Villamosmérnök Matematika A2 részletes tematikája

1 Többváltozós függvények

1.1 Topológiai alapfogalmak

Környezet, torlódási-, izolált-, belső pont, zárt-, nyílt-, korlátos halmaz.

1.2 n-dimenziós euklideszi tér

$\mathbb{R}^n$ definíciója. Távolság (általában és $\mathbb{R}^n$-en). Pontsorozatok konvergenciája. Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^n$-en. Koordinátánkénti konvergencia. Zártság jellemzése konvergenciával. Cantor-axióma $\mathbb{R}^n$-ben. Borel-féle lefedési tétel.

1.3 Többváltozós függvények határértéke és folytonossága

$\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be képező függvények, alapfogalmak, példák. Többváltozós függvény fogalma és szemléltetése. Határérték és folytonosság definíciója. Vektorfüggvény folytonos ha koordinátafüggvényei azok. Átviteli elv. Folytonosság/határérték és műveletek. Egyenletes folytonosság. Poligoniális összefüggőség. Weierstrass–, Bolzano– és Heine–tétel.

1.4 Differenciálszámítás

Definíció. Speciális esetek: gradiens. A Jacobi mátrix. Vektorfüggvény differenciálható iff koordinátafüggvényei azok.

Többváltozós függvények deriválása. Gradiens és parciális derivált összefüggése. Parciális deriválhatóság és deriválhatóság összefüggése. Folytonos deriválhatóság.

Többváltozós függvények deriválására vonatkozó elemi tételek: láncszabály, Lagrange–középértéktétel valós értékű függvényekekre. Iránymenti derivált fogalma, kiszámítása, a parciális deriváltakkal és a gradienssel való kapcsolata, geometriai jelentése

Magasabbrendű parciális deriváltak, Young tétel.

Lokális- és tartományi szélsőérték. Létezésükre vonatkozó szükséges illetve elégséges feltételek. Nyeregpont.

Inverzfüggvény– és implicitfüggvény–tétel.

1.5 Integrálszámítás

Területi integrál. Definíció, tulajdonságok, integrálhatóság elégséges feltételei. Integrálás normáltartományon. Integrálási sorrend megváltoztatása.

Jordan mérhetőség. Példák mérhető és nem mérhető halmazokra, mérhető halmazon nem integrálható függvényre. Majdnem mindenütt folytonosságból következik az integrálhatóság.

Integráltranszformáció. A fontosabb transzformációk: áttérés polár-, henger- és gömbi koordinátákra.

2 Végtelen sorok

2.1 Numerikus sorok

2.1.1 Alapfogalmak

Definíció, konvergencia, divergencia, maradéktag, abszolút- és feltételes konvergencia. $\limsup$, $\liminf$.

2.1.2 Elemi tételek

Konvergens sorok lineáris tere. Konvergens sorok összefésülése is az. Pozitív tagú sor konvergens iff korlátos. Cauchy-kritérium. $\exists \sum a_n \rightsquigarrow \lim a_n = 0$.

2.1.3 Konvergenciakritériumok

Majoráns, minoráns, kondenzációs, gyök, hányados, integrál, Leibniz. $a_n \sim b_n \rightsquigarrow (\exists \sum a_n$ iff $\exists \sum b_n)$.

2.1.4 Speciális sorok

Geometriai, harmonikus, alternáló-harmonikus, $\sum \frac{1}{n^p}$.

2.1.5 Zárójelezés, zárójelfelbontás

Zárójelezés, zárójelfelbontás hatása konvergens ill. divergens sorokra. Átrendezés. Riemann tétel.

2.2 Függvénysorozatok és -sorok

2.2.1 Alapfogalmak

Definíció, pontonkénti konvergencia, konvergenciatartomány, a pontonkénti konvergencia hiányosságai, egyenletes konvergencia (tartomány). Egyenletes konvergencia mint konvergencia a supnormában.

2.2.2 Egyenletes konvergencia

Függvényhatárérték, folytonosság, deriválhatóság és integrálhatóság invarianciája a határértékképzésre és sorösszegzésre.
Kritériumok egyenletes konvergenciára:

- Függvénysorozatok: $\exists (a_n) : |r_n(x)| \leq a_n \to 0$
- Cauchy–kritérium
- Függvénysorok: Weierstrass–kritérium.

Kritériumok nem egyenletes konvergenciára:

- Határ (összeg) függvény nem örökli a tagok valamely, az egyenletes konvergencia által megőrzött tulajdonságát.
- Függvénysorozatok: $\exists (x_n) : r_n(x_n) \to 0$.
- Függvénysorok: f_n nem tart egyenletesen a konstans 0 függvényhez $\rightsquigarrow$ $\sum f_n$ nem egyenletesen konvergens

2.3 Hatványsorok

2.3.1 Alapfogalmak

Definíció, jelentőség. Konvergenciasugár. Egyenletes konvergencia.

2.3.2 Taylor sorok

Sorfejtés fogalma. Formális Taylor sor. Taylor sor egyértelműsége: hatványsor és Taylor sor. Taylor polinom, Lagrange maradéktag. Függvény és Taylor sora: formális Taylor sor konvergenciája, függvény előállítása Taylor sorával.

Elemi függvények Taylor sora. Taylor sorfejtés technikái.

Taylor sorfejtés alkalmazásai: függvényérték, határozott integrál közelitése.

2.4 Fourier sorok

Trigonometrikus és Fourier sor fogalma. Elégséges feltétel arra, hogy Fourier sora előállítsa a függvényt. Sorfejtés technikája.

3 Lineáris algebra

3.1 Lineáris tér alapfogalmai

Axiómák. Illusztráló példák: háromdimenziós vektorok tere, szám n-esek tere, végtelen sorozatok tere, adott intervallumon értelmezett függvények tere. Elemi aritmetika. Altér. Lineáris kombináció. Generált altér = lineáris burok ($\mathcal{L}(X)$) és tulajdonságai: monotonitás és idempotencia. Izomorfizmus.

3.1.1 Lineáris függés, függetlenség, bázis, dimenzió

Lineáris függés, függetlenség definíciója. Elemi tulajdonságok, speciálisan elemek összeadására és nem nulla skalárral való szorzásra való invariancia. Generátorrendszer. Lineárisan független vektorrendszer elemei kicserélhetőek egy generátorrendszer elemeivel a lineáris függetlenség megőrzésével.

Bázis és dimenzió definíciója, szükséges és elégséges feltételek arra, hogy egy lineáris tér n-dimenziós legyen. Véges dimenziós lineáris tér. Nem véges dimenziós lineáris tér létezése. Bázisbeli előállítás egyértelműsége. Véges dimenziós lineáris terek izomorfak iff dimenzióik megegyeznek.

3.1.2 Lineáris függetlenség, -függőség vizsgálata

Vektor oszlopvektora, megengedett sortranszformációk. Bázisba való bevonás technikája (Gauss-elimináció). Oszlopvektorok függetlenségének vizsgálata Gauss-eliminációval.

Főtétel: a $\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{a_i}} x_i = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható iff $\underline{b} \in \mathcal{L}\{\underline{\underline{a_i}}\}_{i=1}^{n}$, és a megoldás egyértelmű iff $\{\underline{\underline{a_i}}\}_{i=1}^{n}$ lineárisan független.

Lineáris egyenletrendszer egy partikuláris megoldásának előállítása. Mátrix definíciója, rangja. Lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa és kibővített mátrixa, összefüggésük az egyenletrendszer megoldásának egzisztenciájával és unicitásával. Az egyenletek számának szerepe.

3.2 Mátrixalgebra

Jelölések, elnevezések, speciális mátrixok, műveletek mátrixokkal. Az $n \times m$-es mátrixok lineáris tere és az $n \times n$-es mátrixok egységelemes gyűrűje. Invertálhatóság és rang. Inverzmátrix előállítása.

3.2.1 Determináns

Definíció, szemléletes jelentés. Elemi tulajdonságok. Determináns kifejtése, szorzástétel. Determináns és rang, determináns és invertálhatóság; inverz determinánsa. Háromszögmátrix determinánsa.

3.3 Lineáris operátorok

3.3.1 Alapfogalmak

Definíció, jelölés. Elemi aritmetika ($\mathbf{A}0 = 0$, $\mathbf{A}(-x) = -\mathbf{A}x$.) Illusztráló példák: Háromdimenziós vektorok terének fundamentális geometriai transzformációi (nyuzsorítás, forgatás, vetítés, tükrözés), az eltolás nem lineáris operátor. A limes mint lineáris operátor a konvergens sorozatok terén. Deriváltoperátor, a határozott integrál és az integrálfüggvény mint lineáris operátor.

Képtér, magtér. Elemi tulajdonságok: kép- és magtér alterek; véges dimenzióban $\exists \mathbf{A}^{-1}$ iff Ker $\mathbf{A} = \{0\}$. Dimenziótétel és következménye: $\exists \mathbf{A}^{-1}$ iff Im $\mathbf{A} = L$.

A lineáris operátorok lineáris tere és egységelemes gyűrűje: műveletek és tulajdonságaik. Inverz (függvény- ill. gyűrű), nullosztó.

3.3.2 Operátorok és mátrixok

Operátor mátrixa, az elemi geometriai transzformációk mátrixa.

Főtétel: $\underline{\underline{\mathbf{A}x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{x}}$.

Operátorok és mátrixok egységelemes gyűrűjének illetve lineáris terének izomorfiája és ennek következményei: összeg-, szorzat-, skalárszoros-, inverz mátrixa, operátorok lineáris terének dimenziója.

Mátrixszal definiált operátor.

3.3.3 Az $\mathbf{A}x = b$ egyenlet

A megoldás szerkezete: x_p+ Ker $\mathbf{A}$. A lineáris egyenletrendszer összes megoldása: $\underline{x_p}$+Ker $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Ker $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ előállítása.

3.3.4 Bázistranszformáció

Bázistranszformáció mátrixa. Áttérés egyik bázisról a másikra. Operátor mátrixának transzformációja.

3.3.5 Sajátérték, sajátvektor

Definíció. Invariáns altér. Operátor és mátrix sajátvektora, -értéke. Az elemi geometriai transzformációk sajátvektorai és -értékei.

Sajátvektorok és -értékek meghatározása. Racionális operátorkifejezések sajátvektorai, -értékei.

Spektrálfelbontás.

3.4 Normált terek

Normált és skalárszorzatos terek, elemi tulajdonságaik, összefüggéseik. Illusztráló példák: különbözö lineáris tereken ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, korlátos sorozatok tere, zárt intervallumon folytonos függvények tere) definiálható különböző normák (szuprémum, szumma /integrál, euklideszi) és skalárszorzatok.

Normált tér geometriája: merőlegesség, Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség. Pithagorasztétel.

Konvergens-, divergens-, Cauchy-sorozat, teljes normált tér. Különbségek a véges dimenziós esethez képest: Bolzano-Weierstrass tétel nem áll végtelen dimenzióban.