a szimmetriához hasonló viszonyban ún. **dualitás**ban vannak egymással, **duálisai** egymásnak. A dualitás azt jelenti, hogy a fogalmakból, melyek között fennáll, létrehozható egy olyan párosítás, hogy létezzen egy vagy több igaz állítás, melyekben kicserélve az összes a párosításban szereplő fogalmat a párjára, (esetleg a lényegét nem érintő kis változtatás után) újra igaz állítást kapjunk. (Ez utóbbit állítást az eredeti állítás duálisának szoktuk nevezni.) Például a síkgeometriában ilyen dualitás áll fenn a "pont" és az "egyenes" között a

két (nem azonos) *pont* egyértelműen meghatároz egy *egyenes*  
állításra vonatkozólag, hiszen a duális állítás, mely szerint

két (nem párhuzamos) *egyenes* egyértelműen meghatároz egy *pontot*  
is igaz. Hasonlóan, a logikában a "vagy"- és "és" logikai konnektívumpár és a "hamis"- "igaz" jelzőpár is ilyen viszonyban vannak. Valóban, mindkét alábbi mondat igaz:

$$p \text{ és nem } p \text{ mindig hamis} \quad \text{és} \quad p \text{ vagy nem } p \text{ mindig igaz}$$

Végül még egy példa az elektromos hálózatok elméletéből, ahol duális fogalom-párok a következők: soros-párhuzamos, rövidzár-szakadás, áram-feszültség, tekercs-kondenzátor. Valóban egyszerre igaz például az, hogy

*rövidzáron eső feszültség nulla és az, hogy szakadáson átfolyó áram nulla,*

vagy, hogy

*feszültségen lévő kondenzátor rövidzárásakor végtelen áram folyik*

és

*áram által átfolyt tekercs megszakításakor végtelen feszültség indukálódik.*

Nos, a bekezdés elején említett kettősséget pontosabban úgy lehet leírni, hogy a vonalmenti integrál-felületmenti integrál, fluxus-cirkuláció, forrassűrűség-örvénysűrűség fogalompárok elemei több lényeges összefüggésben duálisai egymásnak. Ezekhez további tárgyalásunk során még egy dualis fogalompár fog társulni.

Miután a vektorfüggvényeket jellemző összes lényeges alapfogalmat definiáltuk és megismerkedtünk ezek szemléletes jelentésével, a következő fejezetben részletesen megvizsgáljuk tulajdonságaikat és egymásközi viszonyukat. Mindezt a síkban fogjuk végrehajtani (ahogy sejtésünket is erre vonatkoztatva fogalmaztuk meg), itt ugyanis minden technikailag sokkal egyszerűbb, mint az általános esetben, jól követhető, szemléltethető és illusztrálható, ugyanakkor a sík a lényegét tekintve nem különbözik az általános esettől. Ez utóbbit röviden a következő utáni fejezetben foglaljuk össze.

## 2.14 Feladatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha a sík egy nyílt részhalmazán létezik a  $v = (f(x, y), 0)$  vektorfüggvény forrassűrűsége és  $f$  itt folytonosan deriválható függvény, akkor itt

$$s(v) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

(2) (a) Keressünk a felsoroltakon kívül más példákat dualitásra!

(b) Mutassunk az ebben a fejezetben vizsgált fogalmakra vonatkozó duális állítás-párokat!

# 3. Síkvektoranalízis

Ebben a fejezetben *kizárólag a síkra, azaz  $\mathbf{R}^2$ -re szorítkozva* vizsgáljuk az előző fejezetben definiált fogalmainkat és azok összefüggéseit (tehát ha semmi egyebet nem mondunk, akkor skalárfüggvényen mindig valamely kétváltozós függvényt, azaz a sík egy részhalmazán értelmezett valósértékű függvényt, míg vektorfüggvényen egy  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2, H \subseteq \mathbf{R}^2$  függvényt, azaz a sík egy részhalmazán értelmezett és a síkba képező függvényt értünk). Az előző fejezet 2.12 Állításában megjelenő mennyiségeket megvizsgálva eljutunk a vektoranalízis két központi fogalmához a divergenciához és rotációhoz, melyek a vektorfüggvényt jellemző eddig definiált fogalmak és a deriváltoperátor kapcsolatát írják le, továbbá megfogalmazzuk az ezeket jellemző két fundamentális tételt, a vektoranalízis ún. integrál- (vagy integrálatalakító) tételeit, a Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes tételt. Ezt követően az mutatjuk meg, hogyan lehet a divergenciát és a rotációt kiszámítani, megvizsgálunk két alapvető fizikai alkalmazást és kitérünk az integráltételek néhány következményére. Végül a primitív függvény fogalmát és a primitív függvénynek az eredeti függvénnyel való kapcsolatát leíró összefüggést általánosítjuk vektorfüggvényekre.

## 3.1 Divergencia

### 3.1.1 A deriváltoperátor skalárinvariánsa

A 2.12 Állításban felbukkanó a forrás- ill. örvénysűrűséget megadó kifejezések a deriváltoperátort jellemző nevezetes mennyiségek. Ebben a pontban az elsőt foglalkozunk, mely a deriváltoperátor szokásos bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege.

#### 3.1 Állítás

*Lineáris transzformáció mátrixában a főátló elemeinek összege független a bázistól.*

BIZONYÍTÁS. Csak a kétdimenziós esetet vizsgáljuk, az általános eset analóg. Legyen  $e$  és  $f$   $\mathbf{R}^2$  két bázisa,  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2)$  és

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{fe} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

( $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef}$  és  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{fe}$  az  $e$ -ről az  $f$ -re ill. az  $f$ -ről az  $e$ -re való áttérés mátrixai.)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_f = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{fe} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef},$$

így  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_f$  főátlóbeli elemeinek összege:

$$s_f = a_{11}(x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}) + a_{12}(x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21}) + a_{21}(x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22}) + a_{22}(x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22}).$$

Másrészt mivel  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{fe} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ , ahol  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$  az egységmátrix, így

$$x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} = x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} = 1 \quad \text{és} \quad x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} = x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} = 0$$

tehát

$$s_f = a_{11} + a_{22}.$$

#### 3.2 Definíció

Lineáris transzformáció mátrixában a főátlóbeli elemek összegét a transzformáció **skalárinvariánsának** nevezzük.

### 3.3 Definíció

A  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 1$  egész,  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  deriválható vektorfüggvény deriváltoperátorának skalárinvariánsát  $v$  **divergenciájának** nevezzük és  $\operatorname{div} v$ -vel jelöljük, tehát speciálisan kétdimenziós esetben, ha  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  deriválható vektorfüggvény, melynek komponensei  $v_1$  és  $v_2$ , azaz  $v = (v_1, v_2)$ , akkor

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

#### 3.1.2 Divergencia és fluxus, divergencia és forrassűrűség

A divergencia fogalmának segítségével hozzáfoghatunk a 2.13 Sejtés bizonyításához. Ez a sejtés felfogható úgy, mint egy, a felületmenti és térfogati integrálok közötti összefüggést megadó állítás. Bizonyításához először normáltartományok esetén vizsgáljuk meg a felületi és térfogati integrál közötti kapcsolatot.

### 3.4 Lemma

Legyen  $V$  tetszőleges kétdimenziós térrész, melynek határa a kifelé irányított  $F$  valódi felület és  $h$  tetszőleges  $V$ -n folytonosan deriválható kétváltozós függvény.

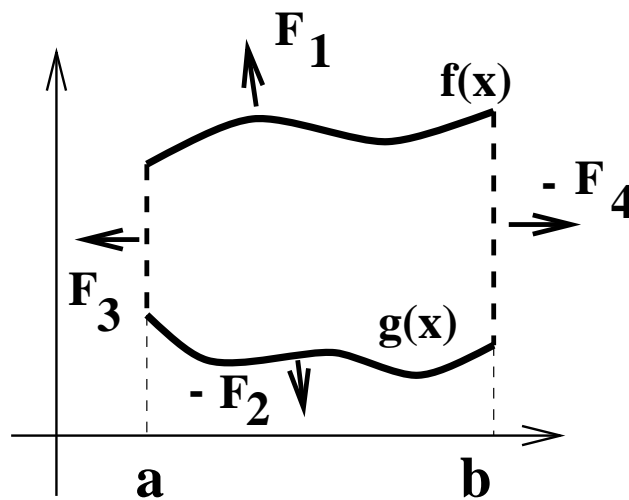
(1) Ha  $V$  az  $x$  tengelyre vonatkoztatva reguláris normáltartomány, akkor

$$\int_F (0, h) df = \int_V \frac{\partial h}{\partial y} dV$$

(2) Ha  $V$  az  $y$  tengelyre vonatkoztatva reguláris normáltartomány, akkor

$$\int_F (h, 0) df = \int_V \frac{\partial h}{\partial x} dV$$

BIZONYÍTÁS. Csak (1)-et bizonyítjuk, nyilván (2) teljesen analóg. A reguláris normáltartománynak az 1.25 (1) definícióban megadott meghatározása szerint vannak olyan  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$  számok és  $f, g \in \dot{C}_1[a, b]$  függvények, hogy  $f(x) < g(x)$  minden  $x \in (a, b)$  esetén és  $V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ .



Legyenek

$$\begin{aligned} F_1 \text{ az } r_1(x) &= (x, f(x)), x \in [a, b], \\ F_2 \text{ az } r_2(x) &= (x, g(x)), x \in [a, b], \\ F_3 \text{ az } r_3(x) &= (a, y), y \in [g(a), f(a)] \text{ és} \\ F_4 \text{ az } r_4(x) &= (b, y), y \in [g(b), f(b)] \end{aligned}$$

által definiált egydimenziós felületek, továbbá legyen  $F \subset V$  kifele irányított határa. ( $F_3$ -at és  $F_4$ -et természetesen csak akkor definiáljuk ha  $g(a) < f(a)$  ill.  $g(b) < f(b)$ .)

A szokásos módon az integrálnak a normáltartományok határain való additívitasát használva (lásd az 1.26 (15) (b) vagy az 1.26 (17) feladatot) adódik, hogy

$$\int_F (0, h) df = \int_{F_1} (0, h) df - \int_{F_2} (0, h) df + \int_{F_3} (0, h) df - \int_{F_4} (0, h) df,$$

ahol  $g(a) = f(a)$  esetén a harmadik,  $g(b) = f(b)$  esetén a negyedik tag hiányzik. ( $F_2$  és  $F_4$  azért szerepelnek negatív előjellel, mert  $-F_2$  és  $-F_4$  vannak  $V$ -ből kifele irányítva, ami szemléletesen is jól látható, hiszen például (ahol létezik)  $r'_2(x) = (1, g'(x))$  miatt a térrész "alsó" határának,  $-F_2$ -nek irányítása  $-\text{CROSS}(r'_2) = -(-g'(x), 1)$ , aminek második komponense  $-$  lévén negatív  $-$  az alsó felsíkba, tehát a térrészből valóban kifele mutat.)

$(0, h)$ -nak csak  $y$  irányú komponense van, így mindenütt merőleges  $F_3$  és  $F_4$  normálisaira, tehát

$$\int_{F_3} v df = \int_{F_4} v df = 0.$$

(Valóban, például  $r'_3(x) = (0, 1)$ , így  $\text{CROSS}(r'_3) = (-1, 0)$  amivel

$$\int_{F_3} v df = \int_{g(a)}^{f(a)} (0, h(a, y)) \cdot (-1, 0) dy = \int_{g(a)}^{f(a)} 0 dy = 0.)$$

Ami a másik két integrált illeti, a felületmenti integrál definícióját alkalmazva könnyen kiszámíthatóak. Felhasználva, hogy  $r'_1(x) = (1, f'(x))$ , tehát  $\text{CROSS}(r'_1) = (-f'(x), 1)$ , az első integrálra a következő adódik:

$$\begin{aligned} \int_{F_1} (0, h) df &= \int_a^b (0, h(x, f(x))) \cdot \text{CROSS}(r'_1) dx = \\ &= \int_a^b (0, h(x, f(x))) \cdot (-f'(x), 1) dx = \int_a^b h(x, f(x)) dx. \end{aligned}$$

Ugyanígy a második integrál:

$$\begin{aligned} \int_{F_2} (0, h) df &= \int_a^b (0, h(x, g(x))) \cdot \text{CROSS}(r'_2) dx = \\ &= \int_a^b (0, h(x, g(x))) \cdot (-g'(x), 1) dx = \int_a^b h(x, g(x)) dx. \end{aligned}$$

Mindezekből (felhasználva  $h$  folytonos deriválhatóságát) a Newton-Lebniz formula és a kettős integrálnak kétszeres integrállá való átalakítására vonatkozó összefüggés segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_F (0, h) df &= \int_{F_1} (0, h) df - \int_{F_2} (0, h) df = \int_a^b h(x, f(x)) dx - \int_a^b h(x, g(x)) dx = \\ &= \int_a^b (h(x, f(x)) - h(x, g(x))) dx = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{f(x)} h_y(x, y) dy \right) dx = \int_V \frac{\partial h}{\partial y} dV. \end{aligned}$$

A most bizonyított összefüggés segítségével bebizonyíthatjuk a vektoranalízis egyik központi tételét, mely a divergencia és a fluxus viszonyát írja le:

### 3.5 Tétel ((Síkbeli) Gauss-Osztrogradszkij tétel)

Ha  $V$  kétdimenziós normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított valódi felület,  $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges  $V$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_F v df = \int_V \text{div } v dV$$

BIZONYÍTÁS. A  $V$  normál térrész lefedhető a  $V_1, V_2, \dots, V_n$  normáltartományokkal az 1.25 Definícióban szereplő módon, tehát a kétszeres integrál additivitása miatt:

$$(1) \quad \int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \operatorname{div} v \, dV.$$

Minden  $V_i$ -re alkalmazható a 3.4 Lemma, azaz

(2) minden  $1 \leq i \leq n$ -re fennáll, hogy

$$\int_{F_i} v \, df = \int_{F_i} (v_1, 0) \, df + \int_{F_i} (0, v_2) \, df = \int_{V_i} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dV = \int_{V_i} \operatorname{div} v \, dV,$$

ahol  $F_i$   $V_i$  kifelé irányított határa. Felhasználva a felületmenti integrálnak a normáltartományok határain való additivitását (lásd például az 1.26 (17) feladatot) kapjuk, hogy

$$(3) \quad \int_{F_i} v \, df = \sum_{j=1}^{n(i)} \int_{F_{ij}} v \, df \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n\text{-re,}$$

ahol  $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{in(i)}$  a  $V_i$ -t határoló kifelé irányított koordinátafelületek. (1), (2) és (3)-ból

$$(4) \quad \int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} v \, df = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n(i)} \int_{F_{ij}} v \, df = \sum_{k=1}^m \int_{G_k} v \, df,$$

ahol  $G_1, G_2, \dots, G_m$   $F$ -nek  $V$ -ből kifelé irányított koordinátafelületekből álló lefedése, hiszen az 1.25 Definíció alapján azon  $F_{ij}$ -n vett integrálok, melyek nem esnek  $F$ -re, kétszer ellenkező előjellel szerepelnek a fenti összegben és így kiesnek, a többiek pedig kifelé irányítva lefedik  $F$ -et. Tehát a felületmenti integrálnak a normál térrészek határain való additivitását felhasználva (1.26 (15)(b) feladat):

$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{k=1}^m \int_{G_k} v \, df = \int_F v \, df,$$

és ez az, amit bizonyítani akartunk.

Mivel normál térrész határának nem kell okvetlenül felületnek lennie, lehet éppen véges sok felület egyesítése is (példáuk a körgyűrű ilyen), a a fenti bizonyítás árnyalatnyi módosításával a fenti tételnek egy általánosabb alakját nyerhetjük:

**3.6 Tétel** (Általánosított (síkbeli) Gauss-Osztrogradszkij tétel)

*Ha  $V$  kétdimenziós normál térrész és a kifelé irányított  $G_1, G_2, \dots, G_n$  páronként diszjunkt zárt valódi felületek  $V$  határának egy lefedését alkotják, továbbá  $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges  $V$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor*

$$\sum_{i=1}^n \int_{G_i} v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás megegyezik a Gauss-Osztrogradszkij tétel fenti bizonyításával egészen (4)-ig, tehát

$$(4^*) \quad \int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{k=1}^m \int_{F_k} v \, df,$$

ahol  $F_1, F_2, \dots, F_m$   $V$  határának  $V$ -ből kifelé irányított koordinátafelületekből való lefedése. Az 1.26 (15)(a) feladat alapján  $F_1, F_2, \dots, F_m$ -ből kiválasztható  $G_i$  egy lefedése az összes  $1 \leq i \leq m$  esetén. Minden ilyen lefedésben különböző elemek szerepelnek, hiszen a lefedett halmazok diszjunktak, tehát feltehető, hogy  $F_1, F_2, \dots, F_m$  úgy van felsorolva, hogy  $G_1$  lefedése  $F_1, F_2, \dots, F_{m_1}$ ,  $G_2$  lefedése  $F_{m_1+1}, F_{m_1+2}, \dots, F_{m_1+m_2}$  és így tovább, végül  $G_n$  lefedése  $F_{m-m_k}, F_{m-m_k+1}, \dots, F_m$ , tehát a szokásos módon a felületmenti integrálnak a normál térrészek határain való additivitását felhasználva (1.26 (15)(b) feladat):

$$\sum_{k=1}^m \int_{F_k} v \, df = \sum_{i=1}^n \int_{G_i} v \, df,$$

amiből (4\*)-gal adódik a bizonyítandó állítás.

A Gauss-Osztrogradskij tétel tulajdonképpen a divergencia és a forrassűrűség közti viszony leírásának ún. **integrális alakja**. Ebből az integrál tulajdonságainak felhasználásával megkapjuk a fenti viszony leírásának **differenciális alakját**, mely azon kívül, hogy igazolja a 2.12 Állításban szereplő, a forrassűrűséget megadó formula helyességét, elégséges feltétel is ad a forrassűrűség létezésére:

### 3.7 Következmény (Divergencia = forrassűrűség)

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges  $G$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor  $G$ -n létezik  $v$ -nek  $s(v)$  forrassűrűsége és fennáll, hogy

$$s(v) = \operatorname{div} v.$$

BIZONYÍTÁS. Az integrál tulajdonságaiból következik az alábbi egyszerű tény :

(\*) Ha  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt,  $w$   $G$ -n folytonos kétváltozós függvény,  $r_0 \in G$  és  $(V_k)$   $r_0$ -ra zsugorodó normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden  $k \in \mathbf{N}$  esetén  $V_k \subseteq G$ , akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} w \, dV = w(r_0).$$

Valóban, legyen  $k \in \mathbf{N}$ . Mivel  $V_k$  zárt (lásd az 1.26 (4)(a) feladatot) és korlátos halmaz, továbbá  $w \in C(V_k)$ , léteznek az

$$M_k = \max_{r \in V_k} w(r) \quad \text{és az} \quad m_k = \min_{r \in V_k} w(r)$$

mennyiségek. Ezekkel egyrészt persze  $m_k \leq w(r_0) \leq M_k$ , másrészt (az 1.22 (1)(d)-ből adódó)

$$m_k \cdot |V_k| \leq \int_{V_k} w \, dV \leq M_k \cdot |V_k| \quad \text{miatt} \quad m_k \leq \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} w \, dV \leq M_k.$$

Így

$$\left| \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} w \, dV - w(r_0) \right| \leq M_k - m_k \xrightarrow{k} 0, \quad \text{hiszen} \quad w \in C(V_k) \quad \text{és} \quad d(V_k) \xrightarrow{k} 0.$$

Ezek után, a Gauss-Osztrogradskij tétel alapján (\*)-ot a  $w(r) = \operatorname{div} v(r)$  függvényre alkalmazva, a forrassűrűség definíciójában szereplő feltételek esetén az ottani jelölésekkel (most persze  $n = 2$ ), azt kapjuk, hogy

$$s(v)|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} v \, df = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} \operatorname{div} v \, dV = \operatorname{div} v|_{r_0}.$$

## 3.2 Rotáció

### 3.2.1 A deriváltoperátor vektorinvariánsa

Most áttérünk a 2.12 Állításban megjelenő, az örvénysűrűséget megadó kifejezésnek a deriválttenzor jellemzésében betöltött szerepéhez.

### 3.8 Állítás

$\mathbf{R}^2$  tetszőleges  $\mathbf{A}$  antiszimmetrikus lineáris transzformációjához van egyetlen olyan  $c \in \mathbf{R}$  skalár, hogy

$$\mathbf{A} r = c \operatorname{CROSS}(r)$$

tetszőleges  $r \in \mathbf{R}^2$  esetén. Ez a skalár  $\mathbf{A}$  tetszőleges jobbsodrású orthonormált bázisbeli mátrixában a második sor első eleme.

BIZONYÍTÁS. Az egyértelműség nyilvánvaló.  $\mathbf{R}^2$  tetszőleges  $e$  jobbsodrású orthonormált bázisa és bármely  $r \in \mathbf{R}^2$  esetén valamely valós  $a$ -ra

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

így, ha  $r = xe_1 + ye_2$ , akkor

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}}r_e &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e r_e = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= a \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = a \cdot \underline{\underline{\text{CROSS}}}(r)_e = \underline{\underline{a \text{ CROSS}}}(r)_e, \end{aligned}$$

amiből

$$\mathbf{A}r = a \text{ CROSS}(r) \quad \text{minden } r \in \mathbf{R}^2 \text{ esetén.}$$

### 3.9 Megjegyzés

Az állítás szerint tehát: skalár erejéig CROSS a sík egyetlen antiszimmetrikus lineáris transzformációja.

A most következő definícióban szereplő elnevezés furcsaságát – amint azt később látni fogjuk – a fogalom háromdimenziós megfelelője magyarázza.

### 3.10 Definíció

Legyen  $\mathbf{A} \mathbf{R}^2$  tetszőleges lineáris transzformációja. Azt a 3.8 Állításban szereplő  $a \in \mathbf{R}$  skalárt, mely  $\mathbf{A}$  antiszimmetrikus részéhez tartozik,  $\mathbf{A}$  **vektorinvariáns**ának nevezzük.

A vektorinvariáns ugyan nem vektor, de a 3.8 Állítás alapján legalább tényleg invariáns, amennyiben nem függ a bázistól, hiszen magát a deriváltoperátort jellemzi.

### 3.11 Definíció

Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  deriválható vektorfüggvény. A  $v$  deriváltoperátora vektorinvariánsának kétszeresét  $v$  **rotáció**jának nevezzük és  $\text{rot } v$ -vel jelöljük.

### 3.12 Állítás

Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  deriválható vektorfüggvény, melynek komponensei  $v_1$  és  $v_2$ , azaz  $v = (v_1, v_2)$ . Ekkor

$$\text{rot } v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

BIZONYÍTÁS.  $\mathbf{R}^2$  szokásos  $e$  bázisában a  $\mathbf{D}$  deriváltoperátor antiszimmetrikus részének mátrixa a következő:

$$\frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{D}}}_e - \underline{\underline{\mathbf{D}}}_e^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

A rotáció (definíciója alapján) a vektorinvariáns kétszerese, ez pedig a 3.8 Állítás alapján a fenti mátrixban a második sor első eleme, így a rotáció ezen mátrixban a második sor első elemének kétszerese, és pont ezt akartuk bizonyítani.

### 3.2.2 Rotáció és cirkuláció, rotáció és örvénysűrűség

A síkban a felületmenti- és görbementi integrálok közötti összefüggést felhasználva a Gauss-Osztrogradszkij tételből megkaphatjuk annak görbementi integrálra vonatkozó megfelelőjét, a vektoranalízis másik központi tételét, mely a rotáció és vonalintegrál kapcsolatát írja le:

#### 3.13 Tétel (Síkbeli) Stokes-tétel)

Ha  $F$  kétdimenziós normál térrész, melynek határa a pozitívan irányított  $L$  görbe,  $F \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges  $F$ -en folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_L v \, dr = \int_F \operatorname{rot} v \, dV$$

BIZONYÍTÁS. Mivel ha  $v = (v_1, v_2)$ , akkor

$$\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(v) = \operatorname{div}(-v_2, v_1) = -\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

így az 1.24 Megjegyzés alapján a Gauss-Osztrogradszkij tételből és a 3.12 Állításból azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_L v \, dr &= - \int_L \operatorname{CROSS}(v) \, df = - \int_F \operatorname{div} \operatorname{CROSS}(v) \, dV = \\ &= \int_F \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dV = \int_F \operatorname{rot} v \, dV \end{aligned}$$

Nyilván a tétel egy általánosabb formában adódik a Gauss-Osztrogradszkij tétel általánosabb alakjából.

#### 3.14 Tétel (Általánosított (síkbeli) Stokes-tétel)

Ha  $F$  kétdimenziós normál térrész és a pozitívan irányított  $G_1, G_2, \dots, G_n$  páronként diszjunkt zárt görbék  $V$  határának egy lefedését alkotják, továbbá  $F \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges  $F$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\sum_{i=1}^n \int_{G_i} v \, dr = \int_F \operatorname{rot} v \, dV$$

A vektorfüggvények jellemzései közti, az integrális alakokra vonatkozó analógia fennáll a differenciális alakokra is. A Stokes tételből, a cirkuláció és az örvénysűrűség közti viszony integrális alakjából megkaphatjuk ennek az összefüggésnek a differenciális alakját is pontosan ugyanolyan módon, ahogy fent, a 3.7 Következményben a divergencia és forrás-sűrűség esetén tettük:

#### 3.15 Következmény (Cirkuláció = örvénysűrűség)

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  tetszőleges  $G$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor  $G$ -n létezik  $v$ -nek  $c(v)$  örvénysűrűsége és fennáll, hogy

$$c(v) = \operatorname{rot} v.$$

A Gauss-Osztrogradszkij tétel és a Stokes tételt együttesen a vektoranalízis (fő) **integráltételeinek** vagy **integrálátalakító tételeinek** szokás nevezni.

Az alábbi példában néhány egyszerű esetre alkalmazzuk az integráltételeket.

#### 3.16 Példa

Tekintsük a síkban az origóközpontú  $R$  sugarú körvonalat mint egy síkbeli kifelé irányított valódi  $F$  felületet (síkbeli gömbhéjat) és ugyanezt a körvonalat, mint egy  $L$  pozitívan irányított görbét. Számítsuk ki az

$$\int_F v \, df \quad \text{és az} \quad \int_L v \, dr$$

integrálokat az alábbi vektorfüggvényekre:

- (a)  $v(x, y) = (x, y)$
- (b)  $v(x, y) = (x, -y)$
- (c)  $v(x, y) = (y, x)$
- (d)  $v(x, y) = (y, -x)$

*Megoldás.* A megoldás során a Gauss-Osztrogradszkij tételt és a Stokes tételt fogjuk használni, továbbá ellenőrzésképpen kiszámítjuk az integrált a definíció alapján és néhány esetben a felületmenti ill. görbementi integrált felszín szerinti ill. ívhossz szerinti integrálszámításra visszavezető, az 1.22 (2) Állításban szereplő formula alapján is. Az ellenőrzéshez szükségünk lesz  $F$  és  $L$  egyenleteire is. Jelöljük az  $F$  által határolt térrészt, az origóközéppontú  $R$  sugarú körlemez  $V$ -vel.

$$F \text{ egyenlete: } r = r(t) = (R \sin t, R \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\text{Így } \dot{r}(t) = (R \cos t, -R \sin t)$$

$$\text{és } \text{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R \sin t, R \cos t).$$

(Ha ezzel az egyenlettel definiáljuk  $F$ -et, akkor valóban kifelé irányított lesz, hisz ha  $p(\delta) = r(t) + \delta \cdot \text{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R(1 + \delta) \sin t, R(1 + \delta) \cos t)$ , akkor  $|p(\delta)|^2 = R^2(1 + \delta)^2 > R^2$ , tehát  $p(\delta) \notin V = \{r \in \mathbf{R}^2 : |r|^2 \leq R^2\}$  minden  $\delta > 0$  esetén.)

$$L \text{ egyenlete: } s = s(t) = (R \cos t, R \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\text{Így } \dot{s}(t) = (-R \sin t, R \cos t),$$

$$\text{és } \text{CROSS}(\dot{s}(t)) = -(R \cos t, R \sin t).$$

(Ha ezzel az egyenlettel definiáljuk  $L$ -et, akkor valóban pozitívan irányított lesz, mert pontosan ugyanúgy, ahogy az előbb, belátható, hogy  $-L$   $V$ -ből kifelé irányított, hiszen  $-\text{CROSS}(\dot{s}(t)) = (R \cos t, R \sin t)$ , így ha  $p(\delta) = s(t) + \delta \cdot -\text{CROSS}(\dot{s}(t)) = (R(1 + \delta) \cos t, R(1 + \delta) \sin t)$ , akkor  $|p(\delta)|^2 = R^2(1 + \delta)^2 > R^2$ .)

(a)  $v(x, y) = (x, y)$

$$\text{div } v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2 \quad \text{és} \quad \text{rot } v = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \quad \text{így}$$

$$\int_F v \, df = \int_V \text{div } v \, dV = \int_V 2 \, dV = 2 \int_V dV = 2|V| = 2R^2\pi,$$

$$\int_L v \, dr = \int_V \text{rot } v \, dV = \int_V 0 \, dV = 0.$$

ELLENŐRZÉS.

$$\begin{aligned} (1) \quad v(r(t)) \cdot \text{CROSS}(\dot{r}(t)) &= r(t) \cdot \text{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R \sin t, R \cos t) \cdot (R \sin t, R \cos t) = \\ &= R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2 \quad \text{és} \quad v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = s(t) \cdot \dot{s}(t) = (R \sin t, R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) = \\ &= R^2(\sin^2 t - \cos^2 t) = -R^2 \cos 2t \quad \text{tehát} \end{aligned}$$

$$\int_F v \, df = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \text{CROSS}(\dot{r}(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} R^2 \, dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = R^2 2\pi = 2R^2\pi,$$

$$\int_L v \, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \, dt = - \int_0^{2\pi} R^2 \cos 2t \, dt = R^2 \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

(2)  $F$  minden pontjában  $F$   $n$  normálisa  $v(r) = r$  irányú, így  $v$   $n$ -re eső vetülete  $v_n = |v| = |r|$ , továbbá  $F$ -n  $|r| = R$ , tehát  $F$ -en  $v_n = R$ . Így

$$\int_F v \, df = \int_F v_n \, |df| = \int_F |r| \, |df| = \int_F R \, |df| = R \int_F |df| = R|F| = R \cdot 2R\pi = 2R^2\pi.$$

Másrészt  $L$  minden pontjában  $L$  érintője merőleges a  $v(r) = r$  függvényre, így  $v$  érintőre eső  $v_e$  vetülete nulla, azaz

$$\int_L v \, dr = \int_L v_e \, |dr| = \int_L 0 \, |dr| = 0.$$

(b)  $v(x, y) = (x, -y)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial -y}{\partial y} = 1 - 1 = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial -y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \quad \text{így}$$

$$\int_F v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_V 0 \, dV = 0,$$

$$\int_L v \, dr = \int_V \operatorname{rot} v \, dV = \int_V 0 \, dV = 0.$$

ELLENŐRZÉS.

$v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R \sin t, -R \cos t) \cdot (R \sin t, R \cos t) = R^2(\sin^2 t - \cos^2 t) = -R^2 \cos 2t$  és  
 $v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = s(t) \cdot \dot{s}(t) = (R \cos t, -R \sin t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) = -R^2(\cos t \sin t + \sin t \cos t) = -R^2 \sin 2t$   
 tehát

$$\int_F v \, df = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) \, dt = - \int_0^{2\pi} R^2 \cos 2t \, dt = R^2 \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_L v \, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \, dt = - \int_0^{2\pi} R^2 \sin 2t \, dt = R^2 \frac{\cos 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

(c)  $v(x, y) = (y, x)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = 1 - 1 = 0 \quad \text{így}$$

$$\int_F v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_V 0 \, dV = 0,$$

$$\int_L v \, dr = \int_V \operatorname{rot} v \, dV = \int_V 0 \, dV = 0.$$

ELLENŐRZÉS.

$v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R \cos t, R \sin t) \cdot (R \sin t, R \cos t) = R^2(\cos t \sin t + \sin t \cos t) = R^2 \sin 2t$  és  
 $v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = s(t) \cdot \dot{s}(t) = (R \sin t, R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) = R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = R^2 \cos 2t$  tehát

$$\int_F v \, df = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} R^2 \sin 2t \, dt = -R^2 \frac{\cos 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_L v \, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \, dt = \int_0^{2\pi} R^2 \cos 2t \, dt = R^2 \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

(d)  $v(x, y) = (y, -x)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial -x}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial -x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = -1 - 1 = -2 \quad \text{így}$$

$$\int_F v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_V 0 \, dV = 0,$$

$$\int_L v \, dr = \int_V \operatorname{rot} v \, dV = \int_V -2 \, dV = -2 \int_V dV = -2|V| = -2R^2\pi.$$

ELLENŐRZÉS.

(1)  $v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R \cos t, -R \sin t) \cdot (R \sin t, R \cos t) = R^2(\cos t \sin t - \sin t \cos t) = 0$  és  
 $v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = s(t) \cdot \dot{s}(t) = (R \sin t, -R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) = R^2(-\sin^2 t - \cos^2 t) = -R^2$  tehát

$$\int_F v \, df = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0,$$

$$\int_L v \, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \, dt = - \int_0^{2\pi} R^2 \, dt = -R^2 \int_0^{2\pi} dt = -R^2 2\pi = -2R^2\pi.$$

(2) Mivel  $v(x, y) \cdot (x, y) = (y, -x) \cdot (x, y) = yx - xy = 0$ , így  $v(r) \cdot r = 0$ , azaz a  $v = v(r)$  függvény mindenütt merőleges az  $r$  helyvektorra. Azonban  $F$  minden pontjában  $F$   $n$  normálisa pont  $r$  irányú, így  $v$   $n$ -re eső vetülete  $v_n$   $F$  minden pontjában nulla, tehát

$$\int_F v \, df = \int_F v_n |df| = \int_F 0 |df| = 0.$$

Másrészt  $L$  minden pontjában  $L$  érintője pontosan  $v$  egyenesébe esik és azzal ellentétes irányú ( $\dot{s}(t) = (-R \sin t, R \cos t) = (-y, x)|_{s(t)} = -(y, -x)|_{s(t)} = -v(s(t))$ ), így  $v$ -nek az  $L$  érintőjére eső  $v_e$  vetülete:  $v_e = -|v|$ , továbbá  $L$ -en mindenütt  $|v| = R$ , tehát

$$\begin{aligned} \int_L v \, dr &= \int_L v_e |dr| = - \int_L |v| |dr| = - \int_L R |dr| = -R \int_L |dr| = \\ &= -R|L| = -R \cdot 2R\pi = -2R^2\pi. \end{aligned}$$

### 3.3 Vektorfüggvények jellemzőinek számítása

Az alábbiakban, ha mást nem mondunk,  $u$  mindig differenciálható skalárfüggvényt,  $v$  pedig differenciálható vektorfüggvényt jelöl.

#### a. A nabla operátor

Ahhoz, hogy bizonyos összefüggéseket tömör formában írassunk fel, célszerű egy speciális rövidített írásmódot alkalmazni, melyben a

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

szimbólum, egy formális, matematikai jelentés nélküli "vektor" szerepel. Ezzel, az ún. **nabla vektorral** (vagy **nabla operátorral**) végzett formális műveletek segítségével könnyen leírhatók és megjegyezhetőek bizonyos képletek. Így

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \operatorname{rot} v &= -\nabla \cdot \operatorname{CROSS}(v) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ \operatorname{grad} u &= \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

#### b. Az invariánsok és a gradiens lineáris operátorok

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(c_1 v_1 + c_2 v_2) &= c_1 \operatorname{div} v_1 + c_2 \operatorname{div} v_2 \\ \operatorname{rot}(c_1 v_1 + c_2 v_2) &= c_1 \operatorname{rot} v_1 + c_2 \operatorname{rot} v_2 \\ \operatorname{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) &= c_1 \operatorname{grad} u_1 + c_2 \operatorname{grad} u_2 \end{aligned}$$

Ezek az összefüggések nyilvánvaló következményei annak, hogy a deriválás lineáris operátor.

### c. Szorzatfüggvény invariánsai és gradiense

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u v) &= u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u \\ \operatorname{rot}(u v) &= u \operatorname{rot} v - \operatorname{CROSS}(v) \cdot \operatorname{grad} u \\ \operatorname{grad}(u_1 u_2) &= u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1\end{aligned}$$

Valóban,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u v) &= \frac{\partial}{\partial x}(u v)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(u v)_2 = \frac{\partial}{\partial x}(u v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(u v_2) = \\ &= v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v_2}{\partial y} = \\ &= u \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + (v_1, v_2) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(u v) &= \frac{\partial}{\partial x}(u v)_2 - \frac{\partial}{\partial y}(u v)_1 = \frac{\partial}{\partial x}(u v_2) - \frac{\partial}{\partial y}(u v_1) = \\ &= v_2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v_1}{\partial y} = \\ &= u \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - (-v_2, v_1) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u \operatorname{rot} v - \operatorname{CROSS}(v) \cdot \operatorname{grad} u.\end{aligned}$$

Végül

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(u_1 u_2) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_2), \frac{\partial}{\partial y}(u_1 u_2) \right) = \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x}, u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \\ &= u_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + u_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1\end{aligned}$$

### d. Divergencia és rotáció kapcsolata

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v &= \operatorname{rot} \operatorname{CROSS}(v) \\ \operatorname{rot} v &= -\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(v)\end{aligned}$$

Valóban,

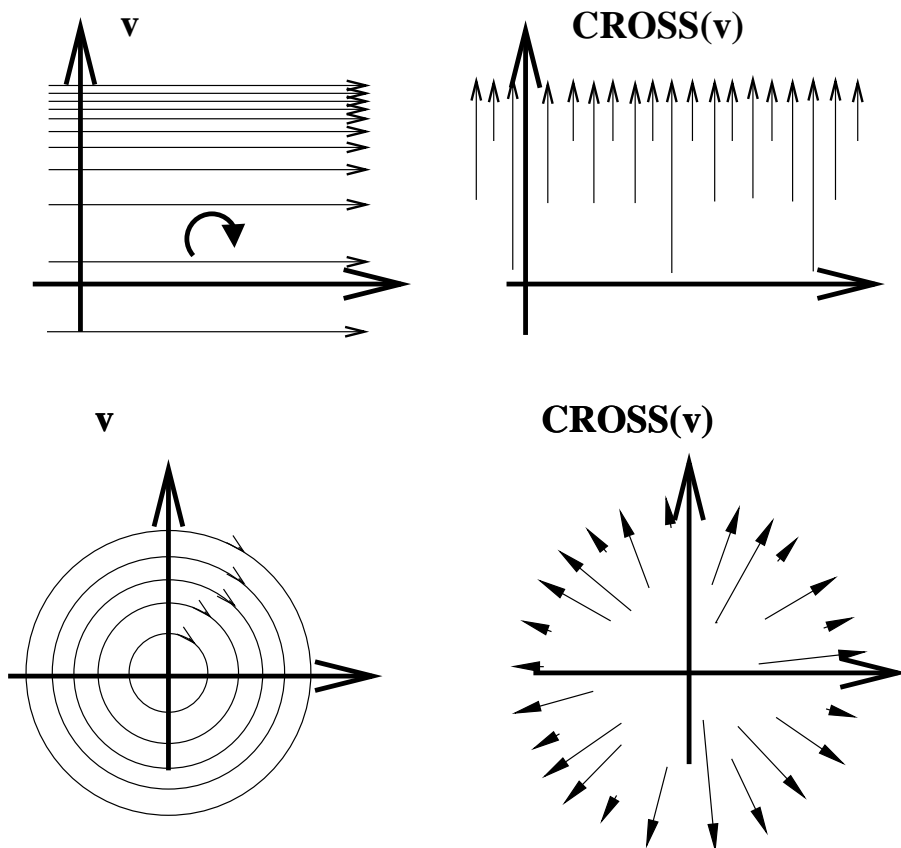
$$\begin{aligned}\operatorname{rot} v &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \operatorname{div}(v_2, -v_1) = \operatorname{div}(-\operatorname{CROSS}(v)) = -\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(v) \quad \text{és} \\ \operatorname{div} v &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \operatorname{rot}(-v_2, v_1) = \operatorname{rot} \operatorname{CROSS}(v).\end{aligned}$$

*Megjegyzés.*

A fenti összefüggések segítik megvilágítani a síkban a divergencia és rotáció jelentését és a két fogalom viszonyát. Az alábbiakban két példán illusztráljuk ezt a kapcsolatot.

(1)  $v = (f(y), 0)$ ,  $f$  pozitív monoton növvő. Ekkor  $\operatorname{CROSS}(v) = (0, f(y))$  (lásd az első ábrát a túloldalon).  $v$  rotációját az okozza, hogy  $v$  nagysága irányára merőlegesen változik és ugyanezért, ugyanilyen mértékben  $\operatorname{CROSS}(v)$  ( $v$ -vel megegyező) nagysága  $\operatorname{CROSS}(v)$  irányában változik, ami  $\operatorname{CROSS}(v)$  divergenciáját okozza. Tehát  $\operatorname{CROSS}(v)$  divergenciájának arányosnak kell lennie  $v$  rotációjával. Hasonlóan indokolható  $v$  divergencia- és  $\operatorname{CROSS}(v)$  rotációmentességének összefüggése.

(2)  $v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y, -x)$ . Ekkor  $\operatorname{CROSS}(v) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$  (lásd a második ábrát a túloldalon).  $v$  erővonalai koncentrikus körök, mert  $v$  minden  $r$  pontban  $v(r)$  merőleges  $r$ -re hiszen  $v(r) \parallel (y, -x)$ ,  $r = (x, y)$  és  $((y, -x) \cdot (x, y) = 0$ . Az erővonalak sűrűsége állandó, mert  $v$  nagysága állandó ( $|v| = 1$ ).



$v$  rotációjának az az oka, hogy  $v$  nagysága állandó és erővonalai görbülnek. Ez pont azt jelenti, hogy  $\text{CROSS}(v)$ -nek a  $v$ -re merőleges erővonalai a görbülés mértékében széttartanak, így ahhoz, hogy sűrűségük nagysága állandó lehessen (mert  $|\text{CROSS}(v)| = |v| = 1$ ), az kell, hogy az erővonalak irányában a széttartás mértékével arányosan új erővonalak eredjenek, tehát, hogy  $\text{CROSS}(v)$  divergenciája arányos legyen erővonalai széttartásának, azaz  $v$  erővonalai görbültségének mértékével.

## e. Néhány kitüntetett függvény

### Konstansfüggvény

Ha  $c$  konstans vektor, akkor  $\text{div } c = \text{rot } c = 0$  és  
 ha  $c$  konstans skalár, akkor  $\text{grad } c = 0$ .

Ugyanis konstans deriváltoperátora nulla, így invariánsai is azok és konstans gradiense is nulla.

### Lineáris transzformáció

Legyen  $\mathbf{A}$   $\mathbf{R}^2$ -en értelmezett lineáris transzformáció. Ekkor

$\text{div } \mathbf{A}$  azonos  $\mathbf{A}$  skalárinvariánsával és  
 $\text{rot } \mathbf{A}$   $\mathbf{A}$  vektorinvariánsának kétszerese.

Ezek az állítások az invariánsok definícióinak és annak nyilvánvaló következményei, hogy lineáris operátor deriváltja önmaga.

Az alábbiakban megadjuk a vizsgált mennyiségeket két speciális lineáris operátor esetén.

**Identitás:**  $v(r) = r$ .

$$\operatorname{div} r = 2$$

$$\operatorname{rot} r = 0$$

Valóban, nyilván az identitás mátrixa (bármely bázisban) az egységmátrix, melynek főátlója két egyesből áll, ezek összege pedig 2. Másrészt, az identitás szimmetrikus operátor, tehát antiszimmetrikus része nulla, és ennek nyilván vektorinvariánsa is nulla. Persze, közvetlenül a definíciókból is adódik, hogy  $v(r) = r = (x, y)$  esetén

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2 \quad \text{és}$$

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 0.$$

**CROSS:**  $v(r) = \operatorname{CROSS}(r)$ .

$$\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(r) = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{CROSS}(r) = 2$$

Ezt többféleképpen is beláthatjuk.

(1) Egyrészt, felhasználva azt, amit épp az előbb az identitásra bizonyítottunk, valamint a d. pontbeli összefüggéseket  $\operatorname{div}$  és  $\operatorname{rot}$  között, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(r) = -\operatorname{rot} r = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} \operatorname{CROSS}(r) = \operatorname{div} r = 2.$$

(2) Egy másik lehetőség közvetlenül a definíciók alkalmazása. Felhasználva, hogy  $\operatorname{CROSS}(r) = (-y, x)$ , adódik, hogy

$$\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(r) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial (-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \quad \text{és}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{CROSS}(r) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

(3) Végül használhatjuk azt, hogy  $\operatorname{CROSS}$  lineáris transzformáció. Legyen  $\mathbf{R}^2$  szokásos bázisa  $e = (i, j)$ .  $\operatorname{CROSS}(i) = j$ ,  $\operatorname{CROSS}(j) = -i$ , tehát  $\operatorname{CROSS}$  mátrixa  $e$ -ben:

$$\underline{\underline{\operatorname{CROSS}}}_e = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\underline{\underline{\operatorname{CROSS}}}_e$  tehát antiszimmetrikus, főátlóbeli elemeinek összege 0, így  $\operatorname{div} \operatorname{CROSS}(r) = 0$ . Másrészt, persze  $\operatorname{CROSS}(r) = 1 \cdot \operatorname{CROSS}(r)$ , így a vektorinvariáns definíciója alapján  $\operatorname{CROSS}$  vektorinvariánsa 1, és ennek kétszerese a rotáció, vagyis  $\operatorname{rot} \operatorname{CROSS}(r) = 2$ .

### Skalárszorzás

Legyen  $u(r) = (c, r)$ , ahol  $c$  valamely rögzített konstansvektor. Ekkor

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(c, r) = c.$$

Valóban,  $u(r)$  lineáris operátor, így  $u'(r) = u(r) = (c, r)$ , amiből  $\operatorname{grad}$  definícióját használva,  $\operatorname{grad} u = c$ .

### Körszimmetrikus tér

(1) Legyen  $u(r) = f(|r|)$ , ahol  $f$  tetszőleges  $\mathbf{R}^+$ -on deriválható egyváltozós függvény. Ha  $r \neq 0$ , akkor

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|) \frac{r}{|r|}.$$

(2) Legyen  $v(r) = f(|r|)r$ , ahol  $f$  tetszőleges  $\mathbf{R}^+$ -on deriválható egyváltozós függvény. Ha  $r \neq 0$ , akkor

$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(f(|r|)r) = 0.$$

Az első összefüggés a láncszabály egy alkalmazása, hiszen ha  $r \neq 0$ , akkor

$$\text{grad } |r| = \text{grad } \sqrt{x^2 + y^2} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y) = \frac{r}{|r|}.$$

A második összefüggés pedig a fenti c. pontból adódik:

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= \text{rot}(f(|r|)r) = f(|r|)\text{rot } r - \text{CROSS}(r) \cdot \text{grad}f(|r|) = \\ &= 0 + \text{CROSS}(r) \cdot (f'(|r|)\frac{r}{|r|}) = \frac{f'(|r|)}{|r|}(\text{CROSS}(r) \cdot r) = 0 \end{aligned}$$

hiszen már láttuk, hogy  $\text{rot } r = 0$  és, mivel  $\text{CROSS}(r)$  és  $r$  merőlegesek egymásra,  $\text{CROSS}(r) \cdot r = 0$ .

## f. Két nevezetes összefüggés

(1) Legyen  $u$  és  $v$  kétszer folytonosan deriválható skalár- ill. vektorfüggvény. Ekkor

$$\text{rot grad } u = 0.$$

Valóban,

$$\text{rot grad } u = \text{rot}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = u_{xy} - u_{yx} = 0$$

a Young- tétel miatt.

(2) Legyen  $u$  kétszer folytonosan deriválható skalár- függvény. Vezessük be a következő jelölést:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \quad (\Delta\text{-t Laplace operátornak nevezzük}).$$

Ekkor

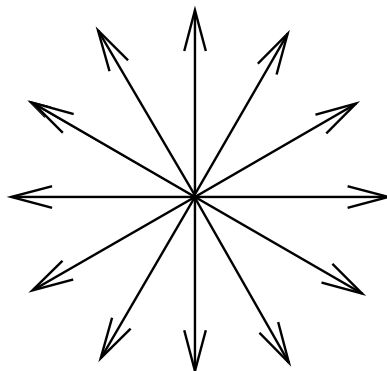
$$\text{div grad } u = \Delta u.$$

$$\text{Ugyanis: } \text{div grad } u = \frac{\partial}{\partial x}(\text{grad } u)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\text{grad } u)_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

## 3.4 Két fundamentális fizikai alkalmazás

### 3.4.1 Ponttöltés elektromos tere

Legyen minden  $r \neq 0$  esetén  $v(r) = \frac{r}{|r|^2}$ :



Ez a vektorfüggvény, mint erőter az egységnyi síkbeli ponttöltés tere, míg mint áramlási tér a pontszerű forrás vagy (ellenkező előjellel) lefolyó áramlási tere. Ez utóbbi akár kísérletileg is viszonylag könnyen igazolható: ha egy köralakú, mélységéhez képest nagy felszínű tepsiben levő vizet a tepsi közepén vágott viszonylag kis lyukon keresztül úgy eresztünk le, hogy megakadályozzuk itt (a Föld tengelyforgásának eredményeképpen létrejövő) örvénylő mozgást, akkor a víz mozgásának sebessége, amit például kis papírdarabokkal mérhetünk, nyilván a lefolyó felé irányul és nagysága  $|v(r)| = \frac{1}{|r|}$ , azaz a mért távolsággal fordítva arányos.

A függvény az origó kivételével mindenütt folytonosan deriválható, az origóban pedig még folytonossá sem tehető. Valóban,

$$v = v(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

ami pontosan akkor folytonosan deriválható, ha koordinátafüggvényei azok. Nos a koordinátafüggvények,

$$v_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad v_2 = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

egyrészt nyilván az origón kívül mindenütt folytonosan deriválhatóak, hiszen csak az origóban eltűnő nevezőjű racionális törtfüggvények, másrészt az origóban még csak folytonossá sem tehetőek, mert még határértékük sincs ott. Például

$$v_1(x, 0) = \frac{1}{x} \rightarrow \infty \quad \text{ha} \quad x \rightarrow 0+, \quad \text{míg} \quad v_1(0, y) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad y \rightarrow 0.$$

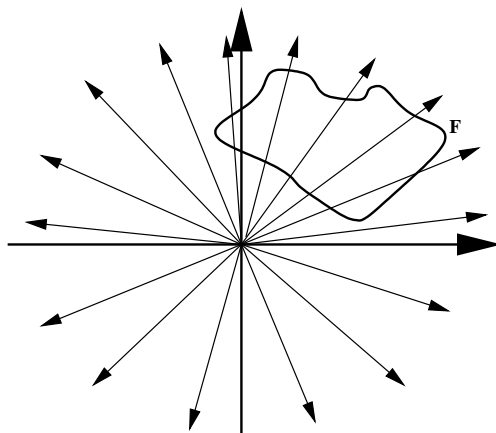
#### FORRÁSSŰRŰSÉG ÉS FLUXUS.

A tér forrassűrűsége az origó kivételével mindenütt nulla:

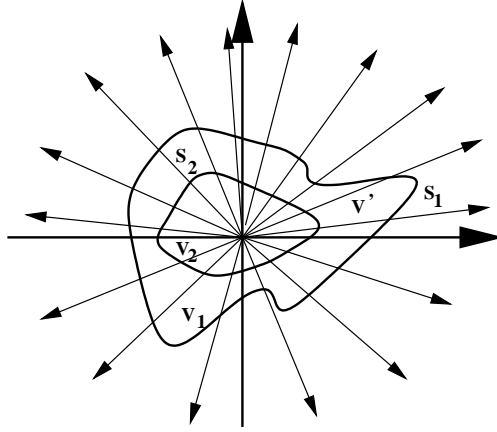
$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= \operatorname{div} \frac{r}{|r|^2} = \frac{1}{|r|^2} \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|r|^2} = \frac{2}{|r|^2} + r \cdot \left( -2 \frac{1}{|r|^3} \frac{r}{|r|} \right) = \\ &= \frac{2}{|r|^2} - \frac{2}{|r|^4} (r \cdot r) = \frac{2}{|r|^2} - \frac{2}{|r|^2} = 0 \quad \text{ha} \quad r \neq 0. \end{aligned}$$

Az origóban nincs értelmezve a divergencia, hiszen, ahogy láttuk,  $v$  még folytonossá sem tehető ott.

A forrassűrűség tehát az origó kivételével mindenütt nulla, következésképpen, a Gauss-Osztrogradskij tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy fluxusa minden az origót nem tartalmazó normál térrészt határoló  $F$  felületre vonatkozóan nulla: az összes erővonal ami az  $F$  által bezárt térrészbe belép, ki is lép onnan:



Nyilván egy az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló zárt  $S$  felület esetében más a helyzet, hiszen a térrészen belül van forrás, új erővonalak keletkeznek. Ahhoz, hogy egy ilyen felületre vonatkozóan meghatározzuk a fluxust, felhasználjuk azt a tényt, hogy két különböző ilyen felületre:  $S_1$ -re és az általa bezárt  $V_1$  térrész belsejébe eső  $S_2$ -re vonatkozó fluxus megegyezik, hiszen a két felület közé eső  $V'$  térrészben nem keletkeznek erővonalak, azok az erővonalak, melyek az  $S_2$  által bezárt  $V_2$  térrészből kilépnek, kilépnek  $V_1$  -ből is:



Ez persze minden olyan esetben, mikor a  $V'$  normál térrész, formálisan is belátható, hiszen ekkor (mivel  $S_1$  és  $-S_2$  kifelé irányított zárt felületek lefedik  $V'$  határát (1.26 (15)(c) feladat)) alkalmazható rá a Gauss-Osztrogradszkij tétel általánosított változata (3.6 Tétel):

$$\int_{S_1} v \, df + \int_{-S_2} v \, df = \int_{V'} \operatorname{div} v \, dv = 0, \quad \text{tehát}$$

$$\int_{S_1} v \, df = \int_{S_2} v \, df.$$

Nos, ezek után elég egy origóközéppontú kétdimenziós gömbhöz (azaz körvonalra) vonatkozóan kiszámítani a fluxust, hiszen minden, az origót belsejében tartalmazó térrész esetében van teljesen a térrészbe eső origóközéppontú gömb. Legyen tehát  $F$  az  $R$  sugarú kétdimenziós gömbhöz.  $F$  egyenlete:  $r = r(t) = (R \sin t, R \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Ekkor  $\dot{r}(t) = (R \cos t, -R \sin t)$ ,  $\operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) = (R \sin t, R \cos t)$ . (A 3.16 Feladatban már láttuk, hogy ez valóban kifelé irányítja  $F$ -et, az 1.26 (10)(d) feladat alapján  $F$  zárt felület és az 1.26 (15)(d) feladat alapján  $F$  az origót belsejében tartalmazó normál térrész határa.) Ezekkel

$$v(r(t)) = \frac{r(t)}{|r(t)|^2} = \frac{1}{R^2} \cdot (R \sin t, R \cos t) = \frac{1}{R} (\sin t, \cos t).$$

Tehát  $v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) = 1$ . Így

$$\int_F v \, df = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \operatorname{CROSS}(\dot{r}(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Ezt az eredményt megkaphattuk volna a következőképpen is:  $F$  minden pontjában annak  $n$  normálisa  $r$  irányú, így, mivel  $v \parallel r$ , adódik, hogy  $n \parallel v$  és (mivel  $F$  kifelé irányított)  $n$  és  $v$  iránya is megegyezik. Következésképp  $v$ -nek  $n$ -re eső vetülete  $v_n = |v|$ , tehát felhasználva, hogy  $F$ -n  $|v| = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R}$ :

$$\int_F v \, df = \int_F v_n \, |df| = \int_F |v| \, |df| = \int_F \frac{1}{R} \, |df| = \frac{1}{R} \cdot \int_F |df| = \frac{1}{R} \cdot |F| = \frac{1}{R} \cdot 2R\pi = 2\pi.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló kifelé irányított zárt  $S$  felületre vonatkozó fluxus azonosan  $2\pi$ . Ebből következően persze az origóbeli forrássűrűség végtelen, hiszen ha  $(V_k)$  az origóra zsugorodó normál térrészek egy olyan sorozata, melyre minden  $k \in \mathbf{R}$  esetén  $V_k$  határa a zárt kifelé irányított  $F_k$  felület, akkor  $|V_k| \xrightarrow{k} 0$ , miatt

$$\frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df = \frac{1}{|V_k|} \cdot 2\pi \xrightarrow{k} \infty.$$

A fenti, az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló felületen számított fluxusra vonatkozó eredményünkkel kapcsolatban érdemes még egy észrevételt tenni. Láttuk, hogy  $\operatorname{div} v = 0$  az origó kivételével mindenütt, tehát  $\operatorname{div} v$  egy pont kivételével folytonos a síkon és értelmezési tartományán korlátos

is. Ebből az integrálszámítás jól ismert tétele szerint  $\operatorname{div} v$  integrálható minden zárt, korlátos és mérhető halmazon, így bármely az origót belsejében tartalmazó normál  $V$  térrészen is és

$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = 0,$$

amiből Gauss-Osztrogradszkij tétel alapján  $v$ -nek  $V$  határára,  $F$ -re vonatkozó fluxusa is nulla, ellentmondásban fenti eredményünkkel, mely szerint ez a fluxus  $2\pi$ . Ez az érvelés azonban hibás,  $V$ -re a Gauss-Osztrogradszkij tétel *nem alkalmazható*, mert ennek feltétele  $v$ -nek *egész  $V$ -re vonatkozó* folytonos deriválhatósága,  $v$  azonban (amint már láttuk) még csak folytonossá sem tehető az origóban.

#### ÖRVÉNYSŰRŰSÉG ÉS CIRKULÁCIÓ.

Az örvénysűrűség az origó kivételével minden pontban és így Stokes-tétellel a cirkuláció minden, az origót belsejében nem tartalmazó, normál térrészt határoló görbére vonatkozóan nulla, hiszen a 3.3 e. pontban láttuk, hogy körszimmetrikus tér rotációja az origón kívül nulla,  $\operatorname{rot} v = 0$  az origón kívül mindenütt.

Persze ahogy a divergencia, a rotáció sem értelmezhető az origóban. Az örvénysűrűséggel azonban más a helyzet. Pontosan ugyanúgy, ahogy a Gauss-Osztrogradszkij tételre és a divergenciának az origón kívül való eltűnésére támaszkodva megmutattuk, hogy minden az origót belsejében tartalmazó normál térrész zárt kifelé irányított határára a fluxus ugyanaz, a rotáció eltűnését és a Stokes-tételt használva megmutatható, hogy az origót belsejükben tartalmazó normál térrész pozitívan irányított zárt határain vett cirkuláció is azonos. Következésképpen, nem maradt más hátra, minthogy kiszámítsuk a cirkulációt egy origóközéppontú  $R$  sugarú pozitívan irányított  $L$  körvonalra. Ez azonban igen egyszerű, hiszen  $L$  minden pontjában  $L$  érintője merőleges az  $r$  irányú  $v(r)$  függvényre, tehát  $v$  érintőre eső  $v_e$  vetülete nulla, azaz

$$\int_L v \, dr = \int_L v_e |dr| = \int_L 0 |dr| = 0.$$

Következésképpen, az origót belsejükben tartalmazó normál térrészek határára vonatkozó cirkuláció is nulla, vagyis a cirkuláció *minden* normál térrész határára vonatkozóan nulla. Ebből persze rögtön az is következik, hogy az örvénysűrűség *mindenütt*, így az origóban is nulla annak ellenére, hogy a rotáció az origóban nem létezik! Ez nyilván nem mond ellent a 3.15 Következménynek, hiszen ez csak olyan pontokban garantálja a két mennyiség azonosságát, melyekben az adott függvény folytonosan deriválható, ami  $v$ -re az origóban nem igaz, ahogy azt már megmutattuk.

Röviden tehát minden az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló kifelé irányított zárt felületre vonatkozó fluxus  $2\pi$ , az origóbeli forrassűrűség végtelen és *minden más* nulla.

Tömören és szemléletesen mindazt, amit eddig elmondtunk a függvényről, fenti erővonalas ábrázolása foglalja össze. Tulajdonképpen amit csináltunk, az éppen ezen ábrázolás korrektségének vizsgálata volt formális eszközökkel. Egyrészt, a függvény forrassűrűsége az origó kivételével mindenütt nulla, ott pedig végtelen, így csak az origóban van forrása, tehát minden erővonal az origóból indul ki és sehol nem tűnik el. Továbbá persze definíciójából a függvény mindenütt  $r$ -irányú, tehát az erővonalak origón átmenő egyenesek. Másrészt, ami az erővonalak sűrűségét illeti, ez egy origóközéppontú  $R$  sugarú kör kerülete mentén azonos, mert itt  $|v(r)| = \frac{1}{|r|} = \frac{1}{R}$  állandó. Mivel  $v$  sugárirányú, ez egyszer mind azt is jelenti, hogy a függvény nagysága nem változik irányára merőlegesen, ez pedig azzal a ténnyel együtt, hogy az erővonalak nem görbülnek, a tér mindenütt való cirkuláció és örvénysűrűség mentességét tükrözi.

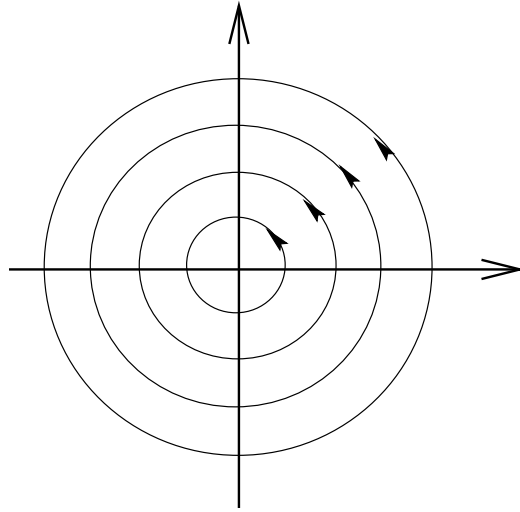
### 3.4.2. Végtelen vezető mágneses tere

Legyen minden  $r \neq 0$  esetén  $w(r) = \frac{\operatorname{CROSS}(r)}{|r|^2}$  (az erőteret a túloldalon ábrázoltuk).

Ez a vektorfüggvény, mint erőter a végtelen mágneses vezető terének síkmetszete, míg, mint áramlási tér egy középpont körül örvénylő folyadék áramlási tere.

Matematikailag a végtelen vezető mágneses terét leíró vektorfüggvény a ponttöltés erőterét leíró előző vektorfüggvény duálisa, pontosabban a végtelen vezető mágneses tere–ponttöltés erőtere, fluxus–cirkuláció, divergencia–rotáció, forrassűrűség–örvénysűrűség,  $v$ - $\operatorname{CROSS}(v)$  duális fogalom párok.

$$\text{Legyen } v(r) = \frac{r}{|r|^2}. \quad \text{Ekkor } w(r) = \operatorname{CROSS}(v(r)),$$



így  $w$  és  $v$  nagysága mindenütt megegyezik, valamint erővonalaik egymás ún. **orthogonális trajektóriái**, azaz mindenütt merőlegesek egymásra. Továbbá,  $w(r) = \text{CROSS}(v(r))$  a fenti 3.3 d. pontbeli összefüggések felhasználásával a következőkre vezet:

$$\text{div } w = \text{div } \text{CROSS}(v) = -\text{rot } v \quad \text{és} \quad \text{rot } w = \text{rot } \text{CROSS}(v) = \text{div } v.$$

Így a ponttöltés erőterét leíró  $v = v(r)$  vektorfüggvényre kapott fenti eredmények felhasználásával az adódik, hogy  $\text{div } w = 0$  (ahogy az erővonalak zártóságából leolvasható) és  $\text{rot } w = 0$  az origó kivételével mindenütt. Ezekből következően a forrassűrűség az origó kivételével mindenütt és Gauss-Osztrogradszkij tétellel a fluxus minden az origót belsejében nem tartalmazó normál térrészt határoló felületre vonatkozóan nulla. Továbbá az örvénysűrűség az origó kivételével mindenütt nulla és minden olyan görbére vonatkozó cirkuláció is nulla, mely az origót belsejében nem tartalmazó normál térrész határa. Végül, mivel  $\text{CROSS}(\text{CROSS}(v)) = -v$ , a felületmenti és görbementi integrálok közötti összefüggés (1.24 Megjegyzés) és az a. pontbeli eredmény felhasználásával az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló kifelé irányított  $F$  felületre vonatkozó fluxus nulla, hiszen  $F = -L$ -el:

$$\int_F w \, df = \int_L \text{CROSS}(w) \, dr = \int_L \text{CROSS}(\text{CROSS}(v)) \, dr = \int_L -v \, dr = 0$$

és az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló pozitívan irányított  $L$  zárt görbére vonatkozó cirkuláció  $2\pi$ , mert ugyanúgy, ahogy az előbb:

$$\int_L w \, dr = - \int_F \text{CROSS}(w) \, df = - \int_F \text{CROSS}(\text{CROSS}(v)) \, df = - \int_F -v \, df = 2\pi,$$

amiből persze (az a. pontban alkalmazott gondolatmenethez hasonló módon) az is adódik, hogy az origóban a forrassűrűség nulla, az örvénysűrűség pedig végtelen.

Összefoglalva tömören az mondható, hogy minden az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló pozitívan irányított zárt görbére vonatkozó cirkuláció  $2\pi$ , az origóbeli örvénysűrűség végtelen és *minden más* nulla.

Természetesen fordítva is csinálhattuk volna, a  $w$ -re vonatkozó eredményeket közvetlen számolással is megkaphattuk volna, ahogyan azt a  $v$  esetében tettük és aztán a  $v$ -t jellemző adatokat a dualitást használva számíthattuk volna ki, ahogy azt most a  $w$  esetében tettük.

Még egy tényre érdemes a figyelmet felhívni. Ahogy láttuk,  $w$  örvénysűrűsége az origó kivételével mindenütt nulla, annak ellenére, hogy  $w$  *sehol sem homogén irányú*, azaz erővonalai mindenütt görbülnek! Nos, bár azt már a 2. fejezetben láttuk, hogy az örvénysűrűség lehet nullától eltérő homogén irányú vektorfüggvény esetén is (azaz akkor is, ha az erővonalak nem görbülnek), a fordított esetre még nem láttunk példát. A magyarázat az, hogy bár  $w$  erővonalai görbülnek,  $w$  nagysága azonban *irányára merőlegesen* változik, amiről már láttuk (éppen azokban a 2. fejezetben szereplő példákban, melyekre most hivatkoztunk), hogy szintén cirkulációt okoz. Nomármost,  $w$  esetében a két hatás éppen semlegesíti, kioltja

egymást, amekkora pozitív örvénylést az erővonalak görbülsége okoz, éppen akkora negatív örvénylést vált ki sugár irányú ritkulásuk.

## 3.5 Az integráltételek alkalmazásai

### 3.5.1. Egyéb integráltételek

#### 3.17 Tétel (Green-tételek)

Legyen  $V \subseteq \mathbf{R}^2$  normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított felület és  $u, v \in C_2(V)$  tetszőleges kétváltozós függvények, melyeknek az  $F$  felületi normális irányú iránymenti deriváltjai  $\frac{\partial v}{\partial n}$  ill.  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Ekkor

(1) (Antiszimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) dV = \int_F u \frac{\partial v}{\partial n} df.$$

(2) (Szimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_F (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) df.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel nyilván az antiszimmetrikus Green-formulából az eredeti és az  $u-v$  szerepcserével kapott formula különbségként adódik a szimmetrikus formula, elég az antiszimmetrikus formulát bizonyítani. Legyen

$$w = u \text{ grad } v.$$

Ekkor

$$\text{div } w = \text{div}(u \text{ grad } v) = u \text{ div grad } v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v$$

Másrészt  $w$ -nek  $n$ -re, az  $F$  egységnormálisára eső vetülete:

$$w_n = w \cdot n = (u \text{ grad } v) \cdot n = u(\text{grad } v \cdot n) = u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Így Gauss–Osztrogradszkij tétellel:

$$\int_V (u\Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) dV = \int_V \text{div } w dV = \int_F w df = \int_F w_n df = \int_F u \frac{\partial v}{\partial n} df.$$

Érdekes módon azonos alakú integrálátalakító tételek vonatkoznak a deriváltoperátor mindkét invariánsára és a gradiensre is. Az elsővel persze már találkoztunk.

#### 3.18 Tétel (Gauss–Osztrogradszkij típusú tételek)

Ha  $V \subseteq \mathbf{R}^2$  normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított felület,  $u : V \rightarrow \mathbf{R}$  és  $v : V \rightarrow \mathbf{R}^2$ , továbbá  $u, v \in C_1(V)$  tetszőlegesek, akkor

(1) (I. Gauss–Osztrogradszkij tétel)

$$\int_V \text{div } v dV = \int_F v df$$

(2) (II. Gauss–Osztrogradszkij tétel)

$$\int_V \text{rot } v dV = - \int_F \text{CROSS } v df$$

(3) (Gradiens tétel)

$$\int_V \text{grad } u \, dV = \int_F u \, df$$

BIZONYÍTÁS. (1)-et már bizonyítottuk, ez a Gauss-Osztogradszkij tétel (3.5 Tétel). Ami (2)-t illeti az 1.24 Megjegyzésből Stokes-tétellel a következő adódik ( $L = -F$ ):

$$\int_F \text{CROSS } v \, df = - \int_L v \, dr = - \int_V \text{rot } v \, dV.$$

Végül (3) bizonyításához legyen  $c \in \mathbf{R}^2$  tetszőleges konstans vektor. Mivel ekkor

$$\text{div}(cu) = u \text{div } c + c \cdot \text{grad } u = c \cdot \text{grad } u,$$

hiszen  $\text{div } c = 0$ , így Gauss-Osztogradszkij tétellel:

$$(*) \quad c \cdot \int_F u \, df = \int_F cu \, df = \int_V \text{div}(cu) \, dV = \int_V c \cdot \text{grad } u \, dV = c \cdot \int_V \text{grad } u \, dV.$$

És ezzel készen is vagyunk, hiszen

$$\int_F u \, df, \int_V \text{grad } u \, dV \in \mathbf{R}^2$$

és (\*)-gal  $\mathbf{R}^2$  bármely orthonormált  $e = (e_1, e_2)$  bázisa esetén

$$\int_F u \, df \quad \text{és} \quad \int_V \text{grad } u \, dV$$

$e$ -beli oszlopvektorai megegyeznek.

Pontosan ugyanolyan módon, ahogyan a 3.7 Következményben a az I. Gauss-Osztogradszkij tétel segítségével a divergenciára egy sűrűség-jellegű összefüggést bizonyítottunk, kaphatunk a II. Gauss-Osztogradszkij tétel és a gradiens tétel alapján a rotációra és a gradiensre egy-egy hasonló összefüggést. (Érdeemes elgondolkodni azon, hogy a gradiens esetén mi ennek a szemléletes tartalma. A divergencia és a rotáció esetén ez a szemléletes tartalom következik az eddig elmondottakból.) Az alábbi állításba a teljesség kedvéért belefoglaltuk a 3.7 Következményben már bizonyított összefüggést is.

### 3.19 Következmény (Ignatowsky-féle definíciók)

Legyen  $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges nyílt halmaz,  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  és  $u : G \rightarrow \mathbf{R}$  folytonosak. Ha a  $(V_k)$   $r_0$ -ra zsugorodó  $\mathbf{R}^2$ -beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden  $k \in \mathbf{N}$  esetén  $V_k \subseteq G$  határa a kifelé irányított zárt  $F_k$  felület, akkor

$$\text{div } v \Big|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df$$

$$\text{rot } v \Big|_{r_0} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} \text{CROSS}(v) \, df$$

$$\text{grad } u \Big|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} u \, df$$

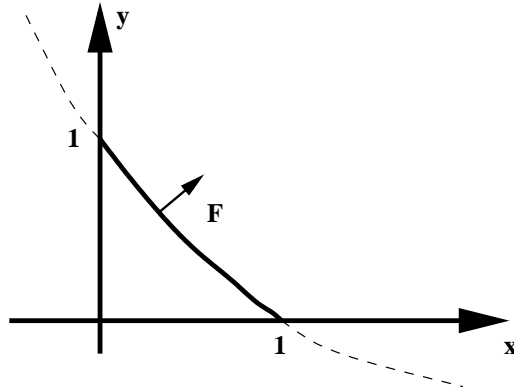
### 3.5.2. Felület- és vonalmenti integrálok számítása

Mivel a fő integráltételek és fent tárgyalt következményeik integrálok között állapítanak meg összefüggéseket, természetesen sok esetben jól alkalmazhatóak integrálok kiszámítására. Ezt az alábbiakban néhány egyszerű példán keresztül mutatjuk meg.

#### 3.20 Példák

(1) Legyen  $v(x, y) = (x, -y)$  és  $F$  az a felső félsíkba irányított felület, melynek implicit egyenlete:

$$y = \frac{2}{x+1} - 1, \quad 0 \leq x \leq 1 :$$



Számítsuk ki az  $\int_F v df$  integrált!

MEGOLDÁS.

Mint ahogy  $\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial -y}{\partial y} = 1 - 1 = 0$ , ha  $F'$  az a felület, melyet úgy kapunk, hogy  $F$ -et kiegészítjük a megfelelően irányított  $S_1 = \overline{OP_1}$  és  $S_2 = \overline{OP_2}$  szakaszokkal, ahol  $O = (0, 0)$ ,  $P_1 = (1, 0)$ ,  $P_2 = (0, 1)$ , akkor az  $F'$  által határolt  $V$  háromszöglapra és a kifele irányított  $F'$ -re alkalmazható a Gauss–Osztrogradszkij tétel, így

$$\int_F v df + \int_{S_1} v df + \int_{S_2} v df = \int_{F'} v df = \int_V \operatorname{div} v dV = 0$$

$$\text{tehát} \quad \int_F v df = - \int_{S_1} v df - \int_{S_2} v df.$$

Másrészt azonban  $\int_{S_1} v df = \int_{S_2} v df = 0$ , mert  $S_1$  mentén  $v = (x, 0)$ , ami  $x$  irányú, azaz  $S_1$  normálisára merőleges, valamint ugyanígy  $S_2$  mentén  $v = (0, -y)$ , ami  $y$  irányú, azaz  $S_2$  normálisára merőleges. Vagyis

$$\int_F v df = - \int_{S_1} v df - \int_{S_2} v df = 0.$$

(2) Legyen  $v(r) = r e^{r^2}$  és  $L$  az  $r = r(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  egyenletű ellipszis ( $a, b$  pozitív valós számok). Számítsuk ki az  $\int_L v dr$  integrált!

MEGOLDÁS.

Ha  $r \neq 0$ , akkor

$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} r e^{r^2} = e^{r^2} \operatorname{rot} r - \operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad} e^{r^2} = 0 - 0 = 0.$$

Valóban, egyrészt  $\operatorname{rot} r = 0$ . Másrészt persze  $r^2 = |r|^2$  és így  $(r^2)' = 2|r| \frac{r}{|r|} = 2r$ , tehát

$$\operatorname{grad} e^{r^2} = (e^{r^2})' \operatorname{grad} |r| = 2|r| e^{r^2} \frac{r}{|r|} = 2r e^{r^2},$$

azaz a  $\operatorname{grad} e^{r^2}$  vektor  $r$  irányú így (mivel  $r$  merőleges  $\operatorname{CROSS}(r)$ -re)  $\operatorname{grad} e^{r^2}$  merőleges  $\operatorname{CROSS}(r)$ -re, vagyis  $\operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad} e^{r^2} = 0$ .

Ha tehát a Stokes tételt alkalmazzuk  $L$ -re és az általa határolt  $F$  ellipszislapra, akkor

$$\int_L v dr = \int_F \operatorname{rot} v dV = \int_F 0 dV = 0.$$

(3)(a) Legyen  $V \subseteq \mathbf{R}^2$  normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított felület. Legyen  $|V| = V_0$ .

$$\int_F r \, df = ?$$

(b) Legyen  $F \subseteq \mathbf{R}^2$  normál térrész, melynek határa az  $L$  pozitívan irányított görbe. Legyen  $|F| = F_0$ .

$$\int_L \text{CROSS}(r) \, dr = ?$$

MEGOLDÁS.

$$(1) \quad \int_F r \, df = \int_V \text{div } r \, dV = \int_V 2 \, dV = 2 \int_V dV = 2 |V| = 2 V_0$$

$$(2) \quad \int_L \text{CROSS}(r) \, dr = \int_F \text{rot } \text{CROSS}(r) \, dV = \int_F \text{div } r \, dV = \int_F 2 \, dV = 2 \int_F dV = 2 |F| = 2 F_0$$

## 3.6 Potenciálemélet elemei

Eddig nyilvánvalóan az egyváltozós függvények *határozott* integráljának fogalmát általánosítottuk vektorfüggvényekre. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy az egyváltozós függvények integrálszámításában fontos szerepet játszó másik két alapfogalom, a primitív függvény és az integrálfüggvény általánosítható-e vektorfüggvényekre, van-e ezeknek is megfelelőjük a vektorfüggvények között. Ahogyan hamarosan látni fogjuk, ez az általánosítás lehetséges és ugyanúgy, ahogyan az egyváltozós függvények esetén, a vektorfüggvények körében is az integrálszámítás és a differenciálszámítás megfordítása, azaz a primitív függvény keresés közötti összefüggés analóg az egyváltozós függvények körében megismert, az integrálfüggvény által létesített kapcsolattal. Az alábbiakban ezt a viszonyt fogjuk vizsgálni.

A potenciál a primitív függvény fogalmának vektorfüggvényekre való általánosítása. A pontos definíció után a potenciál létezésének és egyértelműségének feltételeit vizsgáljuk. Ennek a vizsgálatnak eredményeképpen megfogalmazzuk az egyváltozós integrálszámítás alapvető eredményeinek vektorfüggvényekre vonatkozó megfelelőit, többek között a Newton–Leibniz formula egy lehetséges általánosítását, majd két egyszerű módszert mutatunk arra, hogyan lehet meghatározni a potenciált. Ezután a 3.4 pontban szereplő központi jelentőségű vektorfüggvények leírását egészítjük ki a potenciáljukra vonatkozó eredményekkel, végül egy, a differenciálegyenletek körébe eső alkalmazást ismertetünk. Minthogy deriválhatóságot csak belső pontban, integrálhatóságot csak összefüggő halmazon értelmeztünk, természetesen vizsgálatainkban nyílt és összefüggő halmazokra szorítkozunk. Végül az integrálhatóságot biztosítandó, a potenciállal kapcsolatos kérdéseket vizsgálatát a folytonos függvények körére korlátozzuk.

### 3.21 Definíció

Legyen  $n \geq 1$  egész,  $G \subseteq \mathbf{R}^n$  nyílt, összefüggő halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Az  $u : G \rightarrow \mathbf{R}$  skalárfüggvényt  $v$  vektorfüggvény  $G$ -beli **(skalár)potenciáljának** nevezzük, ha  $u$  deriválható  $G$ -n és itt  $\text{grad } u = v$ .

### 3.6.1 Egzisztencia és unicitás

Az egyváltozós függvények integrálszámításában a két központi szerepet betöltő fogalmat, a primitív függvényt és a határozott integrált az integrálfüggvény fogalma kapcsolja össze. Kézenfekvő, hogy az egyváltozós függvények integrálfüggvénye, "az integrál, mint a felső határ függvénye" fogalmának megfelelőjét a vonalintegrálban keressük, hiszen az egyváltozós integrál is tulajdonképpen skalárfüggvénynek a valós számegyenes menti vonalintegrálja. Az egyváltozós esettől eltérően azonban a síkon – valamely rögzített kezdőpont esetén is – egy adott végpontba sokféleképpen, sok görbe mentén integrálhatunk és ezek az integrálok egymástól különbözhetnek. Ha fent, a bevezető megjegyzésekben megfogalmazott feltevésünk helyes és az integrálfüggvény potenciált határoz meg, akkor azonban az integrál nem függhet attól, milyen görbe mentén integrálunk egy adott végpontba, hisz a potenciál csak ettől az adott ponttól függ. Nos, az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez tényleg így is van. Ebben

az esetben azt mondjuk, hogy "az integrál nem függ az integrálási úttól". Ezt a tulajdonságot szokás *pontatlanul* úgy átfogalmazni, hogy "zárt görbéken a vonalmenti integrál nulla". Nyilvánvaló, hogy ez a két feltétel valóban összefügg, sőt bizonyos feltételek esetén ekvivalensek is (ezt rögtön látni fogjuk), azonban ekvivalenciájuk teljes általánosságban való vizsgálatát mindenképpen meghaladja annak a fogalmi apparátusnak kereteit, mely tárgyalásunk alapját képezi (lásd a 3.25 Megjegyzést és a 3.7.1 pontbeli (1) feladatot). A zárt görbékre vonatkozó állítások esetén csak a nem túl bonyolult szerkezetű, a "természetes" görbefogalomnak leginkább megfelelő egyszerű ívekre szorítkozunk (vö. a 3.7.1 pont (2) feladattal), ezért megismételjük az egyszerű ívek az 1.26 (10) feladatban szereplő definícióját. Az egyszerű ívvel kapcsolatos legfontosabb állításokat az 1.26 (9),(10),(11),(12) és (14) feladatok tartalmazzák. Ezek közül számunkra a leglényegesebb az, amit – kissé pontatlanul – úgy fogalmazhatunk meg, hogy egy egyszerű ív vagy elemi ív vagy a két végén "összeforrasztott" elemi ív, azaz formálisan: ha  $L$  egy  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b]$  egyenletű egyszerű ív, akkor

- (1)  $L$  csak akkor elemi ív ha nem zárt,
- (2)  $L$  akkor és csak akkor zárt ha  $r(a) = r(b)$ .

### 3.22 Definíció

- (1) Ha az  $L$  görbe  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b]$  egyenlete olyan, hogy minden  $a < c < b$  esetén az  $r$ -nek mind az  $[a, c]$ -re mind a  $[c, b]$ -re való megszorítása által definiált görbe elemi ív, akkor  $L$ -et **egyszerű ívnek** nevezzük.
- (2) Legyen  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b]$  az  $L$  görbe egyenlete.  $r(a)$ -t  $L$  **kezdőpontjának**,  $r(b)$ -t  $L$  **végpontjának** nevezzük.

### 3.23 Megjegyzés

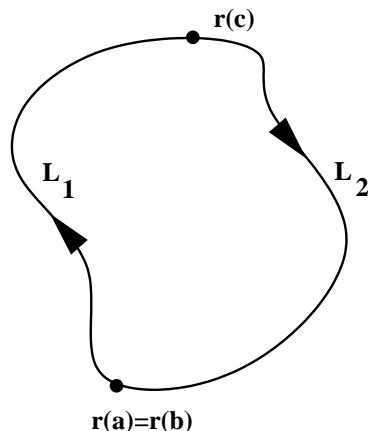
- (1) Nyilván minden elemi ív egyszerű ív is.
- (2)  $-L$  kezdőpontja  $L$  végpontjával és  $-L$  végpontja  $L$  kezdőpontjával azonos.

Valóban, legyen  $L$  egyenlete  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Ekkor az 1.13 (2)(c) definíció alapján  $-L$  egyenlete  $s = s(t) = r(-t)$ ,  $t \in [-b, -a]$ . Következésképp,  $-L$  kezdőpontja  $s(-b) = r(-(-b)) = r(b)$ , azaz  $L$  végpontja. Másrészt,  $-L$  végpontja  $s(-a) = r(-(-a)) = r(a)$ , vagyis  $L$  kezdőpontja.

### 3.24 Állítás

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt, összefüggő halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  folytonos vektorfüggvény. Ha  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső két pont közötti  $G$ -beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem, akkor  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső zárt egyszerű íven nulla.

BIZONYÍTÁS. Legyen  $L$  az  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b]$  egyenlettel definiált zárt egyszerű ív és legyen  $c \in (a, b)$  tetszőleges. Legyenek  $L_1$  és  $L_2$  az  $r$ -nek  $[a, c]$ -re ill.  $[c, b]$ -re való megszorítása által definiált görbék.



Mivel  $L$  zárt,  $r(a) = r(b)$  (lásd a 1.26 (10)(b) feladatot). Következésképp,  $L_1$  és  $-L_2$  azonos kezdő- és végpontokkal rendelkeznek, hiszen  $L_1$  kezdőpontja  $r(a) = r(b)$ , ami  $L_2$  végpontjával, azaz  $-L_2$

kezdőpontjával esik egybe, míg  $L_1$  végpontja  $r(c)$  s ez azonos  $L_2$  kezdőpontjával, azaz  $-L_2$  végpontjával. Emiatt a feltétellel az adódik, hogy

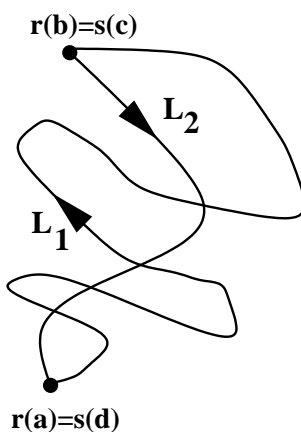
$$\int_{L_1} v dr = \int_{-L_2} v dr = - \int_{L_2} v dr.$$

Vagyis, felhasználva az integrálnak felosztásokra nézve additív voltát (1.22 (1)(b) Állítás),

$$\int_L v dr = \int_{L_1} v dr + \int_{L_2} v dr = 0.$$

### 3.25 Megjegyzés

A bizonyítás alapján könnyen látható, hogy az állítás megfordítását miért nem lehet olyan könnyen bizonyítani, mint magát az állítást. Nem biztos ugyanis, hogy, két azonos pontot összekötő görbe egymáshoz csatolása (ehhez a fogalomhoz lásd a 1.26 (11) feladatot) görbét eredményez. Ez még akkor sem igaz, ha a görbék elemi ívek:



Az alábbi tétel a Newton-Leibniz tétel vonalintegrálokra való általánosítása:

### 3.26 Tétel

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  folytonos vektorfüggvény. Tegyük fel, hogy  $v$ -nek létezik  $G$ -n potenciálja. Ekkor  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső két pont közötti  $G$ -beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem, mégpedig tetszőleges  $G$ -beli  $p$  és  $q$  pontok esetén minden  $G$ -be eső olyan  $L$  görbére, melynek kezdőpontja  $p$ , végpontja pedig  $q$ , fennáll, hogy

$$\int_L v dr = u(q) - u(p)$$

BIZONYÍTÁS. Legyen  $v$  potenciálja  $G$ -n  $u$  és legyen  $L$  olyan  $p$  kezdő- és  $q$  végpontú  $G$ -beli görbe, melynek egyenlete  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Mivel  $r$  szakaszonként folytonosan deriválható,  $[a, b]$  előáll olyan közös belső pont nélküli  $[a_i, b_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$  zárt intervallumok uniójaként, melynek mindegyikének belsején  $r$  folytonosan deriválható. Ezek a részintervallumok  $L$ -nek egy felosztását definiálják (lásd az 1.21(3) definíciót). Vizsgáljuk meg  $v$  görbementi integrálját ezen felosztás egy  $L_i$  elemén. Felhasználva, hogy a láncszabály alkalmazásával

$$\frac{d}{dt} u(r(t)) = \text{grad } u \cdot \dot{r}(t) \quad \text{minden } t \in (a_i, b_i) \text{ esetén,}$$

a görbementi integrál definíciója és a Newton–Leibniz formula alapján ( $u \circ r \in C[a_i, b_i]$ ):

$$\int_{L_i} v dr = \int_{L_i} \text{grad } u dr = \int_{a_i}^{b_i} \text{grad } u(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = \int_{a_i}^{b_i} \frac{d}{dt} u(r(t)) dt = u(r(b_i)) - u(r(a_i)).$$

A bizonyítandó állítás ebből már közvetlenül adódik, mert az integrál felosztásokra nézve additív (lásd az 1.22 (1)(b) állítást) és persze

$$a_1 = a, b_n = b \quad \text{és} \quad a_{i+1} = b_i, 1 \leq i \leq n-1,$$

tehát

$$\int_L v \, dr = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} v \, dr = \sum_{i=1}^n (u(r(b_i)) - u(r(a_i))) = u(r(b)) - u(r(a)) = u(q) - u(p)$$

hiszen a fenti utolsó összegben  $u(r(b))$  és  $u(r(a))$  kivételével minden tag kétszer szerepel ellenkező előjellel.

A tétel következményeképpen adódik az egyváltozós függvényekre vonatkozó "az integrálfüggvény primitív függvény" és "primitív függvények nyílt intervallumokon csak konstansban különbözhetnek" állítások megfelelői vektorfüggvényekre: "a vonalintegrál potenciál" és "potenciálok nyílt összefüggő halmazon csak konstansban különbözhetnek":

### 3.27 Következmény

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  folytonos vektorfüggvény.

- (1) Ha  $v$ -nek van potenciálja  $G$ -n, akkor  $v$  tetszőleges  $G$ -beli rögzített kezdőpontú görbére vett görbementi integrálja, mint végpontjának függvénye megadja  $v$ -nek egy potenciálját  $G$ -n.
- (2)  $v$  potenciáljai  $G$ -n csak konstansban különbözhetnek.

BIZONYÍTÁS.

Legyen  $v$  egy  $G$ -beli potenciálja  $u$  és  $p \in G$  tetszőleges rögzített.  $G$  nyílt és összefüggő halmaz, tehát (a fejezet végén szereplő) 3.7.1 pont (3) feladat alapján

(\*) tetszőleges  $r \in G$  esetén van  $p$  kezdő- és  $r$  végpontú  $G$ -beli görbe.

Másrészt, az előző tétel szerint,  $v$ -nek bármely  $G$ -beli  $p$  kezdő- és  $r$  végpontú görbén vett görbementi integrálja rögzített  $p$  esetén csak  $r$ -től függ. Ha ezt az integrált, mint  $r$  függvényét  $w = w(r)$ -el jelöljük, akkor tehát (\*) miatt  $w$  értelmezve van az egész  $G$ -n. Az előző tétel alapján  $w(r) = u(r) - u(p)$  és (mivel  $u(p)$  nem függ  $r$ -től, azaz konstans)  $u$ -val együtt  $w$  is deriválható és  $\text{grad } w = \text{grad } u = v$ . Ezzel (1)-et beláttuk. Ami (2)-t illeti, ha az  $u^*$  is  $v$  potenciálja  $G$ -n, akkor (\*) alapján az előző tételből az adódik, hogy bármely  $r \in G$  esetén

$$u^*(r) - u^*(p) = \int_L v \, dr = u(r) - u(p),$$

vagyis

$$u^*(r) - u(r) = u^*(p) - u(p) = \text{const.}$$

Az alábbi tétel eddigi eredményeinket foglalja össze a potenciál létezésére vonatkozó szükséges feltételek megadásával:

### 3.28 Tétel

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^2$  tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  folytonos vektorfüggvény. Ekkor az alábbi állítások mindegyike következik az elsőből:

- (1)  $v$ -nek van potenciálja  $S$ -en.
- (2)  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső két pont közötti  $G$ -beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem.
- (3)  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső zárt egyszerű íven nulla.
- (4)  $\text{rot } v = 0$  az egész  $G$ -n amennyiben  $v \in C_1(G)$ .

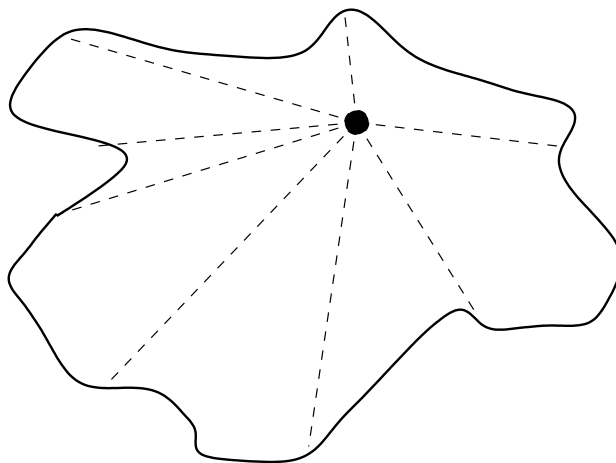
BIZONYÍTÁS.

(1)  $\implies$  (2): 3.26 Tétel.

(2)  $\implies$  (3): 3.24 Állítás.

(1)  $\implies$  (4):  $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$   $G$ -n (lásd a 3.3 f. pontbeli (1) összefüggést).

A kérdés mostmár természetesen az, hogy vajon a 3.28 Tétel megfordítható-e, pontosabban a potenciál létezésére vonatkozó, a tételben megfogalmazott szükséges feltételek közül melyek és milyen feltételek esetén elégségesek is egyben. Mivel a 3.27 Következmény szerint ha létezik potenciál, akkor (konstans erejéig) a potenciál vonalintegrál, tehát ha potenciált akarunk találni, mindenképpen valahogyan a vonalintegrál segítségével kell definiálnunk egy skalárfüggvényt. Ez nyilván csak akkor tehető meg, ha az integrál nem függ a görbe választásától. Ekkor azonban elég a legegyszerűbben kezelhető görbék, azaz az egyenes szakaszok mentén integrálni. Másrészt, ha csak az adott pontokat összekötő szakaszokra szorítkozunk, akkor az így kapott számok valóban csak a kezdő- és végpontoktól függenek, tehát rögzített kezdőpont esetén az egyenesszakaszmenti integrál minden ponthoz egyértelműen hozzárendel egy skalárt. Az így definiált függvénynek a fentiek szerint potenciálnak kell lennie – ha létezik egyáltalán potenciál. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha a görbementi integrál független a görbe választásától, akkor az egyenes szakasz menti integrál, mint végpontjának függvénye potenciál. Ezt az egyváltozós esettel analóg módon lehet belátni. (Érdekes módon, a görbétől való függetlenség feltételében nem is kell az összes lehetséges görbe menti integrált figyelembe venni, hanem – ahogy majd az alábbi tétel bizonyításában látni fogjuk – elég csak a háromszögek élei mentén való integrálásra szorítkozni.) Mivel egyenes szakaszok mentén vett integrállal definiált függvényt természetesen csak olyan halmazon lehet értelmezni, ahol található olyan rögzített pont, melyből minden halmazbeli pontba vezet a halmazon belül egyenes szakasz, azaz ahonnan minden halmazbeli pont "látható", a bizonyításban ilyen tulajdonságú nyílt halmazokra, ún. csillagszerű tartományokra szorítkozunk:



Most megadjuk a fent vázolt bizonyításhoz szükséges fogalmak pontos meghatározását:

### 3.29 Definíció

Legyen  $n$  tetszőleges pozitív egész.

(1) Legyenek  $p, q \in \mathbf{R}^n$  tetszőlegesek,  $p \neq q$ . Az  $r = r(t) = p + t(q - p)$ ,  $t \in [0, 1]$  egyenlettel definiált görbét a  $p$ -t és  $q$ -t összekötő szakasznak nevezzük, és  $[p, q]$ -val jelöljük. Egy ponthármasról azt mondjuk, hogy **egy egyenesbe esnek**, ha van olyan szakasz, mely mindhármát tartalmazza.

(2) A  $T \subseteq \mathbf{R}^n$  görbét **háromszögnek** nevezzük, ha vannak olyan nem egy egyenesbe eső  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^n$  pontok, hogy a  $[p_1, p_2]$ ,  $[p_2, p_3]$  és  $[p_3, p_1]$  szakaszok  $T$  egy lefedését adják.  $p_1, p_2$  és  $p_3$  a háromszög **csúcsai**, a lefedő szakaszok pedig a háromszög **oldalai**.

(3) Az  $S \subseteq \mathbf{R}^n$  nyílt halmazt **csillagszerű tartománynak** nevezzük, ha van olyan  $s \in S$ , hogy minden  $x \in S$  esetén  $[s, x] \subseteq S$ . Egy ilyen  $s$  pontot  $S$  **csillagpontjának** nevezünk.

Csillagszerű tartomány például az egész sík, bármely félsík és körlap, általában minden konvex halmaz, de ilyen például az a nem konvex halmaz is, melyet úgy kapunk, hogy valamelyik síknegyedlet elhagyjuk

a síkból. Másrészt nem csillagszerű tartomány például a körgyűrű.

### 3.30 Jelölés

$$\int_p^q v \, dr = \int_{[p,q]} v \, dr \quad \text{ha} \quad p \neq q \quad \text{és} \quad \int_p^p v \, dr = 0.$$

Most a szakaszoknak, háromszögeknek és csillagszerű tartományoknak azokat a szemléletesen nyilvánvaló és formálisan is definíciójukból közvetlenül bizonyítható elemi tulajdonságait fogalmazzuk meg, melyeket a későbbiekben fel fogunk használni.

### 3.31 Megjegyzések

(1)(a) Szakasz definíciója alapján nyilvánvalóan minden szakasz elemi ív.

(b) A 3.23 (2) megjegyzésből adódóan

$$-[p, q] = [q, p], \quad \text{így} \quad \int_q^p v \, dr = - \int_p^q v \, dr.$$

(2)(a) A normáltartomány definícióját használva egyszerű analitikus síkgeometria feladat annak ellenőrzése, hogy minden háromszög normál térrész (speciálisan normáltartomány) határa (lásd a 3.7.1 pont (6) feladatot alább).

(b) Az 1.26 (11) és (10)(b) feladatok következményeképpen minden háromszög zárt egyszerű ív.

(3) Alább a 3.7.1 pont (4) feladatban megmutatjuk, hogy minden csillagszerű tartomány egy háromszöggel együtt tartalmazza az általa határolt normáltartományt is.

(4) A definíciókra támaszkodva nagyon könnyű belátni (lásd a 3.7 pont (5) feladatot alább), hogy azonos kezdő- és végpontú szakaszok esetén mind az általuk lefedett halmazok, mind pedig a rajtuk vett integrálok azonosak, azaz ha az  $L_1$  és  $L_2$  szakaszok egyenletei  $r_1 = r_1(t)$ ,  $t \in [a_1, b_1]$  és  $r_2 = r_2(t)$ ,  $t \in [a_2, b_2]$ , továbbá  $L_1$  és  $L_2$  kezdő- ill. végpontjai megegyeznek, akkor

$$\text{Rg } r_1 = \text{Rg } r_2$$

és

$$\int_{L_1} v \, dr = \int_{L_2} v \, dr \quad \text{bármely } \text{Rg } r_1 = \text{Rg } r_2\text{-n folytonos } v \text{ esetén.}$$

(5) Mivel (3) alapján tetszőleges háromszög *felosztható* olyan szakaszokra, melyeken a vonalmenti integrálok azonosak az oldalakon vett vonalmenti integrálokkal és három egy egyenesbe eső pont esetén a lefedett szakasz *felosztható* olyan szakaszokra, melyeken az integrál megegyezik a felosztás elemein vett integrállal, így az 1.22 (1)(b) állítás alapján háromszögeken és egy egyenesbe eső szakaszokon az integrál additív, azaz egyrészt bármely egy egyenesbe eső  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  pont esetén

$$\int_{p_1}^{p_3} v \, dr = \int_{p_1}^{p_2} v \, dr + \int_{p_2}^{p_3} v \, dr,$$

másrészt ha valamely  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  csúcsú háromszögön a vonalmenti integrál nulla, akkor

$$\int_{p_1}^{p_2} v \, dr + \int_{p_2}^{p_3} v \, dr + \int_{p_3}^{p_1} v \, dr = 0,$$

tehát (1)(b) miatt ekkor is

$$\int_{p_1}^{p_3} v \, dr = \int_{p_1}^{p_2} v \, dr + \int_{p_2}^{p_3} v \, dr.$$

(6) Az 1.26 (2)(b) és (11) feladatok következményeként (1)(a) alapján adódik, hogy csillagszerű tartomány összefüggő halmaz.

Fenti tények birtokában már könnyen megmutatható, hogy csillagszerű tartományon a 3.28 Tétel megfordítható:

### 3.32 Tétel

Legyen  $S \subseteq \mathbf{R}^2$  csillagszerű tartomány és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^2$  folytonos vektorfüggvény. Az alábbi feltételek ekvivalensek:

- (1)  $v$ -nek van potenciálja  $S$ -en.
- (2)  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső két pont közötti  $G$ -beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem.
- (3)  $v$  görbementi integrálja minden  $S$ -be eső zárt egyszerű íven nulla.
- (4)  $\operatorname{rot} v = 0$  az egész  $S$ -en, amennyiben  $v \in C_1(G)$ .

BIZONYÍTÁS.

A bizonyítás azon alapul, hogy megmutatjuk a tételben szereplő feltételek és az alábbi feltétel ekvivalens voltát:

(5)  $v$  görbementi integrálja minden  $S$ -beli háromszögön nulla.

(a) (5)  $\implies$  (1) Tegyük fel, hogy  $v$  görbementi integrálja minden  $S$ -beli háromszögön nulla. Legyen  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^2$  tetszőleges. Ekkor a 3.31 (5) megjegyzés alapján, akár egy egyenesen vannak ezek a pontok, akár nem, fennáll, hogy

$$(*) \quad \int_{p_1}^{p_3} v \, dr - \int_{p_1}^{p_2} v \, dr = \int_{p_2}^{p_3} v \, dr$$

Megmutatjuk, hogy amennyiben  $S$  csillagpontja  $s \in S$ , akkor a minden  $r \in S$  esetén értelmezett

$$u(r) = \int_s^r v \, dr$$

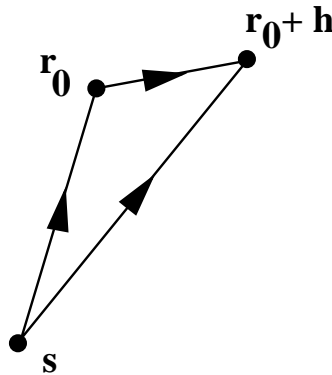
függvény potenciálja  $v$ -nek  $S$ -en. Azt kell tehát belátni, hogy tetszőleges  $r_0 \in S$  esetén

$$\frac{u(r_0 + h) - u(r_0) - v(r_0) \cdot h}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \rightarrow 0,$$

hiszen ez a definíció szerint pont azt jelenti, hogy  $\operatorname{grad} u \Big|_{r_0} = v(r_0)$ .

(\*)-ből

$$u(r_0 + h) - u(r_0) = \int_s^{r_0+h} v \, dr - \int_s^{r_0} v \, dr = \int_{r_0}^{r_0+h} v \, dr$$



és  $[r_0, r_0 + h]$  egyenlete:  $r(t) = r_0 + th$ ,  $t \in [0, 1]$ , tehát  $\dot{r}(t) = h$ . Ezért

$$\int_{r_0}^{r_0+h} v(r_0) \, dr = \int_0^1 v(r_0) \cdot \dot{r}(t) \, dt = \int_0^1 v(r_0) \cdot h \, dt = (v(r_0)) \cdot h \int_0^1 dt = v(r_0) \cdot h,$$

következésképp,

$$u(r_0 + h) - u(r_0) - v(r_0) \cdot h = \int_{r_0}^{r_0+h} v \, dr - \int_{r_0}^{r_0+h} v(r_0) \, dr = \int_{r_0}^{r_0+h} (v(r) - v(r_0)) \, dr.$$

Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges. Mivel  $v \in C(G)$ , így van  $\delta > 0$ , hogy  $|v(r) - v(r_0)| < \varepsilon$ , ha  $|r - r_0| < \delta$ , ezért  $|v(r) - v(r_0)| < \varepsilon$ , ha  $r \in [r_0, r_0 + h]$  és  $|h| < \delta$  (hiszen ekkor  $r = r_0 + th$  valamely  $0 \leq t \leq 1$ -re, tehát  $|r - r_0| = |th| = |t||h| \leq |h| < \delta$ ). Mindezekkel

$$|u(r_0 + h) - u(r_0) - v(r_0) \cdot h| = \left| \int_{r_0}^{r_0+h} (v(r) - v(r_0)) \, dr \right| \leq \int_{r_0}^{r_0+h} |v(r) - v(r_0)| \, |dr| <$$

$$< \int_{r_0}^{r_0+h} \varepsilon \, |dr| = \varepsilon \int_{r_0}^{r_0+h} |dr| = \varepsilon|h|, \quad \text{tehát}$$

$$\left| \frac{u(r_0 + h) - u(r_0) - v(r_0) \cdot h}{|h|} \right| = \frac{|u(r_0 + h) - u(r_0) - v(r_0) \cdot h|}{|h|} < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |h| < \delta,$$

amit bizonyítanunk kellett.

(b) (1)  $\implies$  (2)  $\implies$  (3): 3.28 Tétel és 3.24 Állítás.

(c) (3)  $\implies$  (5): 3.31 (2)(b) megjegyzés

Továbbá, ha  $v \in C_1(G)$ , akkor

(d) (1)  $\implies$  (4): 3.28 Tétel.

(e) (4)  $\implies$  (5): 3.31 (2)(a) megjegyzés és Stokes tétel.

### 3.6.2 Potenciálkeresés

Az alábbiakban két egyszerű példán keresztül ismertetünk két módszert, melyek segítségével a potenciál – ha létezik – könnyen meghatározható.

#### a) Parciális differenciálegyenletrendszer megoldása

Legyen

$$v = v(x, y) = (x(1 + y^2), y(1 + x^2))$$

az a vektorfüggvény, melynek potenciálját meg akarjuk határozni.

Mivel  $\text{rot } v = 2xy - 2xy = 0$ , így  $v$ -nek tényleg van potenciálja az egész síkon. Legyen  $u$  ez a potenciál. Ekkor  $(v_1, v_2) = v = \text{grad } u = (u_x, u_y)$  miatt a

$$(*) \quad v_1 = u_x \quad \text{és} \quad v_2 = u_y$$

összefüggéseknek fenn kell állniuk. Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk.

Induljunk ki például az

$$u_x = v_1 = x(1 + y^2)$$

egyenletből. Ekkor  $x$  szerint integrálva

$$(**) \quad u = \frac{x^2}{2}(1 + y^2) + c(y)$$

valamely  $c = c(y)$  csak  $y$ -től függő differenciálható függvényre. Ebből,  $v$  definíciójából és  $(*)$ -ből

$$y(1 + x^2) = v_2 = u_y = x^2 y + c'(y),$$

azaz  $c'(y) = y$ , tehát valamely  $c$  konstansra

$$c(y) = \frac{y^2}{2} + c,$$

amit visszahelyettesítve  $(**)$ -ba,

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + x^2y^2 + y^2) + c.$$

Ez az eredmény persze ellenőrizhető, valóban

$$\text{grad } u = (u_x, u_y) = (x + xy^2, y + yx^2) = v.$$

Nyilván megtehettük volna, hogy először  $u_y = v_2 = y(1 + x^2)$ -ből határozzuk meg  $u$ -t egy  $c = c(x)$  erejéig, majd ebből az  $u$ -ból kiszámított  $u_x$  felhasználásával, az  $u_x = v_1$  egyenlet segítségével adódó  $c'$  integrálása után kapjuk meg  $u$  végleges formáját.

Végül természetesen az eljárás *csak* akkor vezethet helyes eredményre, ha tényleg létezik potenciál. (Próbáljuk ki, mi adódik akkor, ha a  $v = \text{CROSS}(r)$  függvény ( $\text{rot } v = 2$  miatt sehol sem létező) potenciálját akarnánk meghatározni így!) Ugyanez igaz persze bármely, a potenciál meghatározására szolgáló eljárásra, így az alább ismertetendő módszerre is.

#### b) Origókezdőpontú szakasz menti vonalintegrál kiszámítása

Legyen  $n$  tetszőleges nemnegatív egész és

$$v = v(r) = r|r|^n$$

az a vektorfüggvény, melynek potenciálját meg akarjuk határozni.

Mivel ha  $r \neq 0$ , akkor  $\text{grad } |r|^n = n|r|^{n-1}\text{grad } |r| = n|r|^{n-1}\frac{r}{|r|} = n|r|^{n-2}r$ , azaz  $\text{grad } |r|^n \parallel r$ , így  $\text{CROSS}(r) \perp r \parallel \text{grad } |r|^n$ . Ebből adódóan, felhasználva, hogy  $\text{rot } r = 0$ ,  $\text{rot } v = |r|^n \text{rot } r - \text{CROSS}(r) \cdot \text{grad } |r|^n = 0$ , Megmutatjuk, hogy  $v$  rotációja az origóban is nulla. Mivel  $n = 0$  esetén  $\text{rot } v = \text{rot } r = 0$  mindenütt, feltehetjük, hogy  $n \geq 1$ . Azt fogjuk bebizonyítani, hogy az origóban  $v$  deriváltoperátora nulla, amiből persze már közvetlenül adódik, hogy a deriváltoperátor antiszimmetrikus része és vele együtt annak vektorinvariánsa, tehát  $v$  rotációja is nulla. Definíció szerint a  $D$  operátor a  $v$  vektorfüggvény  $r_0 \in \text{Int Do } v$ -beli deriváltoperátora pontosan akkor, ha

$$h \rightarrow 0 \quad \text{esetén} \quad \frac{v(r_0 + h) - v(r_0) - D h}{|h|} \rightarrow 0.$$

A mi esetünkben, mivel  $v(0) = 0|0|^n = 0$ , ez annak megmutatását jelenti, hogy

$$\frac{v(0 + h) - v(0) - 0 h}{|h|} = \frac{v(h) - 0 - 0 h}{|h|} = \frac{v(h)}{|h|} \rightarrow 0.$$

Nos,  $v(h) = h|h|^n$ , így  $n \geq 1$  miatt

$$\frac{v(h)}{|h|} = \frac{h|h|^n}{|h|} = h|h|^{n-1} \rightarrow 0.$$

Beláttuk tehát, hogy  $\text{rot } v = 0$  mindenütt, következésképpen létezik az  $u$  potenciál az egész síkon. Határozzuk meg ezt egy olyan  $L$  szakasz mentén vett vonalintegrál segítségével, melynek kezdőpontja az origó, végpontja pedig  $r$  !

$L$  egyenlete:

$$s = s(t) = t r, \quad t \in [0, 1],$$

így  $\dot{s}(t) = r$ , tehát

$$\begin{aligned} u(r) &= \int_0^r v \, dr = \int_0^1 v(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \, dt = \int_0^1 s(t)|s(t)|^n \cdot \dot{s}(t) \, dt = \int_0^1 t r |t r|^n \cdot r \, dt = \\ &= \int_0^1 t |t|^n |r|^n (r \cdot r) \, dt = |r|^n (r \cdot r) \int_0^1 t |t|^n \, dt = |r|^{n+2} \int_0^1 t^{n+1} \, dt = |r|^{n+2} \frac{t^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 = \frac{|r|^{n+2}}{n+2}. \end{aligned}$$

És valóban, mivel  $u$  az origó kivételével deriválható függvények összetett függvénye, láncszabállyal  $r \neq 0$  esetén

$$\text{grad } \frac{|r|^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{n+2} \text{grad } |r|^{n+2} = \frac{1}{n+2} (n+2) |r|^{n+1} \text{grad } |r| = |r|^{n+1} \frac{r}{|r|} = r |r|^n.$$

No de mi a helyzet az origóban? Megmutatjuk, hogy  $u$  ott is potenciál.  $v(0) = 0|0|^n = 0$ , tehát azt kell megmutatnunk, hogy  $u$  gradiense az origóban valóban nulla. A gradiens definíciója szerint a  $g(r_0)$  vektor gradiense  $u$ -nak valamely  $r_0 \in \mathbf{R}^2$  pontban akkor és csak akkor ha

$$h \rightarrow 0 \quad \text{esetén} \quad \frac{u(r_0 + h) - u(r_0) - g(r_0) \cdot h}{|h|} \rightarrow 0.$$

Nomármost, legyen  $r_0 = 0$  és  $g(r_0) = 0$ . Ekkor  $u(r_0) = u(0) = \frac{1}{n+2}|0|^{n+2} = 0$ , így

$$\begin{aligned} \frac{u(r_0 + h) - u(r_0) - g(r_0) \cdot h}{|h|} &= \frac{u(0 + h) - u(0) - 0 \cdot h}{|h|} = \frac{u(h) - 0 - 0}{|h|} = \\ &= \frac{u(h)}{|h|} = \frac{\frac{1}{n+2}|h|^{n+2}}{|h|} = \frac{1}{n+2}|h|^{n+1} \end{aligned}$$

és persze  $n \geq 0$  miatt tényleg

$$\frac{1}{n+2}|h|^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \rightarrow 0,$$

ami fentiekkel pont azt jelenti, hogy

$$\text{grad } u \Big|_0 = 0 = v(0).$$

Hangsúlyozni kell, hogy a módszer *csak* akkor vezet *biztosan* helyes eredményre, ha az origó csillagpontja a tartománynak, melyen a potenciál létezését garantáló 3.32 Tétel feltételei fennállnak (tehát, többek között, a vizsgált függvény folytonos), hiszen az origókezdőpontú szakaszon vett integrál csak azon  $r$  pontokban adja meg a potenciált, melyhez van olyan  $r$  végpontú origókezdőpontú szakasz, mely teljesen a tartományba esik. Másrészt persze előfordulhat, hogy ez a feltétel nem áll fenn és a módszerrel kapott eredmény mégis helyes. Ezt nyilván közvetlen deriválással egyszerűen ellenőrizhetjük.

Természetesen az origókezdőpontú szakasz mellett bármely olyan más görbe típus, melyen egyszerű integrálni felhasználható arra, hogy a rajta vett integrál segítségével meghatározzuk a potenciált. Gyakran például a koordinátatengelyekkel párhuzamos görbék menti integrálokat szokták potenciálkeresésre használni.

### 3.6.3 A ponttöltés erőterének és duálisának potenciálja

A 3.4 pontban tárgyalt két fizikai alkalmazásról elmondottakat most kiegészítjük a potenciálok megadásával. A két vektorfüggvény a

$$v(r) = \frac{r}{|r|^2} \quad \text{és} \quad w(r) = \frac{\text{CROSS}(r)}{|r|^2}.$$

Már láttuk, hogy mindkét függvény rotációja az origóval kiszúrt teljes síkon nulla, így a 3.32 Tétel alapján a sík bármely, az origót nem tartalmazó csillagszerű tartományán van potenciáljuk. A potenciálok kiszámítására a fent ismertetettek módszerek közül csak az első alkalmazható, mert a függvények az origóban nem léteznek (és – ahogy már a 3.4 pontban láttuk – folytonossá sem tehetőek).

#### a) Ponttöltés erőtere

Ha  $x^2 + y^2 \neq 0$ , akkor

$$v = v(r) = \frac{r}{|r|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, y).$$

Ebből

$$u_x = v_1 = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

tehát

$$(*) \quad u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c(y),$$

így

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} + c'(y),$$

amiből

$$u_y = v_2 = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

miatt  $c'(y) = 0$ , vagyis  $c(y)$  konstans, tehát választható 0-nak, ezért (\*)-gal egy potenciál:

$$u = u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0,$$

vagyis

$$u = u(r) = \ln |r| \quad \text{ha } r \neq 0.$$

Nos, ebből láncszabállyal azt kapjuk, hogy

$$\text{grad } \ln |r| = \frac{1}{|r|} \text{grad } |r| = \frac{1}{|r|} \frac{r}{|r|} = \frac{r}{|r|^2} \quad \text{minden } r \neq 0 \text{ esetén,}$$

tehát  $v$ -nek nem csak valamely csillagszerű tartományon, hanem az origóval kiszűrt teljes síkon, azaz egész értelmezési tartományán van potenciálja, egy ezek közül az  $u(r) = \ln |r|$  függvény. Következésképpen, a 3.28 Tétel alapján  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső zárt egyszerű íven nulla (így az origót a belsejében tartalmazó normál térrész határáként adódó zárt egyszerű ívre is az), amint azt a 3.4 potban láttuk, legalábbis normál térrészek határaiként előálló zárt egyszerű ívek esetén.

A tér ekvipotenciális felületei (azaz azon pontok halmaza, melyek mentén a potenciál állandó, tehát valamely  $c$  konstansra  $u = u(r) = c$ ) az origóközéppontú körök, hiszen ha  $R > 0$  rögzített és  $|r| = R$ , akkor  $u = u(r) = \ln R$  állandó. Ezek mentén tehát a potenciál nem változik, hiszen ezek bármely szakaszán a  $v$  vonalmenti integrálja nulla, mert a kör érintője merőleges  $v$ -re, vagyis a körök, mint kétdimenziós valódi felületek normálisát adja meg  $\text{grad } u = v$ . Valóban,  $v$  - lévén sugárirányú - minden pontban az azon a ponton áthaladó kör érintőjének normálisa. Másszóval,  $u$  a körök mentén nem változik, leggyorsabb változási iránya pedig éppen az azokra merőleges irány, a  $v = \text{grad } u$  iránya.

## b) Pontszerű vezető mágneses tere

### 1. POTENCIÁL A JOBB- ÉS BALFÉLSÍK BELSEJÉBEN

Ha  $x^2 + y^2 \neq 0$ , akkor

$$w = w(r) = \frac{\text{CROSS}(r)}{|r|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x).$$

Ebből  $x \neq 0$  esetén

$$u_x = v_1 = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

tehát

$$(**) \quad u = \arctg \frac{y}{x} + c(y),$$

így

$$u_y = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + c'(y),$$

amiből

$$u_y = v_2 = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

miatt  $c'(y) = 0$ , vagyis  $c(y)$  konstans, így választható 0-nak, ezért (\*\*)-gal (minden olyan nyílt halmazon, ahol  $x \neq 0$ ) egy potenciál:

$$u = u(x, y) = \arctg \frac{y}{x}.$$

És valóban ellenőrizhető, hogy ha  $x \neq 0$ , akkor

$$\text{grad } \arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x).$$

Igen ám, de, ha ennyivel meglegednénk, az azt jelentené, hogy  $w$ -nek legfeljebb a jobb ill. bal félsík belsejében van potenciálja, hisz ezeknél bővebb halmazok már belemetszenek az  $x = 0$  egyenletű  $y$  tengelybe. Ez viszont ellentmond annak, amit már vizsgálatunk elején megjegyeztünk, hogy – mivel mindkét függvény rotációja az origóval kiszúrt teljes síkon nulla – a 3.32 Tétel alapján  $w$ -nek a sík bármely, az origót nem tartalmazó csillagszerű tartományán van potenciálja! Például bármely origóból induló, az origót tartalmazó félegyenes pontjaitól megfosztott (a félegyenes mentén **felmetsett**) sík is egy, az origót nem tartalmazó csillagszerű tartomány (a félegyenes másik felének bármely pontja csillagpontja), úgyhogy itt is kell lennie potenciálnak, pedig ez nyilván vagy a bal vagy a jobb nyílt félsíknál bővebb halmaz, belemetsz az  $y$  tengelybe! Másszóval a fenti függvénynek "folytathatónak", kiterjeszhetőnek kell lennie, méghozzá folytonosan deriválható módon a jobb ill. bal félsíknál bővebb halmazokra is!

## 2. A POTENCIÁL FOLYTONOS KITERJESZTÉSE A POZITÍV FÜGGŐLEGES FÉLTENGELYRE

A jobb és bal félsíkok belsejében minden konstans  $c$ -re

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c$$

is potenciál, így nyilván az

$$u^+(r) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

a jobb félsíkon, míg az

$$u^-(r) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$$

a bal félsíkon potenciálja  $w$ -nek. Másrészt, mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

miatt a pozitív  $y$  féltengely bármely  $(0, y_0)$  pontjára minden  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\delta > 0$ , hogy

$$|u^+(x, y) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad |(x, y) - (0, y_0)| < \delta$$

és

$$|u^-(x, y) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad x < 0, \quad |(x, y) - (0, y_0)| < \delta,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy az

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+ & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0, y > 0 \\ u^- & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \quad \text{azaz az} \quad u(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény folytonos a jobb és a bal félsíkon kívül a pozitív  $y$  féltengely pontjaiban is, azaz az egész, a negatív zárt  $y$  féltengely mentén felmetsett nyílt

$$S^- = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \text{ és } y \leq 0\}.$$

síkon. Ez nyilván nyílt és összefüggő halmaz. Nos,  $u$  nem csak folytonos, de deriválható is  $S^-$ -on és egész  $S^-$ -on tényleg potenciál, azaz *mindenütt*  $\operatorname{grad} u = v$ ! Ez megmutatható a gradiens definíciója alapján közvetlenül is (lásd a 3.7.1 pont (7) feladatát), de egyszerűbb annak bizonyításán keresztül, hogy parciálisai folytonosak, hisz ebből következik a deriválhatóság.

## 3. A KITERJESZTETT POTENCIÁL PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI A JOBB ÉS BAL FÉLSÍK BELSEJÉBEN

A nyílt jobb és bal félsíkon, azaz az  $y$  tengely pontjaitól különböző pontokban persze  $u$  folytonosan deriválható, hiszen ilyen tulajdonságú függvényekből áll elő alaplételemekkel ill. összetett függvény képzés segítségével, melyek mindegyike megőrzi a folytonos deriválhatóságot. Ezért a gradiens létezik és komponensei a parciális deriváltak, melyek meghatározásához felhasználhatóak az alaplételemekkel ill. az összetett függvény deriváltjára vonatkozó összefüggések, tehát

$$u_x(x, y) = \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad u_y(x, y) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{ha} \quad x \neq 0.$$

Ezekből persze valóban, az  $y$  tengely pontjait kivéve, mindenütt

$$\text{grad } u = (u_x, u_y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = v,$$

azaz  $u$  potenciál a jobb és bal nyílt félsíkon.

#### 4. A KITERJESZTETT POTENCIÁL PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI A POZITÍV FÜGGŐLEGES FÉLTENGELYEN

(a) Először  $u_x$  létezését és folytonosságát vizsgáljuk meg a pozitív  $y$  féltengely pontjaiban. Legyen  $y > 0$  tetszőleges. A parciális derivált definíciója szerint, felhasználva a L'Hospital-szabályt,

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, y) - u(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, y) - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} u(x, y) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{y^2} = -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Tehát bármely  $y > 0$  esetén létezik  $u$ -nak  $(0, y)$ -ban  $x$  szerinti parciális deriváltja, mégpedig

$$(1) \quad u_x(0, y) = -\frac{1}{y}.$$

Megmutatjuk, hogy  $u_x$  folytonos a pozitív  $y$  féltengely pontjaiban is. Legyen  $P_0$  rajta a pozitív  $y$  féltengelyen, azaz legyen  $P_0 = (0, y_0)$  valamely rögzített  $y_0 > 0$ -ra. Ekkor minden  $\varepsilon > 0$  esetén van  $\delta > 0$ , hogy

$$|u_x(x, y) - u_x(P_0)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |(x, y) - P_0| < \delta$$

akár rajta van  $(x, y)$  a pozitív  $y$  féltengelyen, akár nincs. Valóban, az első esetben (1)-ből következően

$$\lim_{(x, y) \rightarrow P_0} u_x(0, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow P_0} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{y_0} = u_x(P_0),$$

míg a másodikban a félsíkok belsejére a fenti 3.-ban kapott

$$u_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

eredményből adódóan

$$\lim_{(x, y) \rightarrow P_0} u_x(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow P_0} -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y_0}{y_0^2} = -\frac{1}{y_0} = u_x(P_0).$$

(b) Ami  $u_y$ -t illeti, a pozitív  $y$  tengely mentén való létezése és folytonossága hasonlóan látható be, mert egyrészt ha  $y > 0$  tetszőleges rögzített, akkor a parciális derivált definíciója alapján

$$u_y(0, y) = \frac{d}{dy} u(0, y) = \frac{d}{dy} \frac{\pi}{2} = 0,$$

tehát létezik  $u$ -nak minden  $y > 0$  esetén  $(0, y)$ -ban  $y$ -szerinti parciális deriváltja, mégpedig

$$(2) \quad u_y(0, y) = 0.$$

Végül  $u_y$ -nek a pozitív  $y$  féltengely pontjaiban való folytonosságának vizsgálatához legyen  $P_0 = (0, y_0)$ , ahol  $y_0 > 0$  tetszőleges rögzített. Ekkor  $u_y$  folytonossága  $P_0$ -ban abból adódik, hogy minden  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\delta > 0$ , melyre

$$|(x, y) - P_0| < \delta \text{-ből következik} \quad |u_y(x, y) - u_y(P_0)| < \varepsilon$$

akár rajta van  $(x, y)$  a pozitív  $y$  féltengelyen, akár nincs, hiszen ugyanúgy, ahogy előbb, egyrészt persze (2)-vel

$$\lim_{(x, y) \rightarrow P_0} u_y(0, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow P_0} 0 = 0 = u_y(P_0),$$

másrészt a fenti 3.-ból a félsíkok belsején érvényes

$$u_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

összefüggéssel

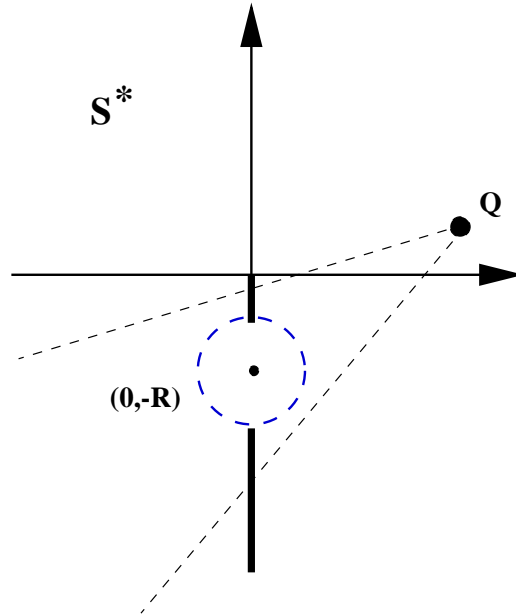
$$\lim_{(x,y) \rightarrow P_0} u_y(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow P_0} \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 = u_x(P_0).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a fenti 2.-ben  $S^-$ -en, azaz a negatív  $y$  zárt féltengely mentén felvágott síkon definiált  $u$  függvény *folytonosan deriválható* az egész  $S^-$ -en és itt mindenütt

$$\text{grad } u = (u_x, u_y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = v,$$

másszóval  $u$  potenciál az egész  $S^-$ -on.

Egyetlen kérdést kell még megvizsgálnunk, nevezetesen azt, hogy vajon nincs-e  $S^-$ -nél bővebb nyílt és összefüggő halmaz, melyen létezik potenciál. Nos, a válasz az, hogy nincs. Legyen ugyanis  $R > 0$  tetszőleges és vegyük hozzá  $S^-$ -hez a  $(0, -R)$  pontot egy bármely  $\varepsilon > 0$  sugarú  $S_\varepsilon(0, -R)$  környezetével együtt (ez utóbbit azért kell hozzávennünk  $(0, R)$ -el együtt, hogy a bővebb halmaz még mindig nyílt maradjon), és legyen  $S^* = S^- \cup S_\varepsilon(0, -R)$  az ily módon kapott új halmaz.  $S^*$  is nyilván nyílt és összefüggő halmaz, de az origóközéppontú  $R$  sugarú kör már benne fekszik  $S^*$ -ban, tehát ha volna az  $S^*$  halmazon potenciálja  $v$ -nek, akkor az ezen kör mentén vett vonalintegráljának a 3.28 Tétel szerint nullának kellene lennie. A 3.4 pontban azonban már láttuk, hogy ennek az integrálnak az értéke  $2\pi \neq 0$ ! Vegyük azt is észre, hogy ez nem mond ellent annak a ténynek, amit szintén a 3.4 pontban mutattunk meg, hogy  $\text{rot } v = 0$  még az új  $S^*$  halmaz minden pontjában is, bár a 3.32 Tétel szerint a rotáció nulla volta maga után vonja a potenciál létezését (nyilván  $v \in C_1(S^*)$ , hisz  $v$  csak az origóban "romlik el"). Igen ám, de a tétel csak csillagszerű tartományokra vonatkozik és, bár  $S^-$  még csillagszerű, de már nem bővíthető oly módon, hogy az is maradjon. Valóban,  $S^*$  már nem csillagszerű tartomány: nyilván ha  $Q \in S^*$  nincs az  $y$  tengelyen, akkor egyenes szakasszal  $Q$ -ból a  $Q$ -t az origóval összekötő egyenes által definiált félsíkok közül az egyik pontjai nem érhetőek el szakasszal  $Q$ -ból kivéve azokat, melyek a  $Q$ -t az  $S_\varepsilon(0, -R)$  valamely pontjával összekötő egyenesen vannak, míg ha  $Q$  az  $y$  tengelyen van, akkor  $S_\varepsilon(0, -R)$   $y$  tengelyen fekvő pontjai nem érhetőek el  $Q$ -ból:



A tér ekvipotenciális felületeit persze az előző példa duális állításai írják le. Ezek az origón átmenő egyenesek, hiszen ha  $c \in \mathbf{R}$  rögzített és  $\frac{y}{x} = c$ , akkor  $u = u(r)$  állandó. Ezen egyenesek mentén tehát a potenciál nem változik, mert bármely szakaszukon a  $v$  vonalmenti integrálja nulla, hisz érintőjük merőleges  $v$ -re. Ezen egyenesek, mint kétdimenzióbeli valódi felületek normálisát adja meg  $\text{grad } u = v$ . Valóban  $v$  - lévén sugárra merőleges irányú- minden pontban az origót a ponttal összekötő egyenes normálisá. Másszóval,  $u(r)$  az egyenesek mentén nem változik, leggyorsabb változási iránya pedig éppen az azokra merőleges irány, a  $v = \text{grad } u$  iránya.

Vegyük észre azt is, hogy az  $u = u(x, y)$  potenciál pontosan az  $(x, y)$  pontnak a pozitív  $x$  tengellyel bezárt szögét adja meg a  $(-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$  tartományban!

Végül érdemes még megemlíteni, hogy az előzőekkel teljesen analóg módon lehet belátni, hogy *bármely* az origóból induló, az origót tartalmazó félegyenes mentén felmetszett síkon van  $v$ -nek potenciálja és ennek a potenciálnak meghatározása pontosan ugyanúgy történik, mint a fenti  $u$  kiszámítása (lásd a 3.7.1 pont (7) feladatát) alább). Például az

$$u^*(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y} & \text{ha } y < x \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } y = x, x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y} + \pi & \text{ha } y > x \end{cases}$$

függvény potenciál az  $y = x$  egyenesnek a harmadik síknegyedbe eső fele mentén felmetszett síkon. ( $u^*$  az  $(x, y)$  pontnak az  $y = -x$  egyenesnek a negyedik síknegyedbe eső felével bezárt szögét adja meg.) Abból azonban, hogy *bármely* origókezdőpontú félegyenes mentén felmetszett síkon van  $v$ -nek potenciálja, a 3.28 Tétel miatt az is következik (amit már más eszközökkel az origót nem tartalmazó normál térrészek határaiként adódó zárt egyszerű ívekre láttunk), hogy azon egyszerű ívek esetén, melyekhez van az ívet nem metsző origó kezdőpontú félegyenes (az ilyen ívekről azt mondjuk, hogy "nem takarják el az origót") a görbementi integrál nulla.

### 3.6.4 Az egzakt differenciálegyenlet

A potenciálelmélet egyik alkalmazásaként megmutatjuk, hogy a potenciálkeresés problémája átfogalmazható a differenciálegyenletek terminusaiban is.

#### 3.33 Definíció

Legyen  $g = g(x, y)$  és  $h = h(x, y)$  valamely  $H \subseteq \mathbf{R}^2$ -en értelmezett függvények. Azt a  $H$ -n értelmezett  $F = F(x, y)$  függvényt, melyre  $F_x = g(x, y)$  és  $F_y = h(x, y)$  minden  $(x, y) \in H$  esetén, a  $(g, h)$  függvénypár  $H$ -beli **primitív függvényének** nevezzük.

Ez a fogalom nyilván a potenciál átfogalmazása vektorfüggvények helyett kétváltozós függvényekre. A differenciálegyenletek alább definiálandó típusának meghatározásához felelevenítjük az elsőrendű differenciálegyenlet és a kétváltozós implicit függvény probléma megoldhatóságának fogalmát:

#### 3.34 Definíció

(1) Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt, összefüggő halmaz és  $f(x, y)$   $H$ -n folytonos kétváltozós függvény. Azt mondjuk, hogy egy  $I \subseteq \mathbf{R}$  intervallumon értelmezett deriálható egyváltozós  $y = y(x)$  függvény az  $y' = f(x, y)$  **differenciálegyenlet megoldása**  $H$ -n, ha

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{és} \quad (x, y(x)) \in H \quad \text{minden} \quad x \in I \quad \text{esetén.}$$

(2) Legyen  $F(x, y)$  tetszőleges kétváltozós függvény,  $c \in \mathbf{R}$  tetszőleges konstans és  $H \subseteq \mathbf{R}^2$ . Azt mondjuk, hogy egy  $I \subseteq \mathbf{R}$  intervallumon értelmezett egyváltozós  $y = y(x)$  függvény az  $F(x, y) = c$  (kétváltozós) **implicit függvény probléma megoldása**  $H$ -n, ha

$$F(x, y(x)) = c \quad \text{és} \quad (x, y(x)) \in H \quad \text{minden} \quad x \in I \quad \text{esetén.}$$

Nos, a kétváltozós implicit függvény probléma differenciálható megoldásai azonosak az egy speciális differenciálegyenlet típus megoldásaival:

#### 3.35 Definíció

Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  továbbá  $g = g(x, y)$  és  $h = h(x, y)$  folytonos  $H$ -n értelmezett függvények. Tegyük fel, hogy  $h(x, y) \neq 0$  minden  $(x, y) \in H$  esetén. A

$$g(x, y) + h(x, y) y' = 0$$

differenciálegyenletet **egzaktnak** nevezzük, ha a  $(g, h)$  függvéypárnak van primitív függvénye  $H$ -n.

### 3.36 Jelölés

Az egzakt differenciálegyenletet hagyományosan az alábbi alakban szokták megadni:

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0.$$

A következő állítás a 3.35 Definíció és a 3.32 Tétel nyilvánvaló következménye:

### 3.37 Állítás

Legyen  $g = g(x, y)$  és  $h = h(x, y)$  a  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  csillagszerű tartományon értelmezett folytonosan differenciálható függvények. A  $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$  differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt ha

$$g_y = h_x.$$

### 3.38 Állítás

Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^2$  nyílt, összefüggő halmaz,  $g$  és  $h$   $H$ -n folytonos függvények és legyen  $F$  a  $(g, h)$  függvéypár egy  $H$ -beli primitív függvénye. A

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet  $H$ -beli megoldásai azonosak az  $F(x, y) = c$ ,  $c \in \text{Rg} F$  implicit függvény problémák differenciálható  $H$ -beli megoldásaival.

BIZONYÍTÁS. Lagrange középértéktétellel és láncszabállyal:

$$F(x, y(x)) = c \quad \text{tetszőleges } x \in I\text{-re} \quad \text{iff} \quad F_x(x, y(x)) \cdot 1 + F_y(x, y(x)) y'(x) = 0 \quad \text{tetszőleges } x \in I\text{-re}$$

$$\text{iff} \quad g(x, y(x)) + h(x, y(x)) y'(x) = 0 \quad \text{tetszőleges } x \in I\text{-re}.$$

Az állítás alapján egy egzakt differenciálegyenlet megoldásához a differenciálegyenletben szereplő függvények által alkotott függvéypár primitív függvényének, azaz azon vektorfüggvény potenciáljának meghatározása vezet, melynek komponensei ezek a függvények. Következésképpen, a differenciálegyenlet megoldásához a potenciálkeresésnél megismert módszerek alkalmazhatóak.

### 3.39 Példa

Oldjuk meg az

$$x dx + y dy = 0, \quad y(0) = 2$$

kezdeti érték problémát!

Először is, a differenciálegyenlet tényleg egzakt:  $g(x) = x$ ,  $h(y) = y$ , így  $g_y = 0 = h_x$ . Egy primitív függvényt, azaz potenciált a 3.6.2 a) pontban ismertetett eljárással keresünk meg:

$$F_x = g(x) = x \rightsquigarrow F = \frac{x^2}{2} + c(y) \rightsquigarrow y = h(y) = F_y = c'(y) \rightsquigarrow c(y) = \frac{y^2}{2} \rightsquigarrow F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát az

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

megoldásai, tehát az origóközéppontú félkörök. A kezdeti érték probléma megoldásához pedig

$$\frac{0^2}{2} + \frac{2^2}{2} = c \rightsquigarrow c = 2 \rightsquigarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Tehát a kezdeti érték probléma megoldása az origóközéppontú  $R = 2$  sugarú pozitív félkör:

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

ELLENŐRZÉS. Egyrészt, nyilván  $y(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2$ , másrészt

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} \quad \text{miatt} \quad x + y y' = 0.$$

### 3.40 Példa (A szeparábilis differenciálegyenlet, mint egzakt differenciálegyenlet)

A szeparábilis differenciálegyenlet az alábbi alakú ( $g$  és  $h$  folytonos függvények,  $h$  sehol nem nulla):

$$y' = g(x) h(y).$$

Írjuk át ezt a következő formában:

$$g(x) - \frac{1}{h(y)} y' = 0.$$

Ez valóban egzakt, hiszen  $g_y = 0 = (\frac{1}{h(y)})_x$ . Az egyváltozós  $f = f(x)$  függvény egy primitív függvényének jelölésére az  $\int f(x) dx$  jelet használva, meghatározzuk azokat az implicit függvény problémákat, melyek megoldása szolgáltatja a differenciálegyenlet megoldását.

$$\begin{aligned} F_x = g(x) &\rightsquigarrow F = \int g(x) dx + c(y) \rightsquigarrow -\frac{1}{h(y)} = F_y = c'(y) \rightsquigarrow \\ c(y) = \int -\frac{1}{h(y)} dy &\rightsquigarrow F(x, y) = \int g(x) dx - \int \frac{1}{h(y)} dy \end{aligned}$$

Vagyis a 3.38 Állítás alapján a differenciálegyenlet általános megoldását a szóbajöhethető valós  $c$  számokkal adódó

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + c$$

implicit függvény problémák megoldásai adják. (Az implicit függvény problémákat az eredeti differenciálegyenletből formálisan úgy kaphatjuk meg, hogy abban  $y'$  helyett  $dy/dx$ -et írunk, az  $x$ -es és  $y$ -os tagokat (beleértve a  $dx$  és  $dy$ -t is) egy-egy oldalra rendezzük, majd meghatározzuk mindkét oldal primitív függvényeit.)

Illusztráló példaként megoldjuk az

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

differenciálegyenletet.

$$\begin{aligned} y' = \frac{y^2}{x^2} &\rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \rightsquigarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \rightsquigarrow \\ \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} + c &\rightsquigarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c \rightsquigarrow y = \frac{x}{1 - cx}. \end{aligned}$$

Tehát a differenciálegyenlet megoldásai:

$$y = \frac{x}{1 - cx}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ELLENŐRZÉS.

$$y' = \frac{(1 - cx) - x \cdot (-c)}{(1 - cx)^2} = \frac{1}{(1 - cx)^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

## 3.7 Feladatok

### 3.7.1 Elméleti feladatok

(1) Mutassunk példát olyan két azonos pontot összekötő görbékre, melyek *nem* egy zárt görbe lefedését adják!

(2) Mutassunk példát olyan görbére, mely nem egyszerű ív!

(3) **Poligon**nak nevezzük azokat a görbéket, melyek feloszthatóak szakaszokra. Azt mondjuk, hogy egy görbe **összeköti az  $a$  és  $b$  pontot** ha a görbe végpontjai  $a$  és  $b$ . Bizonyítsuk be, hogy összefüggő halmaz tetszőleges két pontja összeköthető poligonnal a halmazon belül!

(4) Bizonyítsuk be, hogy minden csillagszerű tartomány egy háromszöggel együtt tartalmazza az általa határolt normáltartományt is!

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha az  $L_1$  és  $L_2$  szakaszok egyenletei  $r_1 = r_1(t)$ ,  $t \in [a_1, b_1]$  és  $r_2 = r_2(t)$ ,  $t \in [a_2, b_2]$ , továbbá  $L_1$  és  $L_2$  kezdő- ill. végpontjai megegyeznek, akkor

$$\text{Rg } r_1 = \text{Rg } r_2$$

és

$$\int_{L_1} v \, dr = \int_{L_2} v \, dr \quad \text{bármely } \text{Rg } r_1 = \text{Rg } r_2\text{-n folytonos } v \text{ esetén.}$$

(6) Bizonyítsuk be, hogy minden háromszög normál térrész (speciálisan normáltartomány) határa!

(7) Bizonyítsuk be közvetlenül a gradiens definíciója alapján, hogy az

$$u(r) = \arctg \frac{y}{x}$$

függvény deriválható módon kiterjeszhető a negatív  $y$  tengely mentén felvágott egész síkra!

(7) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$w(r) = \frac{\text{CROSS}(r)}{|r|^2}, \quad r \neq 0,$$

akkor minden origóból induló, az origót tartalmazó félegyenes esetén van  $w$ -nek potenciálja a félegyenes mentén felmetszett síkon és határozzunk meg egy potenciált!

### 3.7.2 Gyakorló feladatok

(1) Legyen  $H$  egy origócsúcsú  $h$  magasságú  $a$  alapú háromszögvonal a síkon.  $H$ -t egy kétdimenzióbeli valódi felületnek tekintve határozzuk meg az

$$\int_H r \, df \, df$$

integrál értékét az integrál kiszámításával és a Gauss-Osztrogradskij-tétel felhasználásával!

(2) Legyen  $N$  az a síkbeli téglalap, melynek egyik csúcsa az origó, egyik  $a$  hosszú oldala az  $x$  és egyik  $b$  hosszú oldala az  $y$  tengely pozitív felére esik. Legyen  $v(x, y) = (x^2, 0)$  egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki  $v$  felületmenti integrálját  $N$ -en, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen!

(3) Legyenek  $a$  és  $b$  pozitív valós számok és legyen  $H$  az a háromszögvonal, melynek csúcsai a  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,

$(a, 0)$  pontok. Legyen  $v(x, y) = (x - y, x + y)$  egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki  $v$  vonalmenti integrálját  $H$ -n!

(4) Legyen  $v = v(x, y) = (xy, x + y)$  az egész síkon értelmezett vektorfüggvény és  $\mathbf{R}^2$  szokásos bázisa  $e = (i, j)$ . Legyen

$$f = \left( \frac{i + j}{\sqrt{2}}, \frac{i - j}{\sqrt{2}} \right)$$

$\mathbf{R}^2$  egy másik (orthonormált) bázisa. A deriváltoperátor transzformációja *nélkül* határozzuk meg  $v$  deriváltoperátorának  $f$ -beli mátrixát és számítsuk ki *ebből a mátrixból*  $v$  divergenciáját és rotációját!

(5) Legyen  $K$  a síkbeli első síknegyedbe eső  $R$  sugarú körlapnegyed:

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Legyen  $H$   $K$  határvonala és  $v(r) = r \cdot |r|^2$  egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki  $v$  felületmenti integrálját  $H$ -n, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen a Gauss–Osztrogradszkij tétel felhasználásával és anélkül!

(6) Ellenőrizzük a 3.4 pont utolsó előtti bekezdésében jelzett módon a ponttöltés erőterére és a pontszerű vezető mágneses terére vonatkozó eredményeinket!

# 4. Magasabb dimenziós általánosítások

Mindaz, amit az előzőekben a síkra vonatkozó vizsgálataink eredményeképpen kaptunk nagyon természetes módon igen könnyen kiterjeszthető, mégpedig – ahogy arra már a 2. fejezetben utaltunk – a cirkulációval, örvénysűrűséggel és rotációval kapcsolatos fogalmaink és állításaink a háromdimenziós, míg a fluxussal, forrás-sűrűséggel és divergenciával összefüggőek bármely véges (nullánál nagyobb) dimenziós lineáris normált térre. Ebben a fejezetben, melyben tehát  $n$  mindig tetszőleges, de rögzített pozitív egész szám, röviden összefoglaljuk ennek az általánosításnak, a véges- ill. háromdimenziós vektoranalízisnek legfontosabb eredményeit.

## 4.1 Divergencia

A divergencia általános meghatározását már a 3.3 Definícióban megadtuk, ez a deriváltoperátor skalárinvariánsa, azaz

### 4.1 Definíció

Egy  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) : H \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  deriválható vektorfüggvény divergenciája

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x}.$$

Ami a Gauss-Osztrogradszkij tételt illeti, ennek bizonyítása az értelemszerű változtatásokkal igen könnyen általánosítható, csupán pontosan ugyanazt kell  $n$  komponensre végrehajtani, amit a kétdimenziós esetben kettőre csináltunk meg. (Az egyetlen nehézséget egy technikai feltétel, az integrálok normál térrészek határain mentén való additivitásának igazolása, az 1.26 (15)(b) feladat magasabb dimenziókra való kiterjesztése jelenti.) Maga a tétel szó szerint megegyezik a 3.5 Tétellel, kivéve természetesen azt, hogy kétdimenzió helyett  $n$  dimenzióra vonatkozik:

### 4.2 Tétel (Gauss-Osztrogradszkij tétel)

Ha  $V$   $n$ -dimenziós normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított valódi felület,  $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^n$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^n$  tetszőleges  $V$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_F v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV$$

Természetesen a tétel véges sok határoló felületre vonatkozó formája (3.6 Tétel) is hasonlóan, minden lényeges változtatás nélkül, kiterjeszthető bármely nullánál nagyobb véges dimenzióra. Ezt felhasználva egyébként könnyen látható, hogy a Gauss-Osztrogradszkij tétel a Newton-Leibniz tétel többdimenzióra való általánosítása. Valóban, (felhasználva az 1.12 (3), 1.14 (4)(b) és az 1.20 (2) megjegyzéseket) a tételt az  $n = 1$  esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy ha  $V = [a, b]$  egydimenziós térrész, azaz intervallum (melynek kifelé irányított határát a  $+1$ -el irányított  $F_1 = \{b\}$  és a  $-1$ -el irányított  $F_2 = \{a\}$  nulldimenziós felületek lefedik),  $v = v(x)$  pedig  $V$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_a^b v'(x) \, dx = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_{F_1} v \, df + \int_{F_2} v \, df = v(b) - v(a).$$

Másrészről ez az összefüggés megvilágítja a Newton-Leibniz tétel fizikai jelentését: egy cső két végén be- és kiáramló folyadék mennyiségének különbsége a csőben keletkező (eltűnő) folyadék mennyiségével

egyenlő, mely utóbbi nem más, mint a hosszegységenként keletkező (eltűnő) folyadékmennyiségnek, azaz a hosszegységenkénti folyadékmennyiség-változásnak a cső hosszára vett integrálja.

Végül a tétel differenciális alakja is szó szerint általánosítható, tehát a divergencia  $n$  dimenzióban is a forrassűrűséget adja meg:

### 4.3 Következmény

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^n$  nyílt és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^n$  tetszőleges  $G$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor  $G$ -n létezik  $v$ -nek  $s(v)$  forrassűrűsége és fennáll, hogy

$$s(v) = \operatorname{div} v.$$

## 4.2 Rotáció

A rotációval már egy kissé komplikáltabb a helyzet, mint a divergenciával. Meg kell találnunk a 3.8 Állítás megfelelőjét  $\mathbf{R}^3$ -ra, amivel aztán a 3.10 és 3.11 Definíciókban a dimenzióknak kettőről háromra változtatásával megkapjuk a kívánt fogalmat.

### 4.4 Állítás

$\mathbf{R}^3$  tetszőleges  $\mathbf{A}$  antiszimmetrikus lineáris transzformációjához van egyetlen olyan  $c \in \mathbf{R}^3$  vektor, hogy

$$\mathbf{A} r = c \times r \quad \text{tetszőleges } r \in \mathbf{R}^3 \text{ esetén}$$

továbbá  $\mathbf{A}$  tetszőleges  $e$  orthonormált bázisbeli  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = (a_{ij})_{i,j=1}^3$  mátrixából  $c$  leolvasható:

$$c = (a_{32}, a_{13}, a_{21}).$$

BIZONYÍTÁS. Az egyértelműség nyilvánvaló.  $\mathbf{A}$  antiszimmetrikus, tehát  $\mathbf{R}^3$  tetszőleges  $e = (e_1, e_2, e_3)$  orthonormált bázisbeli  $(a_{ij})_{i,j=1}^3$  mátrixa is az, vagyis a  $c_1 = a_{32}$ ,  $c_2 = a_{13}$ ,  $c_3 = a_{21}$  jelölésekkel

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Így bármely  $r = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbf{R}^3$  esetén

$$(1) \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e r = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yc_3 + zc_2 \\ xc_3 - zc_1 \\ -xc_2 + yc_1 \end{pmatrix}.$$

Másrészt az 1.6 Állítás alapján

$$c \times r = \operatorname{CROSS}(c, r) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2z - c_3y)e_1 - (c_1z - c_3x)e_2 + (c_1y - c_2x)e_3,$$

tehát (1)-el

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e r = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e r = \begin{pmatrix} c_2z - c_3y \\ c_1z + c_3x \\ c_1y - c_2x \end{pmatrix} = \underline{\underline{c \times r}}_e.$$

Következésképpen,

$$\mathbf{A} r = c \times r \quad \text{minden } r \in \mathbf{R}^3 \text{ esetén}.$$

#### 4.5 Definíció

(1) Azt a a fenti állításban szereplő  $c$  vektort, melyet  $\mathbf{R}^3$  tetszőleges lineáris transzformációjának anti-szimmetrikus része egyértelműen meghatároz, a transzformáció **vektorinvariánsának** nevezzük.

(2) Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^3$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^3$  deriválható vektorfüggvény.  $v$  deriváltoperátora vektorinvariánsának kétszeresét  $v$  **rotációjának** nevezzük és  $\text{rot } v$ -vel jelöljük.

#### 4.6 Állítás

Legyen  $H \subseteq \mathbf{R}^3$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^3$  deriválható vektorfüggvény, melynek komponensei  $v_1, v_2$  és  $v_3$ , azaz  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . Ekkor

$$\text{rot } v = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

vagyis

$$\text{rot } v = \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

BIZONYÍTÁS.  $\mathbf{R}^3$  szokásos  $e$  bázisában a  $\mathbf{D}$  deriváltoperátor mátrixának  $i$ . sora:

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x}, \frac{\partial v_i}{\partial y}, \frac{\partial v_i}{\partial z} \right)$$

és ezen operátor antiszimmetrikus részének  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = (a_{ij})_{i,j=1}^3$  mátrixa a következő:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{D}}}_e - \underline{\underline{\mathbf{D}}}_e^*).$$

Ezek szerint

$$a_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right), \quad a_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right), \quad a_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

ami az előző állítás és a rotáció definíciója szerint éppen az, amit bizonyítani akartunk.

Ami a Stokes tétel illeti, vele más a helyzet, mint a Gauss-Osztogradskij tétellel. Ahogy alább megmutatjuk, a Stokes tétel háromdimenziós általánosítása nem a kétdimenziós változat háromdimenziós "másolata", hanem annak *következménye*. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a síkbeli Stokes tétel könnyen átvihető a háromdimenziós tér síkfelületeire. Az alábbi definíció segítségével a térbeli síkfelületek és síkgörbék leírását visszavezethetjük  $\mathbf{R}^2$ -beli térrészek ill. valódi felületek definiálására.

#### 4.7 Definíció

(1) A háromdimenziós térben valamely  $F$  felületet **síkfelületnek** nevezünk ha van olyan sík, melynek részhalmaza.

(2)(a) Legyen  $\mathbf{P}$  az az  $\mathbf{R}^3$ -ból  $\mathbf{R}^2$ -be képező lineáris operátor, mely minden vektorhoz az  $[xy]$ -síkra való vetületét rendeli *mint  $\mathbf{R}^2$ -beli vektort*, azaz

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

és legyen bármely  $e$  és  $f$  bázisok esetén  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef}$  az  $e$ -ről az  $f$ -re való áttérés mátrixa.

(b) Legyen  $\mathbf{R}^3$  szokásos bázisa  $e$ . Legyen továbbá  $F$  az  $r = r(u) = (x(u), y(u), z(u))$ ,  $u \in A$ , egyenlettel definiált  $n$  normálisú  $\mathbf{R}^3$ -beli síkfelület és  $f = (f_1, f_2, f_3)$  olyan jobbsodrású orthonormált bázis, melyre  $f_3 \perp n$  és  $f_3 \cdot n > 0$ . Az

$$r^*(u) = (\mathbf{P} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef}) r(u), \quad u \in A$$

egyenlettel definiált  $\mathbf{R}^2$ -beli felületet  $F$  ( $f$  szerinti vagy  $f$ -beli  $\mathbf{R}^2$ -) **árnyékának** nevezzük.

(3) A háromdimenziós térben valamely  $F$  valódi síkfelületet **normál** felületnek nevezünk, ha van olyan bázis, melyben  $F$  árnyéka normál térrész.

(4) A háromdimenziós térben valamely  $n$  normálisú  $F$  síkfelület határáként adódó  $L$  görbét ( $F$ -ből nézve) pozitív irányításúnak mondunk, ha van olyan bázis, melyben  $L$  árnyéka ( $F$  árnyékából nézve) pozitív irányítású.

Nyilván a pozitív irányítás azt jelenti, hogy a görbét a felületi normális irányából nézve az óramutató járásával ellenkező irányban járjuk be.

#### 4.8 Megjegyzés

(1) Nyilván felület határának árnyéka az árnyék határa (lásd a 4.18 (1) feladatot alább).

(2) Könnyen megmutatható (lásd a 4.18 (5) feladatot), hogy ha egy görbe árnyéka valamely bázisban pozitív irányítású, akkor minden bázisban az.

A Stokes-tétel bizonyításához szükségünk lesz még egy olyan háromdimenziós térbeli összefüggésre, melynek nincs síkbeli megfelelője:

#### 4.9 Állítás

Bármely kétszer folytonosan deriválható  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $H \subseteq \mathbf{R}^3$  deriválható vektorfüggvény esetén

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0.$$

BIZONYÍTÁS. A 4.4 Állítással

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} v &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \\ &= (v_3)_{yx} - (v_2)_{zx} + (v_1)_{zy} - (v_3)_{xy} + (v_2)_{xz} - (v_1)_{yz} = 0, \end{aligned}$$

hiszen a Young-tétellel a vegyes parciálisok egyenlőek, azaz

$$(v_1)_{zy} = (v_1)_{yz}, \quad (v_2)_{zx} = (v_2)_{xz}, \quad (v_3)_{yx} = (v_3)_{xy}.$$

#### 4.5 Tétel (Stokes tétel)

Legyen  $V$  háromdimenziós normál térrész, melynek határa felosztható az  $F$  kifelé irányított valódi felületre és az ugyancsak kifelé irányított  $-G$  normál síkfelületre. Legyen  $G$  határa a  $G$ -ből nézve pozitívan irányított  $L$  görbe. Ha  $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^3$  és  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^3$  tetszőleges  $V$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_L v \, dr = \int_F \operatorname{rot} v \, df.$$

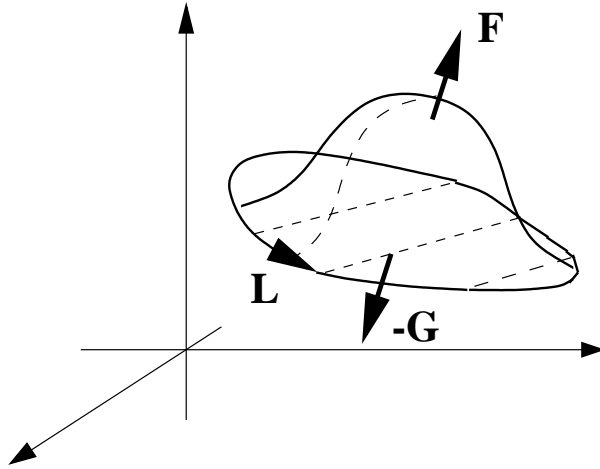
BIZONYÍTÁS. (Ábra a túloldalon.) Csak azt az esetet vizsgáljuk, mikor a  $G$  egységnormálisa  $k$  (tehát  $G$  az  $[xy]$ -síkkal párhuzamos) és  $G$  árnyéka a szokásos  $e$  bázisban normál térrész. Az általános eset a rotáció és az integrálok bázisfüggetlensége miatt teljesen analóg módon tárgyalható (lásd a 4.18 (6) feladatot). A bizonyítás azon alapszik, hogy – mivel a 4.9 Állítás alapján  $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$  – Gauss-Ostrogradszkij tétellel:

$$\int_F \operatorname{rot} v \, df + \int_{-G} \operatorname{rot} v \, df = \int_{F+(-G)} \operatorname{rot} v \, df = \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} v \, dV = 0,$$

amiből

$$(*) \quad \int_F \operatorname{rot} v \, df = - \int_{-G} \operatorname{rot} v \, df = \int_G \operatorname{rot} v \, df.$$

Az eredményül kapott integrál azonban – minthogy  $G$  síkfelület – egyszerűen átalakítható  $G$   $e$ -beli árnyékán, mint kétdimenziós térrészen vett térfogati integrállá, melyre alkalmazhatjuk a síkbeli Stokes-tételt. Valóban, legyen  $G$  egyenlete:  $r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z_0)$ ,  $(u, v) \in A$ ,  $L$  egyenlete pedig:



$\rho = \rho(t) = (\xi(t), \eta(t), z_0)$ ,  $t \in I$ . (Feltételünk szerint  $G$  pontjainak harmadik koordinátája valamely  $z_0$  állandó.) Továbbá, az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelölést tetszőleges háromváltozós  $f$  függvény esetén:  $f(x, y) = f(x, y, z_0)$ . Végül legyenek  $G$  és  $L$   $e$ -beli árnyékai  $V^*$  ill.  $L^*$ . Nos, ekkor

$$\text{CROSS}(r_u, r_v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

és  $G$  egységnormálisa  $k$ , így tetszőleges  $G$ -n folytonos  $w = (w_1, w_2, w_3)$  függvény esetén,  $w$ -nek az egységnormálisa eső vetülete  $w_n = w \cdot k = w_3$ , tehát a kettős integrál transzformációjára vonatkozó formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_G w \, df &= \int_G w_n \, |df| = \int_G w_3 \, |df| = \int_A w_3(x(u, v), y(u, v), z_0) |\text{CROSS}(r_u, r_v)| \, dudv = \\ &= \int_A w_3(x(u, v), y(u, v)) |\text{CROSS}(r_u, r_v)| \, dudv = \int_A w_3(x(u, v), y(u, v)) \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| \, dudv = \\ &= \int_{V^*} w_3(x, y) \, dxdy = \int_{V^*} w_3 \, dV, \end{aligned}$$

tehát

$$\int_G w \, df = \int_{V^*} w_3 \, dV.$$

A kapott összefüggés  $w = \text{rot } v$  esetén az árnyékokra vonatkozó síkbeli Stokes tétel alkalmazását teszi lehetővé, hiszen felhasználva a 4.8 Megjegyzést, valamint azt, hogy  $G$  normál felület és  $L$  irányítása  $G$ -ből nézve pozitív:

$$\begin{aligned} \int_G \text{rot } v \, df &= \int_{V^*} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dV = \int_{L^*} (v_1, v_2) \, dr = \int_I (v_1, v_2)(\rho(t)) \cdot (\dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t)) \, dt = \\ &= \int_I (v_1, v_2, v_3)(\rho(t)) \cdot (\dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t), 0) \, dt = \int_I v(\rho(t)) \cdot \dot{\rho}(t) \, dt = \int_L v \, dr. \end{aligned}$$

Ez pedig (\*)-gal a bizonyítandó állítás.

Érdeemes megjegyezni, hogy a Stokes tétel érvényes marad akkor is, ha a vizsgált felület határáról nem kötjük ki, hogy az síkgörbe legyen.

Végül az örvénysűrűségnek a 2.5 Definícióbeli meghatározása alapján a 4.6 Állításból az adódik, hogy a háromdimenziós térben is az örvénysűrűséget a rotáció adja meg:

#### 4.11 Következmény

Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^3$  nyílt és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^3$  tetszőleges  $G$ -n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor  $G$ -n létezik  $v$ -nek  $c(v)$  örvénysűrűsége és fennáll, hogy

$$c(v) = \operatorname{rot} v.$$

### 4.3 Vektorfüggvények jellemzőinek számítása

A divergenciára, rotációra és gradiensre vonatkozó, az előző fejezetben megismert alapvető összefüggések (esetleges értelemszerű módosításokkal) érvényben maradnak magasabb dimenziókban is, tehát az alább megadott állítások a 3.3 pontban szereplő bizonyításokkal analóg módon láthatóak be:

#### 4.12 Állítás

- (1) A divergencia, rotáció és gradiens lineáris operátorok.
- (2) Konstans vektor divergenciája és rotációja, továbbá konstans skalár gradiense nulla.
- (3) Lineáris transzformáció divergenciája azonos annak skalárinvariánsával, rotációja pedig vektorinvariánsának kétszeresével.
- (4) Bármely  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  deriválható vektorfüggvény,  $u, u_1, u_2 : H \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $H \subseteq \mathbf{R}^n$  deriválható skalárfüggvények,  $f$  tetszőleges  $\mathbf{R}^+$ -on deriválható egyváltozós függvény és  $c$  konstans vektor esetén:

$$\operatorname{div}(uv) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u$$

$$\operatorname{grad}(u_1 u_2) = u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1$$

$$\operatorname{div} r = n$$

$$\operatorname{grad}(c, r) = c$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}$$

$$\operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|) \frac{r}{|r|} \quad \text{ha } r \neq 0$$

- (5) Bármely  $v : H \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $H \subseteq \mathbf{R}^3$  deriválható vektorfüggvény,  $u : H \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $H \subseteq \mathbf{R}^3$  deriválható skalárfüggvény és  $c$  konstans vektor esetén:

$$\operatorname{rot}(uv) = u \operatorname{rot} v - v \times \operatorname{grad} u$$

$$\operatorname{div}(c \times v) = -c \cdot \operatorname{rot} v$$

$$\operatorname{rot} r = 0$$

$$\operatorname{div}(c \times r) = 0, \operatorname{rot}(c \times r) = 2c$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$$

### 4.4 Két fundamentális fizikai alkalmazás

#### 4.4.1 $n$ -dimenziós Coulomb törvény

Ha az  $n$ -dimenziós térben meg akarjuk határozni a ponttöltés erőterét, akkor az erőter három fizikai tulajdonságát kell figyelembe vennünk. Ezek a következők:

- (a) A ponttöltés által létrehozott erőter az adott pontot a ponttöltéssel összekötő egyenesen hat.  
 (b) Nincs kitüntetett irány: a tér minden irányban homogén.  
 (c) A töltés pontszerű: a térnek az origó kivételével nincs forrása.

Nos, ez a három feltétel – mint ahogy alább látni fogjuk – (konstans erejéig) egyértelműen meghatározza a ponttöltés által létrehozott erőteret.

Az első feltétel azt jelenti, hogy a teret leíró  $v = v(r)$  vektorfüggvény origóirányú, tehát

$$(1) \quad v(r) = u(r) r$$

alakú valamely  $u = u(r)$  skalárfüggvény esetén, a második szerint a vektorfüggvény gömbszimmetrikus, azaz tetszőleges, az origótól azonos távolságban levő pontra azonos nagyságú, tehát a fenti skalárfüggvény csak  $|r|$ -től függ:

$$(2) \quad u(r) = f(|r|)$$

valamely  $f = f(x)$  valós függvényre, míg a harmadik alapján

$$(3) \quad \operatorname{div} v(r) = 0 \quad \text{minden } r \neq 0 \text{ esetén.}$$

Mindezekkel

$$\operatorname{div} f(|r|) r = f(|r|) \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad} f(|r|) = n f(|r|) + r \cdot f'(|r|) \frac{r}{|r|} = n f(|r|) + f'(|r|) |r| = 0,$$

amiből  $y = f(x)$ -re az alábbi differenciálegyenletet adódik:

$$n y + y' x = 0.$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet:

$$y' = -n \frac{y}{x}.$$

Megoldva a differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} y' = -n \frac{y}{x} &\rightsquigarrow \frac{dy}{y} = -n \frac{dx}{x} \rightsquigarrow \frac{dy}{y} = -n \frac{1}{x} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = -n \int \frac{1}{x} dx + c \rightsquigarrow \ln |y| = -n \ln |x| + c \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \ln |y| = \ln \frac{1}{|x|^n} + c \rightsquigarrow \ln |y| = \ln \frac{c'}{|x|^n} \rightsquigarrow |y| = \frac{c'}{|x|^n} \rightsquigarrow y = \frac{c''}{x^n}, \quad c'' \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

(Az utolsó lépés indoklásához lásd a 4.18 (4) feladatot.) Tehát a kívánalmaknak megfelelő  $f = f(x)$  függvény az alábbi alakú:

$$f(x) = \frac{c''}{x^n}, \quad \text{valamely } c'' \in \mathbf{R}\text{-re.}$$

Visszahelyettesítve a kapott eredményt (1) és (2)-be és a töltés egységét úgy határozva meg, hogy  $c'' = 1$  legyen, megkapjuk az az  $n$ -dimenziós ponttöltés erőterét megadó vektorfüggvényt, azaz az  $n$ -**dimenziós Coulomb törvényt**:

$$v(r) = \frac{r}{|r|^n} \quad \text{ha } r \in \mathbf{R}^n \text{ és } r \neq 0.$$

Nos, erről a vektorfüggvényről – mutatis mutandis – persze ugyanazokat mondhatjuk el, mint síkbeli rokonáról. Először is, persze, a függvényt éppen úgy definiáltuk, hogy az origó kivételével  $\operatorname{div} v = 0$ . Ebből következően a Gauss-Osztograszkiij tétel alapján minden az origót nem tartalmazó normáltartományt határoló zárt felület mentén vett integrál nulla. Másrészt, az origót a belsejükből tartalmazó normáltartományt határoló zárt felületmenti integrál értéke az  $n$ -dimenziós egységgömb felületének nagysága. Valóban, egyrészt, ugyanúgy látható be, ahogy a síkon, hogy minden ilyen felületre vett integrál azonos értékű. Másrészt, ha  $F$  az origóközéppontú egységgömb, akkor  $F$  minden pontjában annak  $n$  normálisa  $r$  irányú, így, mivel  $v \parallel r$ , adódik, hogy  $n|r||v|$  és (mivel  $F$  kifelé irányított)  $n$  és  $v$  iránya is megegyezik. Következésképp  $v$ -nek  $n$ -re eső vetülete  $v_n = |v|$ , tehát felhasználva, hogy  $F$ -n  $|v| = \frac{R}{R^n} = 1$ , hisz  $R = 1$ :

$$\int_F v \, df = \int_F v_n |df| = \int_F |v| |df| = \int_F |df| = |F|.$$

Ami a vonalintegrálokat illeti, a 4.6.3 pontban látni fogjuk, hogy  $v$  tetszőleges zárt egyszerű íven vett vonalintegrálja nulla.

Erdemes még megegyezni, hogy általánosításunk nem csak kettőnél nagyobb, de az annál kisebb dimenzióra, tehát az egyenesre is vonatkozik. A ponttöltés tere az egyenesen, vagy a másik példánkat alkalmazva, az egyenes lefolyó, vagy "a vályú" sebességtere:

$$v(r) = \frac{r}{|r|} \quad \text{ha } r \neq 0,$$

amiből – mivel  $|v(r)| = 1$  – leolvasható, ami szemléletünkkel és közvetlen tapasztalatunkkal is egybevág, hogy egy állandó keresztmetszetű (csap és lefolyó nélküli) csőben vagy csatornában az áramló folyadék sebessége állandó.

#### 4.4.2 Végtelen vezető mágneses tere

A síkbeli eset általánosításához legyen  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  a szokásos bázis  $\mathbf{R}^n$ -en és  $L = \mathcal{L}(e_3, e_4, \dots, e_n)$  azaz az  $[xy]$ -síkra merőleges altér. A pontszerű vezető síkbeli mágneses terét leíró függvény egy lehetséges  $n$ -dimenziós általánosítása a következő vektorfüggvény:

$$w(r) = \frac{\text{CROSS}(e_3, e_4, \dots, e_n, r)}{|\text{CROSS}(e_3, e_4, \dots, e_n, r)|^2} \quad \text{ha } r \notin L.$$

Nos, ez a függvény lényegében nem különbözik a már tárgyalt kétdimenziós esettől. Valóban, az 1.7 Megjegyzés alapján

$$\text{CROSS}(e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, r) = (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = (-x_2, x_1, 0, 0, \dots, 0).$$

Vagyis bevezetve az  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $e_1 = i$  és  $e_2 = j$  jelöléseket, azt kaptuk, hogy

$$w(x, y, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-yi + xj) \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0,$$

ami nyilván teljesen analóg a síkbeli esettel. Tehát egyrészt

$$\text{div } w = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0,$$

így a Gauss-Osztogradszkij tétellel minden  $L$ -be nem belemetsző, normál térrészeket határoló felületen a fluxus nulla. Másrészt, a 4.6.3 pontban majd megmutatjuk, hogy  $w$  tetszőleges olyan zárt egyszerű íven vett vonalintegrálja nulla, mely nem veszi körül  $L$ -et (lásd a 4.18 (2) feladatot alább).

Speciálisan háromdimenzióban ez a vektorfüggvény a következő alakú ( $k$  a  $z$  tengely irányú egységvektor):

$$w(r) = \frac{k \times r}{|k \times r|^2} \quad \text{ha } r \in \mathbf{R}^3 \text{ és } k \not\parallel r.$$

$$k \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0), \quad \text{így, ha } k \nparallel r, \text{ akkor}$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0) \quad \text{tehát a } z \text{ tengely pontjait kivéve}$$

$$\operatorname{div} w(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{rot} w(x, y) = (0, 0, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}) = 0$$

Következésképpen, a két integráltétel alapján, a  $z$  tengelybe nem belemetsző, normál térrészeket határoló felületeken a fluxus nulla és nulla a cirkuláció is az olyan síkgörbéken, melyek nem kerülik meg a  $z$  tengelyt (ezek azok a síkgörbék, melyek árnyéka az origót nem tartalmazó kétdimenziós normáltartomány határa). Végül, a kétdimenziós esetre való visszavezetéssel könnyen belátható (lásd a 4.18(3) feladatot alább), hogy a  $z$  tengely megkerülő síkgörbéken (melyek árnyéka az origót belsejében tartalmazó normáltartomány határa) a cirkuláció  $2\pi$ .

## 4.5 Az integráltételek további alkalmazásai

### 4.5.1 Egyéb integráltételek

A 3.17 Tétel bizonyítása szó szerint minden változtatás nélkül alkalmazható az alábbi általános változat igazolására:

#### 4.13 Tétel (Green-tételek)

Legyen  $V \subseteq \mathbf{R}^n$  normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított felület és  $u, v \in C_2(V)$  tetszőleges  $n$ -változós függvények, melyeknek az  $F$  felületi normális irányú iránymenti deriváltjai  $\frac{\partial u}{\partial n}$  ill.  $\frac{\partial v}{\partial n}$ . Ekkor

(1) (Antiszimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dV = \int_F u \frac{\partial v}{\partial n} |df|.$$

(2) (Szimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_F (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) |df|.$$

#### 4.14 Tétel (Gauss–Osztrogradszkij típusú tételek)

Ha  $V \subseteq \mathbf{R}^n$  normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított felület,  $u : V \rightarrow \mathbf{R}$  és  $v : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  tetszőlegesek, továbbá  $u, v \in C_1(V)$ , akkor

(1) (I. Gauss–Osztrogradszkij tétel)

$$\int_V \operatorname{div} v dV = \int_F v df$$

(2) (Gradiens tétel)

$$\int_V \operatorname{grad} u dV = \int_F u df.$$

Továbbá :

(3) (II. Gauss–Osztrogradszkij tétel)

Ha  $V \subseteq \mathbf{R}^3$  normál térrész, melynek határa az  $F$  kifelé irányított felület és  $v : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $v \in C_1(V)$  tetszőleges, akkor

$$\int_V \operatorname{rot} v \, dV = - \int_F v \times df$$

BIZONYÍTÁS. Ahogy már említettük, (1) bizonyítása a síkbeli változattal analóg és ugyanez igaz (2)–re is. Ami (3)–at illeti, legyen  $\mathbf{R}^3$  szokásos bázisa  $e = (i, j, k)$ . Azt fogjuk megmutatni, hogy a két oldalon álló vektorok mindhárom komponense megegyezik. Miután persze a három eset teljesen analóg, csak az egyiket, a  $k$  irányú komponensek azonosságának igazolását részletezzük.

Először is, ha  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , akkor

$$v \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (v_2, -v_1, 0),$$

amiből

$$\operatorname{div}(v \times k) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = k \cdot \operatorname{rot} v.$$

Nos, a Gauss-Osztrogradszkij tételt használva fenti eredmény a következőre vezet :

$$\int_F v \times k \, df = \int_V \operatorname{div}(v \times k) \, dV = \int_V k \cdot \operatorname{rot} v \, dV = k \cdot \int_V \operatorname{rot} v \, dV$$

A bizonyítás teljessé tételéhez, most már csak annyit kell bizonyítanunk, hogy

$$\int_F v \times k \, df = -k \cdot \int_F v \times df.$$

Azonban a felületmenti integrálok definíciója és a vegyes szorzat (melyet alább szögletes zárójellel jelölünk) ciklikus permutációkra való invarianciája alapján ez egyszerű számolással adódik. Valóban, legyen  $F$  egyenlete  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in A$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \int_F v \times k \, df &= \int_A (v \times k)(r(u, v)) \cdot \operatorname{CROSS}(r_u, r_v) \, dudv = \int_A \operatorname{CROSS}(r_u, r_v) \cdot (v \times k) \, dudv = \\ &= \int_A [\operatorname{CROSS}(r_u, r_v) v k] \, dudv = \int_A [k \operatorname{CROSS}(r_u, r_v) v] \, dudv = - \int_A k \cdot (v \times \operatorname{CROSS}(r_u, r_v)) \, dudv = \\ &= -k \cdot \int_A (v \times \operatorname{CROSS}(r_u, r_v)) \, dudv = -k \cdot \int_A v \times df. \end{aligned}$$

Mivel a 3.7 Következmény bizonyításában szereplő (\*) állítás szó szerint átvihető tetszőleges nem nulla véges dimenzióra, fenti tételek közvetlen következményeiként adódnak az invariánsok és a gradiens magasabb dimenziókra is érvényes sűrűség–jellegű jellemzései :

#### 4.15 Következmény (Ignatowsky–féle definíciók)

(1) Legyen  $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges nyílt halmaz,  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^n$  és  $u : G \rightarrow \mathbf{R}$  folytonosak. Ha a  $(V_k)$   $r_0$ -ra zsugorodó  $\mathbf{R}^n$ -beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden  $k \in \mathbf{N}$  esetén  $V_k \subseteq G$  határa a kifelé irányított  $F_k$  felület, akkor

$$\operatorname{div} v \Big|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df$$

$$\operatorname{grad} u \Big|_{r_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} u \, df$$

(2) Legyen  $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^3$  tetszőleges nyílt halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^3$  folytonos. Ha a  $(V_k)$   $r_0$ -ra zsugorodó  $\mathbf{R}^3$ -beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden  $k \in \mathbf{N}$  esetén  $V_k \subseteq G$  határa a kifelé irányított  $F_k$  felület, akkor

$$\operatorname{rot} v \Big|_{r_0} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \times df$$

## 4.5.2 Felület- és vonalmenti integrálok számítása

Az integráltételeknek különböző integrálok kiszámítására való alkalmazását egy olyan példával illusztráljuk, melyben a felületi integrál kiszámítására mind a két fő integráltétel alkalmazható.

### 4.16 Példa

Legyen  $k$  a  $z$  tengely irányú egységvektor és  $K$  az  $[xy]$ -síkbeli origóközéppontú  $R$  sugarú  $-k$  egységnormálisú körlap, továbbá  $F$  tetszőleges olyan felület, hogy  $F + K$  egy normál térrész kifelé irányított határa. Számítsuk ki  $v(r) = \operatorname{rot}(k \times r)$  esetén az

$$\int_F v \, df$$

integrált!

1. MEGOLDÁS

Gauss-Osztrogradskij tétellel:

$$\int_F v \, df + \int_K v \, df = \int_{F+K} v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV = 0,$$

mert  $\operatorname{rot}(k \times r) = 2k$  (lásd az 4.12 (5) Állítást) és így  $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = \operatorname{div} \operatorname{rot}(k \times r) = \operatorname{div} 2k = 0$ .

Tehát

$$(*) \quad \int_F v \, df = - \int_K v \, df.$$

Számítsuk ki a jobboldali integrált! Mivel  $K$  normálisra  $-k$  irányú, így  $k$ -nak a normálisra eső vetülete  $-1$ , tehát

$$\int_K v \, df = \int_K \operatorname{rot}(k \times r) \, df = \int_K 2k \, df = 2 \int_K -1 \, |df| = -2 \int_K |df| = -2|K| = -2R^2\pi,$$

így  $(*)$ -gal

$$\int_F v \, df = - \int_K v \, df = 2R^2\pi.$$

2. MEGOLDÁS

Legyen  $L$  a  $K$   $-K$ -ból nézve pozitívan irányított határa, az  $[xy]$ -síkbeli origóközéppontú  $R$  sugarú körvonal és  $L$  érintő egységvektora  $e$ . Mivel  $e$  és  $k \times r$  azonos irányúak, tehát  $(k \times r)_e$ ,  $k \times r$ -nek  $e$ -re eső vetülete éppen  $|k \times r|$ , valamint figyelembe véve, hogy  $k$  és  $r$  merőlegesek egymásra (hisz a kör benne van az  $[xy]$  síkban) és hogy a körön  $|r| = R$ , Stokes tétellel azt kapjuk, hogy

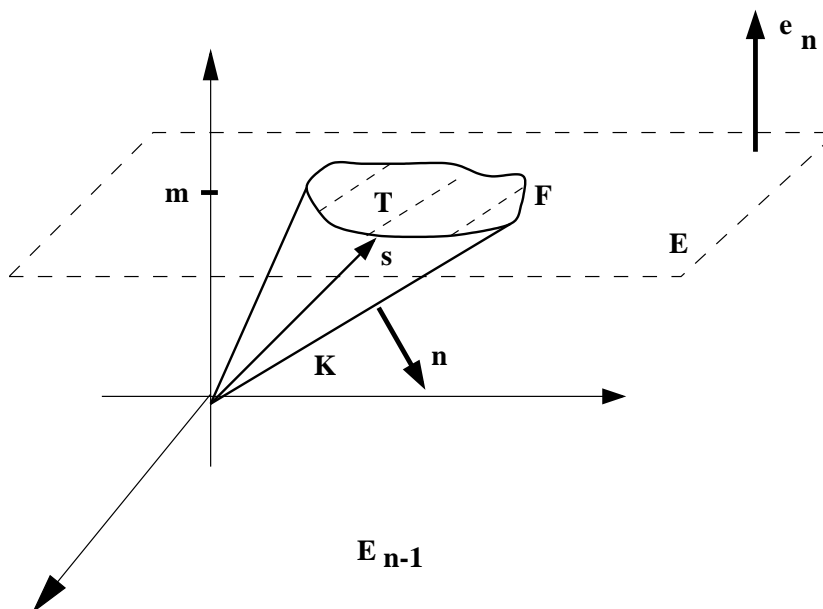
$$\begin{aligned} \int_F v \, df &= \int_F \operatorname{rot}(k \times r) \, df = \int_L k \times r \, dr = \int_L (k \times r)_e \, |dr| = \int_L |k \times r| \, |dr| = \int_L |k| |r| \, |dr| = \\ &= \int_L R \, |dr| = R \int_L |dr| = R|L| = R2R\pi = 2R^2\pi. \end{aligned}$$

### 4.5.3 Egy geometriai alkalmazás: az $n$ -dimenziós kúp térfogata

Legyen  $F$  egy olyan  $n - 2$  dimenziós felület, mely az  $n$ . koordinátatengelyre merőleges  $n - 1$  dimenziós  $E_{n-1}$  koordinátaaltér  $E = (0, 0, \dots, 0, m) + E_{n-1}$  eltoltjában van és tegyük fel, hogy  $F$  a  $T \subseteq E$   $(n - 1)$ -dimenziós felület határa. Legyen  $F$  egyenlete  $s = s(u)$ ,  $u \in A \subseteq \mathbf{R}^{n-2}$ . Ha az  $r = r(u, t) = t \cdot s(u)$ ,  $u \in A$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  egy  $(n - 1)$ -dimenziós  $K$  felületet definiál, akkor ezt az  $n$ -dimenziós **origósúcsú  $T$  alapú  $m$  magasságú kúp(palást)**nak nevezzük. Az elnevezés nyilván jogos, hiszen háromdimenziós esetben ez a definíció a  $z = m$  síkban fekvő  $F$  alapgörbéjű és  $T$  alaplapú origósúcsú (közönséges) kúpot adja. Nos, ha  $K + T$  egy  $n$  dimenziós  $V$  normál térrész kifelé irányított határa, melynek térfogata  $V_0$  és  $T$  felszíne  $t$ , akkor

$$V_0 = \frac{tm}{n},$$

azaz a kúp térfogata: "alapterület szorozva magasság osztva a dimenzióval".



Valóban, legyen  $v(r) = r$ . Mivel  $r$  definíciójából  $r_t = s(u)$ , így CROSS definíciója alapján a  $w = (u, t)$  jelöléssel, ha  $r \in K$ , akkor

$$n = \text{CROSS}(r_w) \perp r_t = s(u) \parallel t \cdot s(u) = r = v,$$

tehát

$$(1) \quad \int_K v \, df = \int_K v_n \, |df| = 0.$$

Másrészt,  $T \subseteq E$  miatt  $T$  egységnormálisa pontosan  $e_n$ , az  $n$ . koordinátaegységvektor és persze ugyanezért a  $T$ -beli vektorok utolsó koordinátája  $m$ , így

$$\text{ha } r \in T, \text{ akkor } r \cdot e_n = m,$$

vagyis

$$(2) \quad \int_T v \, df = \int_T v_{e_n} \, |df| = \int_T v \cdot e_n \, |df| = \int_T r \cdot e_n \, |df| = \int_T m \, |df| = m \int_T |df| = m t.$$

Most jöhet a Gauss-Ostrogradszkij tétel, amivel (felhasználva persze azt, hogy  $\text{div } v = \text{div } r = n$ ):

$$\int_T v df + \int_K v df = \int_{K+T} v df = \int_V \operatorname{div} v dV = \int_V \operatorname{div} v dV = \int_V n dV = n \int_V dV = n V_0.$$

Ez pedig már a bizonyítandó állítás, hiszen (1) és (2) alapján ebből

$$m t = \int_T v df = n V_0.$$

Érdeemes a kapott formulát az első néhány dimenzióban egy pár speciális esetre kipróbálni:

(1)  $n = 1$ : az  $m$  magas szakasz hossza (egydimenziós térfogata) (az alap nulldimenziós felszíne az 1.14 (4) megjegyzés szerint 1):

$$V_0 = \frac{1 \cdot m}{1} = m.$$

(2)  $n = 2$ : az  $m$  magas  $a$  alaphosszúságú háromszög szakasz területe (kétdimenziós térfogata):

$$V_0 = \frac{a m}{2},$$

vagyis az  $n$ -dimenziós kúp térfogatára kapott összefüggésünk a háromszög jól ismert területképletének: "alap szorozva magasság osztva kettő" általánosítása, másszóval a háromszög területképletében a kettes a dimenziószám, azért ennyi szerepel itt, mert a háromszög *széles*idom.

(3)  $n = 3$ : az  $m$  magas  $R$  sugarú körkúp térfogata:

$$V_0 = \frac{R^2 \pi m}{3}.$$

(4)  $n = 4$ : az  $m$  magas  $R$  sugarú gömbkúp térfogata:

$$V_0 = \frac{\frac{4R^3 \pi}{3} m}{4} = \frac{R^3 \pi m}{3}.$$

#### 4.5.4 Egy fizikai alkalmazás: Archimedes törvénye

1.  $p_0$  külső nyomás esetén nyugvó  $\rho$  sűrűségű homogén folyadékban a felszíntől számított  $h$  mélységben a nyomás, az ún. **hidrosztatikai nyomás**, a külső nyomás és felületelem felett lévő függőleges folyadékoszlop súlyából származó nyomás összege, azaz

$$p = p_0 + \rho g h,$$

amely *független a felületelem irányításától* ( $g$  a gravitációs állandó).

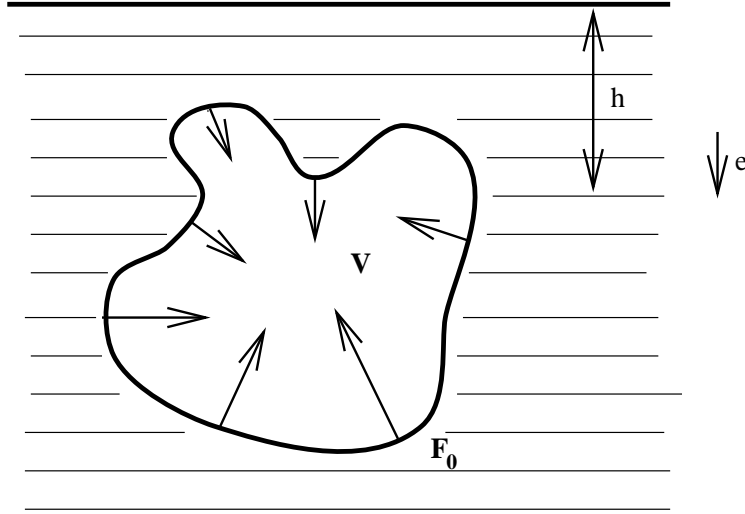
(Maga a  $p$  nyomás általában a  $q$  felületű lapra (vagy  $\Delta q$  felületelemre) merőlegesen és egyenletesen ható nyomóerő  $F$  (ill.  $\Delta F$ ) nagyságának és a felületnek hányadosa, azaz a következő skaláris mennyiség:

$$p = \frac{F}{q} \quad (\text{ill. } p = \frac{\Delta F}{\Delta q}).)$$

(Vö. pl. Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I. 224. és 211. old.)

2. Fentiek alapján valamely folyadékban egy  $V$  térrészt kitöltő test esetén, a folyadék hidrosztatikai nyomásából származó, a testre ható erők eredője, azaz a test határát alkotó zárt befelé irányított  $F_0$  felületre ható eredő erő (az ábrát lásd a túloldalon):

$$F = \int_{F_0} p df.$$



Mivel a folyadék homogén, azaz  $\rho$  állandó, tehát  $c = \rho \cdot g$  konstans,  $p$  csak  $h$ -tól függ,  $p = p(h) = p_0 + c \cdot h$ , így  $|\text{grad } p| = c = \text{állandó}$  és  $\text{grad } p$  mindenütt lefelé mutat ( $h$  csak erre változik és erre nő), tehát ha  $e$  a lefelé mutató egységvektor, akkor

$$\text{grad } p = c \cdot e.$$

Ebből, a térrész térfogatát  $V_0$ -al jelölve, gradiens tétellel

$$F = \int_{F_0} p \, df = - \int_{-F_0} p \, df = - \int_V \text{grad } p \, dV = - \int_V c \cdot e \, dV = -c \cdot e \int_V dV = -cV_0 \cdot e = -g\rho V_0 \cdot e.$$

Mivel  $\rho V_0$  a test térfogatával megegyező térfogatú folyadék tömege, tehát  $g\rho V_0$  ennyi folyadék súlya, azt kaptuk, hogy a testre ható eredő erő a test térfogatával megegyező térfogatú folyadék súlyával egyenlő nagyságú és azzal ellenkező irányú, vagyis például ha a folyadék víz, akkor

**egy vízbe mártott test a súlyából annyit vesz,**  
**amennyi az általa kiszorított víz súlya.**

## 4.6 Potenciálemélet elemei

### 4.6.1 Egzisztencia és unicitás

A potenciál létezésére és egyértelműségére vonatkozó legfontosabb két eredmény, a 3.28 Tétel és a 3.32 Tétel háromdimenziós változatának bizonyítása a kétdimenziós változat bizonyításának szó szerinti másolata, ugyanis egyik bizonyításban sem használtuk ki sehol azt, hogy síkon van. Sőt, ez igaz bármely véges dimenzióra is, természetesen a rotációra vonatkozó feltétel alkalmas módosításával. Nevezetesen, legyen  $v : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  tetszőleges vektorfüggvény. Azt mondjuk, hogy  $v$  **keresztbe vett parciális deriváltjai megegyeznek** ha  $(v_i)_{x_j} = (v_j)_{x_i}$  minden  $i, j = 1, 2, \dots, n$  esetén. Nos, nyilván, ez a feltétel értelmezhető tetszőleges  $n$  pozitív egész esetén  $\mathbf{R}^n$ -re, továbbá, ha  $n = 2$  és  $n = 3$ , akkor ekvivalens azzal, hogy  $v$  rotációja nulla. A 3.28 és a 3.32 tételek bizonyításában a rotáció eltűnését a keresztbe vett parciális deriváltak megegyezésével helyettesítve megkapjuk ezen tételek  $\mathbf{R}^n$ -re vonatkozó általánosítását:

#### 4.17 Tétel

*Legyen  $G \subseteq \mathbf{R}^n$  tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és  $v : G \rightarrow \mathbf{R}^n$  folytonos vektorfüggvény. Ekkor az alábbi állítások mindegyike következik az elsőből és ha  $G$  csillagszerű tartomány, akkor mindezen állítások ekvivalensek is :*

- (1)  $v$ -nek van potenciálja  $S$ -en.
- (2)  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső két pont közötti  $G$ -beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem.
- (3)  $v$  görbementi integrálja minden  $G$ -be eső zárt egyszerű íven nulla.
- (4)  $v$  keresztbe vett parciális deriváltjai megegyeznek az egész  $G$ -n, amennyiben  $v \in C_1(G)$ .

## 4.6.2 Potenciálkeresés

A síkon alkalmazott mindkét módszer könnyedén kiterjeszthető magasabb dimenziókra. Pontosabban, mivel az origókezdőpontú szakasz mentén való vonalintegrál alkalmazásakor egyáltalában nem használtuk ki, hogy  $\mathbf{R}^2$ -en vagyunk, ennél a módszernél csupán annyi a változás, hogy a rotáció eltűnése helyett a keresztben vett parciálisok megegyezését kell vizsgálnunk, ha garantálni akarjuk, hogy a módszer helyes eredményt szolgáltat. A parciális differenciálegyenletrendszer megoldását használó módszer alkalmazásának kiterjesztését egy egyszerű példán illusztráljuk.

Legyen

$$v = v(x, y, z) = (y + z, x + w, x + w, y + z)$$

az a vektorfüggvény, melynek potenciálját meg akarjuk határozni.

Mivel  $(v_1)_y = 1 = (v_2)_x$ ,  $(v_1)_z = 1 = (v_3)_x$ ,  $(v_1)_w = 0 = (v_4)_x$ ,  $(v_2)_z = 0 = (v_3)_y$ ,  $(v_2)_w = 1 = (v_4)_y$ ,  $(v_3)_w = 1 = (v_4)_z$ , így  $v$ -nek tényleg van potenciálja az egész síkon. Legyen  $u$  ez a potenciál. Ekkor  $(v_1, v_2, v_3, v_4) = v = \text{grad } u = (u_x, u_y, u_z, u_w)$  miatt a

$$(*) \quad v_1 = u_x, \quad v_2 = u_y, \quad v_3 = u_z, \quad v_4 = u_w$$

összefüggéseknek fenn kell állniuk. Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk.

Induljunk ki például az

$$u_x = v_1 = y + z$$

egyenletből. Ekkor  $x$  szerint integrálva

$$u = (y + z)x + a(y, z, w)$$

valamely  $a = a(y, z, w)$  csak  $y, z$  és  $w$ -től függő differenciálható függvényre. Ebből,  $v$  definíciójából és  $(*)$ -ből

$$\begin{aligned} x + w = v_2 = u_y &= x + a_y, \\ x + w = v_3 = u_z &= x + a_z, \\ y + z = v_4 = u_w &= a_w, \end{aligned}$$

tehát

$$(**) \quad \begin{aligned} a_y &= w, \\ a_z &= w, \\ a_w &= y + z, \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ezzel az  $u$ -ra vonatkozó négy egyenletből álló  $(*)$  összefüggést egy, az  $a$ -ra vonatkozó már csak három egyenletből álló összefüggésre redukáltuk. Látható tehát, hogy a síkbeli potenciálkereséskor adott algoritmus minden lépésben eggyel csökkenti a megoldandó egyenletrendszerben szereplő egyenletek számát. Tehát az eljárást folytatva az előző összefüggések közül az elsőből  $a_y = w$ , így:

$$a = wy + b(z, w)$$

valamely  $b = b(z, w)$  csak  $z$  és  $w$ -től függő differenciálható függvényre, amiből  $(**)$ -gal

$$\begin{aligned} b_z &= a_z = w, \\ y + b_w &= a_w = y + z, \end{aligned}$$

vagyis

$$(***) \quad \begin{aligned} b_z &= w, \\ b_w &= z, \end{aligned}$$

tehát

$$b = wz + c(w),$$

valamilyen  $c = c(w)$  csak  $wz$ -től függő differenciálható függvényre, amiből (\*\*\*) alapján

$$z = b_w = z + c',$$

tehát

$$c' = 0, \text{ vagyis } c \text{ konstans.}$$

Visszahelyettesítve a  $b$ ,  $a$  és  $u$ -ra vonatkozó előző összefüggésekbe megkapjuk a keresett potenciált:

$$b = wz + c \rightsquigarrow a = wy + wz + c \rightsquigarrow u = (y + z)x + wy + wz + c = (y + z)(x + w) + c.$$

És persze valóban:

$$u_x = y + z = v_1, \quad u_y = x + w = v_2, \quad u_z = x + w = v_3, \quad u_w = y + z = v_4.$$

### 4.6.3 A ponttöltés erőterének és duálisának potenciálja

Alapvető fizikai alkalmazásainkat a 4.4 pontban általánosítottuk. Most megmutatjuk, hogy ezen általánosítások esetén is létezik potenciál, ami a 4.4 pontban elmondottakkal együtt azt jelenti, hogy ezek a kiterjesztések megőrzik az eredeti síkbeli függvények leglényegesebb vonásait.

#### a) A ponttöltés erőtere

Az  $n$ -dimenziós ponttöltés erőterének potenciáljának meghatározásához felhasználjuk azt a 3.6.2 b)-ben kapott eredményt, hogy ha  $m$  nemnegatív egész, akkor

$$\text{grad} \frac{|r|^{m+2}}{m+2} = \frac{1}{m+2} \text{grad} |r|^{m+2} = \frac{1}{m+2} (m+2) |r|^{m+1} \text{grad} |r| = |r|^{m+1} \frac{r}{|r|} = r |r|^m \quad (r \neq 0).$$

Vegyük észre, hogy itt sehol sem használtuk a feltételt, tehát a kapott eredmény igaz minden olyan  $m$  esetén, melyre a baloldal egyáltalán értelmes, tehát minden  $m \neq -2$ -re. Ezzel készen is vagyunk, hiszen a 3.6.3 pontban a síkbeli esetre már meghatároztuk a potenciált, tehát a fenti összefüggésből az  $m = -n$  helyettesítéssel:

$$\text{A } v(r) = \frac{r}{|r|^n}, \quad (n \geq 1 \text{ egész}) \text{ függvény potenciálja } u(r) = \begin{cases} \frac{1}{2-n} \frac{1}{|r|^{n-2}} & \text{ha } n \neq 2 \\ \ln |r| & \text{ha } n = 2 \end{cases} \quad (r \neq 0).$$

Ebből aztán a 4.17 Tétel alapján az is következik, hogy  $v$ -nek tetszőleges zárt egyszerű íven vett vonalintegrál nulla. Ami az erővonalakat illeti, a síkbelihez hasonlóan az általános esetben is ezek az origóból induló félegyenesek, melyek érintői az ekvipotenciális felületek, azaz az origóközéppontú gömbök normálisai.

#### b) Végtelen vezető mágneses tere

Emlékeztetőül, a teret leíró, a kétdimenzióssal analóg függvény (lásd a 4.4.2 pontot):

$$w(x, y, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-yi + xj) \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0.$$

A síkbeli esethez hasonlóan mutatható meg, hogy  $w$ -nek minden csillagszerű tartományon, melynek elemeire fennáll, hogy  $x^2 + y^2 \neq 0$  van potenciálja, például a negatív  $y$  tengellyel felmetszett síkon az

$$u(x, y, x_3, \dots, x_n) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0, y > 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény. Ebből következően a 4.17 Tétel szerint tetszőleges olyan zárt egyszerű íven vett vonalintegrál nulla, mely a

$$L = \{(x, y, x_3, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x^2 + y^2 = 0\}$$

halmazt nem veszi körül (lásd a 4.18 (2) feladatot).

## 4.7 Feladatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy háromdimenziós téren felület határának árnyéka az árnyék határa!

(2) Fogalmazzuk meg a "körülveszi a  $z$  tengelyt" tulajdonság általánosítását a kétdimenziós eset mintájára (lásd a 3.6.3 b) pont utolsó mondatát)!

(3) Bizonyítsuk be, hogy a  $z$  tengely megkerülő sígörbéken, azaz azokon a sígörbéken, melyek árnyéka az origó belsejében tartalmazó normáltartomány határa, a

$$w(r) = \frac{k \times r}{|k \times r|^2} \quad (r \in \mathbf{R}^3, \quad k \nparallel r)$$

háromdimenziós vektorfüggvény cirkulációja  $2\pi$ !

(4) Bizonyítsuk be, hogy bármely  $I$  intervallum esetén

$$|y| = \frac{c}{|x|^n}$$

függvényegyenlet  $I$ -n folytonos megoldásai azonosak a

$$y = \frac{c}{x^n}$$

függvényegyenlet  $I$ -n folytonos megoldásaival!

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy görbe árnyéka valamely bázisban pozitív irányítású, akkor minden bázisban az.

(6) Bizonyítsuk be tetszőleges egységnormálisú síkfelületre a Stokes tételt!