KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

SIMON ANDRÁS

Tartalomjegyzék

1. Emlékeztető

1.1. Definíció. Komplex számok: $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot, (0,0), (1,0))$, ahol $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ (azaz az összeadás koordinátánként történik, mint $\mathbb{R}^2$-ben), és $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$. Az (a,b) komplex szám valós ill. képzetes része $\mathrm{Re}(a,b) = a \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Im}(a,b) = b \in \mathbb{R}$. j-vel jelöljük a $(0,1)$ komplex számot.

Speciálisan:

- $(a,0)\cdot(c,0) = (ac,0)$; következésképp
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \cong (\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0\}, +, \cdot, (0,0), (1,0))$, ahol természetesen + és $\cdot$ a baloldalon a valós, a jobboldalon a komplex összeadás ill. szorzás. Ezért a 0 képzetes részű komplex számokat valósaknak mondjuk.

Date: 2020. május 8..

- $(a,b)\cdot(c,0)=(ac,bc)$; következésképp
- (síkvektorok, vektorösszeadás, skalárral való szorzás) $\cong$ ($\mathbb{C}$, +, valóssal szorzás)
- $j^2=(-1,0)$

1.2. Tétel. *$\mathbb{C}$ test ($(0,0)$ az összeadásra, $(1,0)$ pedig a szorzásra nézve neutrális elem).*

Jelölés: a, $b\in\mathbb{R}$-re $a+bj=(a,b)$; és akkor úgy lehet számolni, mint valósakkal, csak épp $j^2=-1$.

Konjugált $\overline{(a,b)}=(a,-b)$, vagyis tükrözés a valós tengelyre.

1.3. Állítás. (1) $\overline{\overline{z}}=z$
(2) $\overline{z}=z \iff z\in\mathbb{R}$
(3) $Re(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $Im(z)=\frac{1}{2j}(z-\overline{z})$
(4) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ *és* $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
(5) $z\overline{z}=|z|^2 (\in\mathbb{R})$ *(ahol $|z|$ z-nek mint síkvektornak a hossza, vagyis $\sqrt{a^2+b^2}$ ha $z=a+bj$).*

1.4. Definíció. $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$ (persze a nemnegatív).

Valósakra ez a régit adja.

1.5. Feladat. $|\overline{z}|=|z|$, $|zw|=|z||w|$, $|Rez|\le|z|$.

1.6. Feladat. A komplex sík mely részhalmazait definiálják az alábbi egyenletek és egyenlőtlenségek?
(1) $|z-j|=1$
(2) $1<|z+1-j|<2$
(3) $|z-1|=|z-j|$
(4) $|2+z|<|2-z|$
(5) $|2z+3|>4$
(6) $|z-4|>|z|$

Trigonometrikus alak Ha $z=a+bj$ és $r=|z|$, φ a z valós tengely pozitív felével bezárt irányított szöge, akkor $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, azaz $z=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$: ez z trigonometrikus alakja (spéci algebrai). Minden nem-0 komplex szám (modulo 2π) egyértelműen írható fel ilyen alakban, mégpedig így: $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=a/r$, $\sin\varphi=b/r$. (Ezekből φ már egyértelmű (mod 2π), mert $\cos\varphi=\cos\psi$ & $\sin\varphi=\sin\psi \iff \psi=\varphi \pmod{2\pi}$.) ($\varphi=\arg z$, amiről ki szokás kötni, hogy $\in[0,2\pi)$ vagy $\in(-\pi,\pi]$)

1.7. Állítás. (1) $r_1(\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+j\sin\varphi_2)=r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+j\sin(\varphi_1+\varphi_2))$, *azaz* $|zw|=|z|\cdot|w|$ *és* $\arg zw=\arg z+\arg w$.
(2) $\overline{r(\cos\varphi+j\sin\varphi)}=r(\cos-\varphi+j\sin-\varphi)$ *(mert a konjugált definíciója miatt* $|\overline{z}|=|z|$, $\arg\overline{z}=-\arg z$*)*
(3) $\frac{r_1(\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+j\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+j\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)$, *azaz* $w\neq0$*-ra* $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ *és* $\arg\frac{z}{w}=\arg z-\arg w$.
(4) $n\in\mathbb{Z}$*-re* $\big(r(\cos\varphi+j\sin\varphi)\big)^n=r^n(\cos n\varphi+j\sin n\varphi)$, *azaz* $|z^n|=|z|^n$ *és* $\arg z^n=n\arg z$.

1.8. Állítás. *Ha $n\in\mathbb{N}^+$, akkor a $0\neq z=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$ komplex számnak pontosan n db. n. gyöke van, és ezek* $\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n})+j\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n}))$, $k=0,\dots,n-1$.

1.9. Feladat. $\sqrt[5]{1+j\sqrt{3}}=?$

2. Bevezetés

A komplex számok testet is alkotnak, és ennyiben a valósokra hasonlítanak, de $\mathbb{R}$ feletti kétdimenziós normált lineáris teret[1] is, amiben meg $\mathbb{R}^2$-re. Ráadásul ez a norma ($|z|$) ugyanaz, mint $\mathbb{R}^2$-ben, ezért az összes fogalom és tétel, ami $\mathbb{R}^2$-beli sorozatok, vagy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények határértékére vagy folytonosságára vonatkozik, itt is definiálható illetve igaz.

2.1. Tétel. (1) *A z_n komplex sorozat pontosan akkor konvergens, ha a $\operatorname{Re} z_n$ és $\operatorname{Im} z_n$ valós sorozatok azok, és ilyenkor $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + j \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$. Következésképp $\sum_n z_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum_n \operatorname{Re} z_n$ és $\sum_n \operatorname{Im} z_n$ az, és ilyenkor $\sum_n z_n = \sum_n \operatorname{Re} z_n + j \sum_n \operatorname{Im} z_n$.*

(2) *Ha z_n és w_n konvergens komplex sorozatok, akkor $z_n \pm w_n$ is az és $\lim_{n\to\infty} z_n \pm w_n = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$ és minden $a \in \mathbb{R}$-re az_n is az és $\lim_{n\to\infty} az_n = a \lim_{n\to\infty} z_n$.*

(3) *Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és z_0 torlódási pontja $\operatorname{Dom} f$-nek, akkor $\exists \lim_{z_0} f$ pontosan akkor, ha f valós és képzetes részének is van z_0-beli határértéke, és ilyenkor $\lim_{z_0} f = \lim_{z_0} \operatorname{Re} f + j \lim_{z_0} \operatorname{Im} f$, azaz $\operatorname{Re} \lim_{z_0} f = \lim_{z_0} \operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} \lim_{z_0} f = \lim_{z_0} \operatorname{Im} f$.*

(4) *Az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor folytonos $z_0 \in \mathbb{C}$-ben, ha a valós és képzetes része is az.*

(5) *Ha z_0 torlódási pontja $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$-nek és $\exists \lim_{z_0} f, \lim_{z_0} g$, akkor $\exists \lim_{z_0} f \pm g = \lim_{z_0} f \pm \lim_{z_0} g$, $\exists \lim_{z_0} af = a \lim_{z_0} f$ minden $a \in \mathbb{R}$-re.*

(6) *Ha f, g folytonosak z_0-ban, akkor $f \pm g$ és $a \cdot f$ is az minden $a \in \mathbb{R}$-re.*

2.2. Feladat. Mondjunk legalább két okot, amiért az identitásfüggvény ($f(z) = z$) folytonos!

2.3. Állítás. *$g(z) = \operatorname{Re} z$ és $h(z) = \operatorname{Im} z$ folytonos $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvények.*

Bizonyítás. Ezek az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekciók, amikről tudjuk, hogy folytonosak. VAGY: 2.14 és 2.2 miatt, mert ezek az identitásfüggvény koordinátafüggvényei. □

2.4. Következmény. *Ha f folytonos z_0-ban, akkor $\overline{f}$ és $|f|$ is az (utóbbi mint $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvény).*

Bizonyítás. 2.1(4)-et használva: ha $f = u + jv$ folytonos, akkor u és v, és így $-v$, tehát $\overline{f}$ valós és képzetes része is az. $|f|$ azért folytonos, mert $|g|$ az, ahol g az $f = u + jv$-nek megfelelő valós függvény, azaz $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. □

Következésképp a $g(z) = \overline{z}$ függvény mindenütt folytonos, mert az identitásfüggvény konjugáltja, az identitásfüggvény pedig folytonos (2.2). (Persze azért is, mert a koordinátafüggvényei folytonosak.)

2.5. Következmény (Weierstrass)**.** *Ha f folytonos a zárt, korlátos K halmazon, akkor $|f|$ felveszi ott a minimumát és a maximumát.*

Bizonyítás. $|f| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. □

2.6. Következmény. *Ha $\exists \lim_{z_0} f$, akkor $\exists \lim_{z_0} \overline{f} = \overline{\lim_{z_0} f}$ és $\exists \lim_{z_0} |f| = \left|\lim_{z_0} f\right|$.*

Bizonyítás. Ha $f = u + jv$, akkor

$$\lim_{z_0} \overline{f} = \lim_{z_0} u + j \lim_{z_0} -v = \lim_{z_0} u - j \lim_{z_0} v = \overline{\lim_{z_0} u + j \lim_{z_0} v} = \overline{\lim_{z_0} f},$$

[1] Emlékeztető: normált lineáris tér: lineáris tér plusz $\|\cdot\|$, ahol $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ a következő tulajdonságokkal: $\|x\| = 0 \iff x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$; $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (két pont közt legrövidebb út az egyenes)

ahol az első és utolsó egyenlőség 2.1(3), a középső meg 2.1(5) (a valós konstanssal való szorzás és a lim felcserélhetősége) miatt igaz; a második állítás pedig, mint az előbb, azért igaz, mert $\lim_{x_0+jy_0}|f| = \lim_{(x_0,y_0)}|g| = \left|\lim_{(x_0,y_0)} g\right| = \left|\lim_{x_0+jy_0} f\right|$, ahol $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. □

Két ráadás:

- Mivel $\mathbb{C}$ test, felmerül, hogy igazak lesznek-e a valós sorozatok és függvények olyan tulajdonságai, amelyeknek vektor értékű függvényekre nem volt értelme. A rendezést involválók nem, hiszen az most sincs ($\mathbb{C}$ test, de nem rendezett test), de a szorzásról és hányadosról szólók igen: tehát igaz pl., hogy konvergens sorozatok szorzata is az, és a határérték a határértékek szorzata, vagy hogy folytonos függvények hányadosa (pl. a racionális törtfüggvények) is az a nevező zérushelyeinek kivételével. Ezek az állítások ráadásul kevés számolással kijönnek az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények megfelelő tulajdonságaiból és abból, hogy határérték koordinátánként számolható.

  2.7. Tétel. *Ha z_0 torlódási pontja $\operatorname{Dom} f_1 \cap \operatorname{Dom} f_2$-nek és $\exists \lim_{z_0} f_i$ ($i = 1, 2$), akkor $\exists \lim_{z_0} f_1 f_2 = \lim_{z_0} f_1 \lim_{z_0} f_2$ (speciálisan $\lim_{z_0} cf_1 = c \lim_{z_0} f_1$ minden $c \in \mathbb{C}$-re), és ha $\lim_{z_0} f_2 \neq 0$, akkor $\exists \lim_{z_0} f_1/f_2 = \lim_{z_0} f_1 / \lim_{z_0} f_2$.*

  Bizonyítás. A fentiek illusztrálására belátjuk az első állítást. Ha $f_i(x+jy) = u_i(x,y) + jv_i(x,y)$ és $\lim_{z_0} f_i = a_i + b_i j$, akkor 2.1(3) miatt $a_i = \lim_{z_0} u_i$ és $b_i = \lim_{z_0} v_i$; ezért

  $$\lim_{z_0} \operatorname{Re} f_1 f_2 = \lim_{x_0+jy_0} u_1u_2 - v_1v_2 = a_1a_2 - b_1b_2 = \operatorname{Re}(a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j)$$

  és

  $$\lim_{z_0} \operatorname{Im} f_1 f_2 = \lim_{x_0+jy_0} u_1v_2 + u_2v_1 = a_1b_2 + a_2b_1 = \operatorname{Im}(a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j),$$

  2.1(3) miatt tehát $f_1 f_2$-nek van z_0-ban határértéke, mégpedig $(a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j)$. □

  2.8. Következmény. *Folytonos függvények szorzata, és a nevező zérushelyeinek kivételével a hányadosa is folytonos.*

  Következésképp például a racionális törtfüggvények (polinomok hányadosai) folytonosak a nevező zérushelyeinek kivételével.

- Szokás értelmet adni annak, hogy egy komplex sorozat végtelenbe tart: azt mondjuk, hogy $z_n \to \infty$, ha $|z_n| \to \infty$. És hasonlóan definiáljuk $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$-t is. Ok: Riemann-gömb. (Bijekció $\mathbb{C}$ és a gömb (minusz az északi pólusa) között: z képe az északi pólust és z-t összekötő szakasz és a gömb metszéspontja. Így a végtelenbe tartó sorozatok képei az északi sarkhoz tartóak.)

2.1. A komplex exponenciális függvény Az exponenciális függvényt úgy akarjuk kiterjeszteni $\mathbb{C}$-re, hogy minél több tulajdonsága (pl. az azonosságok, deriválhatóság) megmaradjon.

2.9. Definíció. $e^{x+jy} = e^x(\cos y + j \sin y)$

2.10. Következmény. *Az exponenciális függvény folytonos $\mathbb{C}$-n (hiszen a koordinátafüggvényei folytonosak).*

$\cos 0 + j\sin 0 = 1$ miatt valósokra ez tényleg a régi. Megmaradnak az azonosságok is, pl. $e^{z+w} = e^z e^w$, mert

$$e^{(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2)} = e^{x_1+x_2+j(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + j\sin(y_1+y_2))$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + j\sin y_1)(\cos y_2 + j\sin y_2) = e^{x_1+jy_1}e^{x_2+jy_2}$$

(a harmadik egyenlőségben a trigonometrikus alakban való szorzásra vonatkozó azonosságot használtuk), és hasonlóan: minden komplex z-re és m egészre $(e^z)^m = e^{mz}$.

Definícióból látszik, hogy $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ csak $\operatorname{Re} z$-től, szöge pedig csak $\operatorname{Im} z$-től függ. És az is, hogy e^z periodikus $2\pi j$ periódussal.

A definícióból: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$; speciálisan:

$$e^{0j} = 1 \qquad e^{j\frac{\pi}{2}} = j \qquad e^{j\pi} = -1 \qquad e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j$$

3. Deriválhatóság

Definíció: mint $\mathbb{R}$-ben (megtehetjük, mert $\mathbb{C}$ test), azaz:

3.1. Definíció. Az f komplex függvény deriválható értelmezési tartománya egy belső z_0 pontjában, ha létezik a

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték. Ilyenkor ez a határérték az f z_0-beli deriváltja, amit $f'(z_0)$-al jelölünk.

Mivel egy komplex függvény valós kétváltozós vektor értékű függvény is, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy nem a valós értelemben vett deriválhatóságáról van szó, akkor a definícióbeli deriválhatóságot komplex értelemben vett deriválhatóságnak mondjuk.

3.2. Példák. $f(z) = c$ és $f(z) = z$ deriválhatóak, és a deriváltjuk mindenütt 0 ill. 1.

Most is, mint valósban:

3.3. Tétel. *Ha f, g deriválható z_0-ban, akkor $f \pm g$, fg, és ha $g(z_0) \neq 0$, akkor f/g is, és $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ és $(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$. Ha még h deriválható $g(z_0)$-ban, akkor $h \circ g$ deriválható z_0-ban, és $(h \circ g)'(z_0) = h'(g(z_0))g(z_0)$.*

3.4. Következmény. *Polinomok mindenütt, racionális törtfüggvények a nevező zérushelyeit kivéve mindenütt deriválhatóak.*

És most is: deriválhatóságból következik a folytonosság, de fordítva nem. Pl. $g(z) = \overline{z}$, $h(z) = \operatorname{Re} z$ mindenütt folytonosak (ezt már láttuk), de sehol sem deriválhatók. Utóbbit be lehet látni a definícióból is, de kijön az alábbi tételből.

3.5. Tétel (Cauchy–Riemann féle parciális diffegyenletek)**.** *Ha $f = u + jv$ deriválható a $z_0 = x_0 + jy_0$ pontban, akkor u és v parciálisan deriválhatóak (x_0, y_0)-ban, és*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + jv_x(x_0, y_0) \qquad \text{és} \qquad f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - ju_y(x_0, y_0);$$

következésképp

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad \text{és} \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Bizonyítás.

$$f'(z_0) = \lim_{z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)+jv(x,y)-(u(x_0,y_0)+jv(x_0,y_0))}{(x-x_0)+j(y-y_0)}$$
$$= \lim_{(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)+j(v(x,y)-v(x_0,y_0))}{(x-x_0)+j(y-y_0)}$$

Speciálisan, $y = y_0$ mentén

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)+j(v(x,y_0)-v(x_0,y_0))}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + j\lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0} = u_x(x_0,y_0)+jv_x(x_0,y_0),$$

$x = x_0$ mentén pedig

$$f'(z_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)+j(v(x_0,y)-v(x_0,y_0))}{j(y-y_0)}$$
$$= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{j(y-y_0)} + \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0} = -ju_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0),$$

és ezeket akartuk bizonyítani. □

3.6. Példák. A tételből valóban következik, hogy $g(z) = \overline{z}$ és $h(z) = \operatorname{Re} z$ sehol sem deriválhatóak, hiszen pl. g koordinátafüggvényei $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$, tehát $u_x = 1 \neq -1 = v_y$.

A tétel megfordítása nem igaz: a CR-egyenletek teljesüléséből nem következik a deriválhatóság, amint azt a következő példa mutatja.

3.7. Példa. $f(x+jy) = \sqrt{|xy|}$-ra teljesülnek a CR-egyenletek az origóban, de mégsem deriválható ott: $v(x,y)$ mindenütt, $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ pedig a tengelyek mentén 0, így parciális deriváltjaik 0-k az origóban, tehát ott kielégítik a CR-egyenleteket.

De $f'(0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x+jy)-f(0,0)}{x+jy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{x+jy}$ nem létezik, mert a valós tengelyen ($y = 0$ mentén) 0, de $y = x > 0$ mentén $\lim_{x\to+0} \frac{x}{x+jx} = \frac{1}{1+j}$.

Egy részleges megfordítás azért igaz:

3.8. Tétel. *Ha léteznek u és v parciális deriváltjai az U nyílt halmazon, folytonosak és kielégítik a CR-egyenleteket $(x_0,y_0) \in U$-ban, akkor $u+jv$ deriválható x_0+jy_0-ban.*

3.9. Következmény. $e^z \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *és* $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.

Bizonyítás. $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$ mindenütt folytonosak, és a CR-egyenletek is teljesülnek, mert $u_x(x,y) = e^x \cos y = v_y(x,y)$ és $u_y(x,y) = -e^x \sin y = -v_x(x,y)$.

3.5 miatt $\frac{d}{dz}e^z = u_x(x,y)+jv_x(x,y) = e^z$. □

3.1. Komplex és valós differenciálhatóság kapcsolata 3.8 ismerős többváltozós függvénytanból: ott is a folytonos differenciálhatóság (vagyis a parciális deriváltak pontbeli folytonossága) volt egy elégséges feltétele a deriválhatóságnak. És persze a parciális deriváltak létezése szükséges feltétele. Ami most extra, az a Cauchy–Riemann egyenletek teljesülése. Az alábbi 3.12 tétel mutatja, hogy valóban csak az a különbség.

3.10. Állítás. $(a+jb)(x+jy) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *ahol a baloldalon természetesen komplex számok, a jobboldalon pedig mátrixok szorzása szerepel.*

Bizonyítás. A kétféle szorzás definíciójából adódik, de abból is, hogy ez a mátrix az $a+jb$-vel való szorzás (mint lineáris transzformáció) felírása a szokásos bázisban. □

3.11. Definíció. $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ az $a+bj$ komplex szám mátrixa.

Az elnevezés 3.10 miatt jogos, hiszen eszerint a z komplex szám mátrixával való mátrixszorzás a z-vel való komplex szorzás.

3.12. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbb{C}$, $f : H \to \mathbb{C}$ és $z_0 = (x_0, y_0)$ belső pontja H-nak. Akkor f pontosan akkor deriválható komplex értelemben z_0-ban ha valós értelemben deriválható ott és a koordinátafüggvényei itt kielégítik a Cauchy–Riemann egyenleteket. Ilyenkor f z_0-beli Jacobi-mátrixa $f'(z_0)$ mátrixa.*

Bizonyítás. Először is,

$$(*) \qquad w = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \iff \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-M\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(z-z_0)\\ \mathrm{Im}(z-z_0)\end{pmatrix}}{|z-z_0|} = 0$$

ahol M a w mátrixa, mert egyrészt

$$(1) \qquad \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - w\right| = \left|\frac{f(z)-f(z_0)-w(z-z_0)}{z-z_0}\right| = \left|\frac{f(z)-f(z_0)-w(z-z_0)}{|z-z_0|}\right|,$$

másrészt 3.10 miatt

$$(2) \qquad w(z-z_0) = M\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(z-z_0)\\ \mathrm{Im}(z-z_0)\end{pmatrix},$$

és így

$$w = \lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \iff 0 = \lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - w \iff 0 = \lim_{z\to z_0} \left|\tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - w\right|$$

$$\overset{(1)}{\iff} 0 = \lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)-w(z-z_0)}{|z-z_0|} \overset{(2)}{\iff} \lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)-M\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(z-z_0)\\ \mathrm{Im}(z-z_0)\end{pmatrix}}{|z-z_0|} = 0.$$

Még egy észrevétel: ha $f = u + jv$ valós értelemben deriválható $z_0 = x_0 + jy_0$-ban és M az f z_0-beli Jacobi-mátrixa, akkor $M = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}$; következésképp az, hogy M egy komplex szám mátrixa, pontosan azt jelenti, hogy f koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjai z_0-ban kielégítik a Cauchy–Riemann egyenleteket.

Tehát ha f komplex értelemben deriválható, akkor $(*)$ $\Rightarrow$ iránya miatt valós értelemben is deriválható, és $f'(z_0)$ lesz a Jacobi-mátrixa, amiből a febti észrevétel miatt következik, hogy f koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjai z_0-ban kielégítik a Cauchy–Riemann egyenleteket.

Fordítva: ha f valós értelemben deriválható, M a Jacobi-mátrixa, és f koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjai z_0-ban kielégítik a Cauchy–Riemann egyenleteket akkor M egy komplex szám mátrixa, és az a komplex szám $(*)$ $\Leftarrow$ iránya miatt f z_0-beli deriváltja. □

3.13. Következmény. *Az alábbi állítások ekvivalensek tetszőleges f komplex függvényre és f értelmezési tartományának egy z_0 belső pontjára.*

(1) *f komplex értelemben deriválható z_0-ban*
(2) *f valós értelemben deriválható z_0-ban és z_0-beli deriváltoperátora forgatva nyuzsorítás (vagyis egy komplex számmal való szorzás)*
(3) *f valós értelemben deriválható z_0-ban és z_0-beli Jacobi-mátrixa egy komplex szám mátrixa.*

3.14. Következmény. *Ha f komplex értelemben deriválható a z_0 pontban, akkor a koordinátafüggvényei deriválhatóak ott.*

Bizonyítás. 3.12 miatt f mint valós vektorfüggvény deriválható, és azt többváltozós függvénytanból tudjuk, hogy ez ekvivalens a koordinátafüggvényei deriválhatóságával. □

3.2. CR néhány következménye

(1) Ha f valós értékű (elég, hogy a képzetes része konstans), és deriválható z_0-ban, akkor $f'(z_0) = 0$, mert ha $f = u + jv$, ahol v konstans, akkor v parciális deriváltjai 0-k, vagyis $\operatorname{Re} f'(z_0) = v_y(z_0) = 0$ és $\operatorname{Im} f'(z_0) = v_x(z_0) = 0$. Hasonló okból, ugyanez a helyzet ha f tiszta képzetes.

(2) $f(z) = |z|$ sehol sem deriválható: 0-ban azért, mert f első koordinátafüggvényének $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$-nek nincsenek parciális deriváltjai a 0-ban, hiszen pl. $u_x(0,0)$ az $|x|$ 0-beli deriváltja volna; 0-n kívül meg azért, mert ha $|z|$ deriválható volna, akkor $|z|^2 = z\overline{z}$, és akkor $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$ is, márpedig arról már láttuk, hogy nem az.

(3) $f(z) = z|z|$ csak 0-ban deriválható: máshol nem, mert akkor $|z| = f(z)/z$ is az lenne, 0-ban viszont igen, mert $\lim_0 \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_0 |z| = 0$.

3.15. Definíció. f holomorf a H nyílt halmazon (jelölés: $f \in \mathscr{H}(H)$), ha H minden pontjában deriválható. f reguláris a z_0 pontban, ha holomorf z_0 egy környezetében. f egész függvény, ha $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.

3.16. Definíció. $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, ha nyílt és poligoniálisan összefüggő.

3.17. Állítás. *Ha $f = u + jv \in \mathscr{H}(D)$, D tartomány, és u vagy v parciális deriváltjai 0-k D-n, akkor f konstans D-n.*

Bizonyítás. 3.5 miatt ha u vagy v parciális deriváltjai 0-k D-n, akkor ez mindkettő parciális deriváltjaira áll, ezért (mivel 3.14 miatt u és v deriválhatók) u és v, és így f is konstans D-n. □

3.18. Következmény. *Ha $f = u + jv \in \mathscr{H}(D)$, D tartomány, és $f' = 0$ D-n, akkor f konstans D-n.*

Bizonyítás. 3.5 miatt $0 = f' = u_x + jv_x = v_y - ju_y$, tehát állnak az állítás feltételei. □

3.19. Következmény. *Ha $f : D \to \mathbb{R}$ (vagy $f(z)$ tiszta képzetes minden $z \in D$-re), $f \in \mathscr{H}(D)$, D tartomány, akkor f konstans D-n.*

Bizonyítás. 3.2 alfejezet (1) pontja szerint $f' \equiv 0$ D-n, és így 3.18 miatt f konstans D-n. □

3.20. Következmény. *Ha $f, \overline{f} \in \mathscr{H}(D)$, D tartomány, akkor f konstans D-n.*

Bizonyítás. A feltétel miatt $2u = f + \overline{f} \in \mathscr{H}(D)$ és $2jv = f - \overline{f} \in \mathscr{H}(D)$, tehát az előző következmény miatt u és v is konstans. □

3.21. Következmény. *Ha $f \in \mathscr{H}(D)$, $|f|$ konstans a D tartományon, akkor f is konstans D-n.*

Bizonyítás. Ha $|f| \equiv k = 0$, akkor persze $f \equiv 0$. Ellenkező esetben viszont f sehol sem 0, és ezért $\overline{f} = k^2/f \in \mathscr{H}(D)$, amiből 3.20 miatt következik, hogy f konstans. □

3.3. Harmonikus függvények

3.22. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{H}(H)$, ahol H egy nyílt halmaz, akkor $f' \in \mathcal{H}(H)$ (következésképp f akárhányszor deriválható H-n).*

Ez egyáltalán nem triviális, és majd még visszatérünk rá (ld. 5.26!), de még előbb szeretnénk használni az alábbi következményét:

3.23. Következmény. *Tegyük fel, hogy $f = u + jv \in \mathcal{H}(H)$, ahol H egy nyílt halmaz. Akkor*

(1) *u, v parciális deriváltjai folytonosak (azaz u, v folytonosan deriválhatóak) H-n*
(2) *u, v másodrendű parciális deriváltjai is folytonosak H-n.*

Bizonyítás. (1) Ha $f = u + jv$ deriválható, akkor a tétel (és 3.5) miatt $f' = u_x + jv_x = v_y - ju_y$ is, ezért folytonos is, következésképp u, v parciális deriváltjai folytonosak.
(2) A tétel (és 3.5) miatt $f' = u_x + jv_x = v_y - ju_y$ deriválható, tehát (1) miatt u_x, v_x, v_y és u_y parciális deriváltjai folytonosak. □

Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány. Kérdés: $u : D \to \mathbb{R}$-hez mikor van $v : D \to \mathbb{R}$, amire $u + jv \in \mathcal{H}(D)$? Ilyenkor azt mondjuk, hogy v harmonikus társa u-nak. Mivel ilyenkor $-v + ju = j(u + jv) \in \mathcal{H}(D)$ (azaz, ha u valós része egy holomorf függvénynek, akkor képzetes része is egy ilyennek), ez ugyanaz a kérdés, mint hogy mikor képzetes része egy $D \to \mathbb{R}$ függvény egy D-n holomorf függvénynek.

Tegyük fel, hogy u ilyen, és legyen v az u egy harmonikus társa. Akkor Cauchy–Riemann miatt $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$ és ebből 3.23(2) és a Young–tétel miatt (az első egyenletet x, a másodikat y szerint parciális deriválva) $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, azaz $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Azaz: ha f homolomorf a D tartományon, akkor f valós és képzetes részének D-n folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai és $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ kielégítik a $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ ún. Laplace-egyenletet.

3.24. Definíció. Az $u : D \to \mathbb{R}$ függvény harmonikus, ha folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai és kielégíti a Laplace-egyenletet.

A harmonicitás tehát szükséges feltétele annak, hogy egy függvény egy holomorf függvény valós vagy képzetes része lehessen. De nem elégséges, amint azt a következő példa mutatja.

3.25. Példa. Legyen $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ a $D = \mathring{S}_2(0)$ tartományon (az origó 2 sugarú lukas környezetén). u harmonikus D-n, mert

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad u_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad u_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} = u_{yx}, \quad u_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

vagyis folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai és kielégítik a Laplace-egyenletet.

De u-nak nincs harmonikus társa, mert tegyük fel, hogy v az (azaz $u + jv \in \mathcal{H}(D)$), és legyen $g(t)$ a $v(\cos t, \sin t) = v \circ (\cos t, \sin t)$ valós függvény. Akkor g deriválható $\mathbb{R}$-en, mert deriválható függvények kompozíciója (v 3.14 miatt az) és $g(0) = g(2\pi)$, tehát a Rolle–tétel miatt $g'(c) = 0$

valamely $c\in(0,2\pi)$-re. De ez nem lehet, mert

$$\begin{aligned} g'(t) = \big(v\circ(\cos t,\sin t)\big)' &= \operatorname{grad} v\,|_{(\cos t,\sin t)}\,(\cos t,\sin t)' \\ &= (v_x(\cos t,\sin t), v_y(\cos t,\sin t))(-\sin t,\cos t) \\ &\overset{CR}{=} (-u_y(\cos t,\sin t), u_x(\cos t,\sin t))(-\sin t,\cos t) \\ &= \tfrac{2\sin^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t} + \tfrac{2\cos^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t} = 2. \end{aligned}$$

Egy topológiai jellegű kikötéssel együtt azonban a harmonicitás már elégséges feltétel a harmonikus társ létezésére.

3.26. Definíció. A $D\subseteq\mathbb{C}$ tartomány egyszeresen összefüggő, ha „nincsenek benne lyukak”, azaz bármely, benne haladó egyszerű zárt görbével együtt annak belsejét (az általa határolt tartományt) is tartalmazza.

Egy lukas környezet, mint ami a fenti példában szerepelt, tipikusan nem ilyen.

3.27. Tétel. *Egyszeresen összefüggő tartományon harmonikus függvénynek van harmonikus társa; és a harmonikus társak csak konstansban térnek el egymástól (mert ha $u+jv$, $u+jw\in\mathscr{H}(D)$, akkor a különbségük, $j(v-w)\in\mathscr{H}(D)$ tiszta képzetes, tehát 3.19 miatt konstans).*

Bizonyítás. A Laplace-egyenlet miatt $\operatorname{rot}(-u_y,u_x) = u_{xx}+u_{yy} = 0$, tehát a megfelelő vektoranalízisbeli tétel miatt $(-u_y,u_x)$-nek van potenciálfüggvénye, és az 3.5 miatt u harmonikus társa. ☐

Harmonikus társ keresése egzakt diffegyenlet megoldása: ott $P_y = Q_x$ és keresünk v-t, amire $v_x = P$, $v_y = Q$. Most $u_{xx} = -u_{yy}$ (azaz $P = -u_y$, $Q = u_x$, a Laplace-egyenlet pedig a keresztben vett parciálisok egyenlősége), és a keresett v, amire $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ az u harmonikus társa.

3.28. Példa. Keressük meg $u(x,y) = x^3-3xy^2+2y : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ harmonikus társát, ha van!

u harmonikus, mert (polinom lévén) folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai, és

$$u_x = 3x^2-3y^2 \rightsquigarrow u_{xx} = 6x, \qquad u_y = -6xy+2 \rightsquigarrow u_{yy} = -6x,$$

és $\mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, tehát a fenti tétel miatt van harmonikus társa. Ha v ilyen, akkor $v_y = u_x = 3x^2-3y^2$ és $v_x = -u_y = 6xy-2$; az elsőből $v = \int 3x^2-3y^2\,dy = 3x^2y-y^3+c(x)$, és ebből a másodikkal együtt $6xy-2 = v_x = 6xy+\frac{d}{dx}c(x)$, amiből meg $c(x) = \int -2\,dx = -2x+C$, azaz $v(x,y) = 3x^2y-y^3-2x+C$.

4. Hatványsorok

A valóshoz hasonlóan: $a\in\mathbb{C}$ körüli hatványsor $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$, ahol $c_n\in\mathbb{C}$ minden n-re. Komplex hatványsorokra igazak amiket valós hatványsorokról tanultunk (az ottani bizonyításokban polinomok deriválását és abszolútértéket használtunk), csak most konvergencia-*intervallum* helyett konvergencia-*kör* van, azaz a megfelelő tétel így szól:

4.1. Tétel. *A $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$ hatványsor $\mathrm{S}_R(a)$ belsejében konvergens, külsejében nem, a határon pedig bármi lehet; itt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ (és $R=\infty$, és a sor mindenütt konvergens, ha* $\limsup 0$*, és $R=0$, és a sor csak a-ban konvergens, ha* $\limsup = \infty$*) a hatványsor konvergenciasugara.*

És, ahogyan valósban:

4.2. Tétel. *Hatványsor összegfüggvénye a konvergencia-kör belsejében holomorf, és tagonként deriválható.*

Az exponenciális függvény hatványsora Legyen $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(1) $\exp(0) = 1$ (a definícióból)

(2) exp holomorf $\mathbb{C}$-n: $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$ miatt $R = \infty$. (Vagy: 4.1 és amiatt, hogy a valósokon $R = \infty$. Vagy: hányadoskritériummal könnyű látni, hogy mindenütt konvergens.)

(3) $\exp'(z) = \exp(z)$:
$$\exp'(z) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

(4) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$: Tetsz. $a \in \mathbb{C}$-re legyen $f(z) = \exp(z)\exp(a-z)$; akkor $f'(z) = \exp'(z)\exp(a-z) + \exp(z)\exp'(a-z) \overset{(3)}{=} 0$, tehát f konstans; speciálisan minden z-re $f(z) = f(0) = \exp(0)\exp(a) \overset{(1)}{=} \exp(a)$, azaz $\exp(z)\exp(a-z) = \exp(a)$. Ebben a helyére $z+w$-t írva kapjuk az állítást.

(5) $\exp(x+jy) = e^x(\cos y + j\sin y)$, vagyis az exp-et definiáló hatványsor a korábban bevezetett komplex exponenciális függvényt adja:
$$\begin{aligned}\exp(x+jy) &\overset{(4)}{=} \exp(x)\exp(jy) = e^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jy)^n}{n!}\right)\\ &= e^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} j^{2n}\frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} j^{2n+1}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= e^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = e^x(\cos y + j\sin y)\end{aligned}$$

Úgyhogy mostantól e^z-vel jelöljük $\exp(z)$-t.

(6) $(\forall z \in \mathbb{C})e^z \neq 0$: valóban, (4) és (1) miatt $e^z e^{-z} = 1$.

(7) e^z-nek $2\pi j$ alapperiódusa, azaz $2\pi j\lambda$ nem periódusa semmilyen $\lambda \in (0,1)$-re; sőt: ha $e^z = e^w$, akkor $z - w = 2k\pi j$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re:

$e^z = e^w \overset{(4)}{\rightsquigarrow} e^{z-w} = e^0 = 1$. Legyen $z - w = a + bj$; akkor
$$1 = e^{a+bj} = e^a \underbrace{(\cos b + j\sin b)}_{||=1 \rightsquigarrow e^a = 1 \rightsquigarrow a=0} = \cos b + j\sin b \rightsquigarrow \cos b = 1 \ \&\ \sin b = 0 \rightsquigarrow b = 2k\pi,$$
vagyis $z - w = 0 + j2k\pi$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re.

4.3. Következmény. *e^z kölcsönösen egyértelmű leképezés $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$-ről $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-ba.*

Ez persze magyarul azt jelenti, hogy minden $w \neq 0$ komplex szám felírható trigonometrikus alakban, és a felírás egyértelmű, ha kikötjük, hogy $\arg w \in (-\pi, \pi]$.

Bizonyítás. Injektivitást az előbb ((7) utolsó állítása) láttuk, (6)-ban pedig azt, hogy e^z valóban $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-ba képez. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $(\forall w \neq 0)(\exists z)(\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi] \ \&\ e^z = w)$. Legyen w ilyen; akkor $z = \ln|w| + j\arg w$ jó lesz ősnek (ahol $\arg w \in (-\pi, \pi]$ w szöge), mert $e^{\ln|w| + j\arg w} = e^{\ln|w|}(\cos(\arg w) + j\sin(\arg w)) = w$. □

A bizonyításból az is kiderült, hogy e^z $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$-re való megszorításának inverze:

4.4. Definíció. $\ln w = \ln|w| + j\arg w$ ($\arg w \in (-\pi, \pi]$), ahol az egyenlőség jobboldalán a „régi", valós logaritmus áll.

($w \in \mathbb{R}^+$-ra ez megegyezik a logaritmus régi definíciójával, hiszen ilyenkor $|w| = w$ és $\arg w = 0$.) Mivel e^z $2\pi j$ szerint periodikus, szokás a logaritmust úgy is definiálni, hogy $\ln w = \ln|w| + j\arg w + 2k\pi j$, azaz „többértékű függvényként”, és ilyenkor az általunk definiált a logaritmus „fő ága”.

Vigyázat: $w \neq 0$-ra $e^{\ln w} = w$ (úgy definiáltuk ln-t, hogy ez igaz legyen), de $\ln e^z$ nem feltétlenül lesz $= z$ (pl. $\ln e^{-\pi j} = \ln(\cos -\pi + j\sin -\pi) = \ln 1 + \pi j = \pi j$); nem is lehet, hiszen e^z periodicitása miatt akkor minden z-re $z = \ln e^z = \ln e^{z+2\pi j} = z + 2\pi j$ lenne. Csak annyi biztos, hogy

4.5. Állítás. $\ln e^z = z + 2k\pi j$ *valamilyen* $k \in \mathbb{Z}$*-re.*

A bizonyításból az is kiderül, hogy $\ln e^z = z$ pontosan akkor, ha $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Bizonyítás.
$$\ln e^{a+bj} = \ln e^a + j\arg e^{a+bj} = a + jb_0$$
ahol $b_0 \in (-\pi, \pi]$ és $b - b_0 = 2k\pi j$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re. □

4.6. *Megjegyzés.* Ez nem valami új, „komplex” jelenség, pontosan ez a helyzet (a szokásos, valós) arctg-el: mivel arctg a $\mathrm{tg} \restriction (-\pi/2, \pi/2)$ inverze, $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$, de $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$ csak $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ esetén áll. Pl. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\pi) = \mathrm{arctg}\, 0 = 0 \neq \pi$.

4.7. Példák. $\ln(-1) = \ln 1 + j\pi = j\pi$; $\ln j = \ln 1 + j\pi/2 = j\pi/2$

Komplex logaritmus tulajdonságai ln folytonos az értelmezési tartományán, kivéve a negatív valósakat, mert ott az arg ugrik 2π-t (pl. $\ln(-1) = j\pi$, de ha -1-et egy kicsit elforgatjuk pozitív irányban, akkor a logaritmus $j(-\pi + \epsilon)$ lesz). Sőt, deriválható is $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$-n, mert deriválható függvény inverze, és (mivel komplexben is: $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$) $\ln' w = \frac{1}{e^{\ln w}} = \frac{1}{w}$.

A logaritmus azonosságai is igazak maradnak, de csak $2\pi j$ egész számú többszöröseinek erejéig. Pl.

4.8. Állítás. *Minden* $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*-ra* $\ln(zw) = \ln z + \ln w + 2kj\pi$ *valamilyen* $k \in \mathbb{Z}$*-re.*

Bizonyítás. Legyen k az egyetlen olyan egész, amire $\arg(z) + \arg(w) + 2k\pi \in (-\pi, \pi]$. Akkor
$$\ln(zw) = \ln(|zw|) + j\arg(zw) = \ln(|z|) + \ln(|w|) + j(\arg(z) + \arg(w) + 2k\pi) = \ln z + \ln w + j2k\pi$$
ahol a második egyenlőségben a valós logaritmus megfelelő azonosságát használtuk.

□

4.9. Definíció. Általános hatványfüggvény: $z \in \mathbb{C} \setminus 0$, $w \in \mathbb{C}$-re $z^w = e^{w \ln z}$.

4.10. Példák. $\ln(-1) = \ln 1 + j\pi = j\pi$ miatt $(-1)^j = e^{j\ln(-1)} = e^{j^2\pi} = e^{-\pi}$; $\ln j = \ln 1 + j\pi/2 = j\pi/2$ miatt $j^j = e^{j\ln j} = e^{j^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$.

4.11. Állítás.
(1) $z \neq 0$*-ra* $z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1+w_2}$
(2) $z \neq 0$*-ra* $z^{-w} = 1/z^w$
(3) $z \neq 0$*-ra* $\ln z^w = w\ln z + 2kj\pi$ *valamilyen* $k \in \mathbb{Z}$*-re.*

Bizonyítás.
(1) $z^{w_1} z^{w_2} = e^{w_1 \ln z} e^{w_2 \ln z} = e^{(w_1+w_2)\ln z} = z^{w_1+w_2}$
(2) $z^w z^{-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \rightsquigarrow z^{-w} = 1/z^w$
(3) $\ln z^w = \ln e^{w\ln z} = w\ln z + 2kj\pi$ 4.5 miatt.

□

4.12. *Megjegyzés.* Mértani sor összegképlete ugyanaz (és ugyanúgy lehet bizonyítani, mint a valósban): $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ ha $|z| < 1$ és divergens ha $|z| \geq 1$.

4.13. Feladat. Hol konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} e^{jnz}$?

4.14. Feladat. Hol konvergens $\sum n! e^{n^2 z}$?

Trigonometrikus és hiperbolikus függvények A hiperbolikus függvényeket pontosan úgy definiáljuk, mint a valósban.

4.15. Definíció. $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ és $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

Mivel az exponenciális függvény ismert azonosságai a komplex számokra való kiterjesztés során megmaradtak, ugyanez igaz a hiperbolikus függvényekre is; pl. könnyű megmutatni, hogy sh páratlan, ch páros, és hogy $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. Az újdonság a trigonometrikus függvényekkel való kapcsolat (4.17 és 4.20 alább).

4.16. Definíció. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Tehát a valós trigonometrikus függvények kiterjesztései, és egész függvények, mert pl. sin konvergencia-sugara $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/(2n+1)!}} = \infty$ (vagy 4.1 miatt, mert minden valósra konvergensek). Tagonkénti deriválással (4.2) kijön, hogy $\sin' z = \cos z$ és $\cos' z = -\sin z$. Újdonság, hogy a trigonometrikus függvények kifejezhetők az exponenciális függvénnyel (és a hiperbolikus függvényekkel):

4.17. Állítás. $\sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz})(= -j \operatorname{sh}(jz))$ *és* $\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})(= \operatorname{ch}(jz))$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}) &= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jz)^n - (-jz)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1-(-1)^n)}_{0,\ \text{ha n páros}} j^n \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} 2 j^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (j^2)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z
\end{aligned}$$

és hasonlóan (vagy ebből deriválással) a másik. □

Emiatt viszont a hiperbolikus függvényekre (azaz végső soron az exponenciális függvényre) vonatkozó azonosságokból kijönnek a trigonometrikus azonosságok. Például:

4.18. Állítás. (1) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
(2) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
(3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Bizonyítás. Először is,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(z)\operatorname{ch}(w) &= \frac{1}{4}(e^z - e^{-z})(e^w + e^{-w}) = \frac{1}{4}(e^{z+w} - e^{-z-w} + e^{z-w} - e^{-z+w}) \\
&= \frac{1}{4}(2\operatorname{sh}(z+w) + 2\operatorname{sh}(z-w)) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(z+w) + \operatorname{sh}(z-w)),
\end{aligned}$$

következésképp, sh páratlan volta miatt

$$\operatorname{sh}(z)\operatorname{ch}(w) + \operatorname{ch}(z)\operatorname{sh}(w) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(z+w) + \operatorname{sh}(z-w) + \operatorname{sh}(w+z) + \operatorname{sh}(w-z)) = \operatorname{sh}(z+w)$$

4.17 szerint tehát

$$\sin z \cos w + \cos z \sin w = -j(\operatorname{sh}(jz)\operatorname{ch}(jw) + \operatorname{ch}(jz)\operatorname{sh}(jw)) = -j \operatorname{sh} j(z+w) = \sin(z+w)$$

És hasonlóan, 4.17 miatt: $\sin^2 z + \cos^2 z = -\operatorname{sh}^2 jz + \operatorname{ch}^2 jz = 1$.

Végül: (2)-t megkapjuk (1)-ből z szerinti deriválással. ☐

4.19. Következmény. sin *és* cos $\mathbb{C}$*-n is* 2π *szerint periodikus, és ez az alapperiódusa; továbbá egyiknek sincsenek új gyökei.*

Bizonyítás. 2π periódus, mert e^z-nek $2\pi j$ periódusa, ezért e^{jz}-nek és e^{-jz}-nek 2π periódusa. 2π alapperiódus, mert a valósakon az. Végül:

$$\sin z = 0 \overset{4.17}{\iff} e^{jz} = e^{-jz} \overset{(7)}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z}) jz - (-jz) = 2k\pi j \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) z = k\pi$$

és hasonlóan cos-ra. ☐

4.20. Állítás. (1) $\operatorname{sh}(jz) = j \sin z$
(2) $\sin(jz) = j \operatorname{sh} z$
(3) $\operatorname{ch}(jz) = \cos z$
(4) $\cos jz = \operatorname{ch} z$

Vagyis sin és sh „páratlan j-re nézve (csak sin $\leftrightsquigarrow$ sh)”, cos és ch „páros j-re nézve (csak cos $\leftrightsquigarrow$ ch)”.

Bizonyítás. 4.17 miatt $j \sin z = -j^2 \operatorname{sh}(jz) = \operatorname{sh}(jz)$, amiből, sh páratlan mivolta miatt $\sin(jz) = \frac{1}{j} \operatorname{sh}(-z) = -j \cdot - \operatorname{sh} z = j \operatorname{sh} z$.

Hasonlóan (vagy az első kettőből deriválással): 4.17 miatt $\cos z = \operatorname{ch}(jz)$, amiből $\cos jz = \operatorname{ch}(j^2 z) = \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$ következik. ☐

4.21. Következmény. sin *és* cos *nem korlátos.*

Bizonyítás. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sh} x = \infty$ miatt $\lim_{x\to\infty} |\sin(jx)| = \lim_{x\to\infty} |j \operatorname{sh}(x)| = \lim_{x\to\infty} |\operatorname{sh}(x)| = \infty$. cos hasonlóan, vagy sin nem-korlátosságából és 4.18(3)-ból. ☐

4.22. Feladat. Határozza meg $\cos(\frac{\pi}{2} + j)$ képzetes részét!

5. Komplex vonalintegrál

5.1. Görbék a komplex síkon Szükségünk lesz rájuk, mert ilyenek mentén fogunk integrálni.

5.1. Definíció. Legyen $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. z görbe, ha $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ folytonos függvény. Szokás azt is mondani, hogy $G=\operatorname{Ran} z$ a z által adott (vagy paraméterezett) görbe.

A z görbe síma, ha szakaszonként folytonosan deriválható (mint $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ függvény[2]; azaz a koordinátafüggvényei azok)[3], és az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ értelemben vett deriváltja $\dot{z}(t)$ (ami $=x'(t)+jy'(t)$ ha $z(t)=x(t)+jy(t)$) csak véges sok helyen 0. A görbe zárt, ha $z(a)=z(b)$; egyszerű, ha injektív $[a,b)$-n (azaz nem metszi önmagát).

Mostantól kezdve görbén síma görbét értünk.

5.2. Definíció (Görbe irányítása)**.** Ha G a $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ görbe, akkor G-vel ellentétes irányítású a $-G:z(a+b-t):[a,b]\to\mathbb{C}$ görbe (ugyanaz a ponthalmaz). Egy zárt, egyszerű görbe irányítása pozitív, ha az általa határolt tartomány balkézre esik (azaz ha az óramutató járásával ellentétes).

5.3. Példák. Egy poligon, vagy az origó középpontú, r sugarú kör ($z(t)=re^{jt}$).

5.4. Definíció. A $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ görbe hossza $\int_a^b|\dot{z}(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$.

Először nem tetszőleges görbéken, csak $\mathbb{R}$ részintervallumain fogunk integrálni.

5.5. Definíció. Legyen $g:[a,b]\to\mathbb{C}$, $g(t)=u(t)+jv(t)$ folytonos. Akkor $\int_a^b g(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+j\int_a^b v(t)\,dt$ (ezek az integrálok u és v folytonossága miatt léteznek).

5.6. Állítás. *Az $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények integrálása lineáris operátor.*

Bizonyítás. Az, hogy az összeget és a valós számmal való szorzást megtartja, triviálisan következik abból, hogy a valós integrál ilyen, és hogy komplex számok összeadása és valós számmal való szorzása koordinátánként történik. Azt kell még megmutatni, hogy a komplex számmal való szorzást is megtartja, azaz $\int_a^b cg=c\int_a^b g$. Ezt viszont elég belátni $c=j$-re, ami igaz, mert

$$\begin{aligned}\int_a^b j(u(t)+jv(t))\,dt&=\int_a^b -v(t)+ju(t)\,dt=\int_a^b -v(t)+j\int_a^b u(t)\,dt\\&=j\left(\int_a^b u(t)+j\int_a^b v(t)\,dt\right)=j\int_a^b u(t)+jv(t)\,dt\end{aligned}$$

(itt a második és negyedik egyenlőségben az 5.5 definíciót használtuk), hiszen emiatt

$$\int_a^b(a+bj)g(t)\,dt=\int_a^b ag(t)+jbg(t)\,dt=a\int_a^b g(t)\,dt+jb\int_a^b g(t)\,dt=(a+jb)\int_a^b g(t)\,dt.$$

□

5.7. Állítás. (1) *Folytonos $g:[a,b]\to\mathbb{C}$-re $\int_b^a g(t)\,dt=-\int_a^b g(t)\,dt$.*
(2) *Az $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények integrálása additív halmazfüggvény.*

Bizonyítás. Mindkét állítás az $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények integráljának definíciója és a valós egyváltozós integrál megfelelő tulajdonságainak közvetlen következménye. □

[2]komplex értelemben általában nem lesz deriválható, mert koordinátafüggvényei második változó szerinti parciális deriváltjai mindig 0-k

[3]folytonos $[a,b]$-n és $[a,b]$ előáll véges sok, páronként közös belső pont nélküli olyan részhalmazának uniójaként, melyek belsejében folytonosan deriválható és korlátos

5.8. Állítás ($\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények helyettesítéses integrálása)**.** *Legyen* $g = u + jv : [a, b] \to \mathbb{C}$ *folytonos,* $\lambda : [c, d] \to [a, b]$ *deriválható bijekció. Akkor* $\int_a^b g(t)\,dt = \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} g(\lambda(s))\lambda'(s)\,ds$.

Bizonyítás. Koordinátánként a valós helyettesítéses integrálásra visszavezetve:

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + j\int_a^b v(t)\,dt = \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} u(\lambda(s))\lambda'(s)\,ds + j\int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} v(\lambda(s))\lambda'(s)\,ds$$
$$= \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} u(\lambda(s))\lambda'(s) + jv(\lambda(s))\lambda'(s)\,ds = \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} \big(u(\lambda(s)) + jv(\lambda(s))\big)\lambda'(s)\,ds = \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} g(\lambda(s))\lambda'(s)\,ds$$

□

5.9. Definíció. Legyen G a $z(t)$, $t \in [a, b]$ által adott görbe, $f : G \to \mathbb{C}$ folytonos. Akkor $\int_G f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt$. ($f(z(t))\dot{z}(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ függvény, tehát a jobboldalon szereplő integrálnak már adtunk értelmet.)

A definíció látszólag függ a görbe megadásának módjától, de valójában nem zavaró módon:

5.10. Definíció. A $z_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ és $z_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ által adott G_1 és G_2 görbék símán ekvivalensek, ha van olyan folytonosan deriválható $\lambda : [c, d] \to [a, b]$ bijekció, amire $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$ és $z_2(t) = z_1(\lambda(t))$ minden $t \in [c, d]$-re.

5.11. Állítás. *Ha* G_1 *és* G_2 *símán ekvivalensek, akkor* $\int_{G_1} f(z)\,dz = \int_{G_2} f(z)\,dz$.

Tehát pl. nem változtat a pozitívan irányított, origó középpontú egységsugarú körön vett integrál értékén, hogy a kört $z_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ vagy $z_2(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0, 1]$ adja meg.

Bizonyítás. Legyen minden mint a síma ekvivalencia definíciójában; akkor

$$\int_{G_1} f(z)\,dz = \int_a^b f(z_1(t))\dot{z}_1(t)\,dt$$
$$\overset{5.8}{=} \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} f(\underbrace{z_1(\lambda(t))}_{z_2(t)})\underbrace{\dot{z}_1(\lambda(t))\lambda'(t)}_{\dot{z}_2(t)}\,dt = \int_c^d f(z_2(t))\dot{z}_2(t)\,dt \overset{5.8}{=} \int_{G_2} f(z)\,dz.$$

Az utolsó előtti egyenlőségben a láncszabályt alkalmaztuk $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvények kompozíciójára. □

5.12. Tétel.
(1) *Ha* f *folytonos a* $z(t)$, $t \in [a, b]$ *által adott* G *görbén, akkor* $\int_{-G} f(z)\,dz = -\int_G f(z)\,dz$
(2) $\int_G$ *lineáris operátor, azaz* $\int_G f(z) + g(z)\,dz = \int_G f(z)\,dz + \int_G g(z)\,dz$ *és* $\int_G cf(z)\,dz = c\int_G f(z)\,dz$
(3) $\int_G$ *additív halmazfüggvény, azaz ha* G *a* $z(t)$, $t \in [a, b]$ *által adott görbe,* $c \in [a, b]$, G_1 *ill.* G_2 *a* $z \restriction [a, c]$ *ill.* $z \restriction [c, b]$ *által adott görbék, akkor* $\int_G f = \int_{G_1} f + \int_{G_2} f$.

Bizonyítás. (1) Legyen $\lambda(t) = a + b - t$ és $s(t) = z(\lambda(t))$. Akkor

$$\int_G f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt \overset{5.8}{=} \int_{\lambda^{-1}(a)}^{\lambda^{-1}(b)} f(\underbrace{z(\lambda(t))}_{s(t)})\underbrace{\dot{z}(\lambda(t))\lambda'(t)}_{\dot{s}(t)}\,dt$$
$$= \int_b^a f(s(t))\dot{s}(t)\,dt \overset{5.7(1)}{=} -\int_a^b f(s(t))\dot{s}(t)\,dt \overset{5.2}{=} -\int_{-G} f(z)\,dz$$

(2) Következik a vonalintegrál definíciójából és az 5.6 állításból. Pl. a második:

$$\int_G cf(z)\,dz = \int_a^b cf(z(t))\dot{z}(t)\,dt \overset{5.6}{=} c\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt = c\int_G f(z)\,dz.$$

(3) Következik a vonalintegrál definíciójából és 5.7(2)-ből. □

5.13. Tétel (ML-formula)**.** *Ha f folytonos az L hosszú G görbén és $|f| \le M$ G-n, akkor* $\left|\int_G f(z)\,dz\right| \le ML$.

Bizonyítás. Először is,

(1) ha $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ folytonos, akkor $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(t)|\,dt$

mert legyen $\int_a^b g(t)\,dt = re^{j\varphi}$ (feltehetjük, hogy $\int_a^b g(t)\,dt \ne 0$, mert ha igen, akkor az (1)-beli egyenlőtlenség triviálisan teljesül); akkor

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = r = e^{-j\varphi}\int_a^b g(t)\,dt \overset{5.6}{=} \int_a^b e^{-j\varphi}g(t)\,dt \overset{5.5}{=} \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-j\varphi}g(t))\,dt + j\underbrace{\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-j\varphi}g(t))}_{0,\text{ mert } r\in\mathbb{R}}$$
$$\le \int_a^b \left|\mathrm{Re}(e^{-j\varphi}g(t))\right|\,dt \overset{|\mathrm{Re}\,z|\le|z|}{\le} \int_a^b \left|e^{-j\varphi}g(t)\right|\,dt \overset{|e^{-j\varphi}|=1}{=} \int_a^b |g(t)|\,dt,$$

ahol az egyenlőtlenségekben a valós integrálás monotonitását használtuk. Ezért ha L a $z(t): [a,b]\to\mathbb{C}$ által adott G görbe hossza, vagyis $L = \int_a^b |\dot z(t)|\,dt$, akkor

$$\left|\int_G f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\dot z(t)\,dt\right| \overset{(1)}{\le} \int_a^b |f(z(t))\dot z(t)|\,dt$$
$$= \int_a^b |f(z(t))|\,|\dot z(t)|\,dt \le \int_a^b M|\dot z(t)|\,dt = M\int_a^b |\dot z(t)|\,dt = ML,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert abban már valós integrálok szerepelnek. □

5.14. Példák. (1) $f(z)=c$ integrálja a $z(t)=x(t)+jy(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ által adott G görbén:

$$\int_G f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot z(t)\,dt \overset{5.12(2)}{=} c\int_a^b \dot z(t)\,dt$$
$$= c\left(\int_a^b x'(t)\,dt + j\int_a^b y'(t)\,dt\right) = c\left([x(t)]_a^b + j[y(t)]_a^b\right) = c(z(b)-z(a)).$$

(2) $f(z)=1/z$ integrálja a $z(t)=r(\cos t + j\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ által adott G görbén (vagyis az origó középpontú, r sugarú, pozitívan irányított körvonalon):

$$\int_G f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos t + j\sin t)} r(-\sin t + j\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} j = \int_0^{2\pi} 0 + j\int_0^{2\pi} 1 = 2\pi j$$

Hasonlóan: $\int_G \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi j$, ahol G a $z(t)=a+r(\cos t + j\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ által adott G görbe.

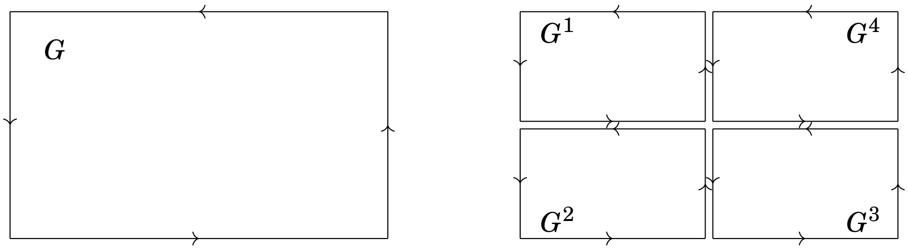
A második példa nem mond ellent a következő tételnek, mert $1/z$-nek nincs primitívfüggvénye egy origó középpontú körön. (A logaritmus nem az, és 5.15-ből következik, hogy más sem.)

5.15. Tétel (Newton-Leibniz)**.** *Ha $F' = f$ a $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ által adott G görbe mentén, akkor* $\int_G f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a))$.

Speciálisan tetszőleges G zár görbén $\int_K z^n = 0$ minden $n\ne 0$-ra.

Bizonyítás. Legyen $\gamma(t) = F(z(t)) = u(t) + jv(t)$; ha igaz, hogy

(1) $\dot\gamma(t) = f(z(t))\dot z(t),$



akkor

$$\int_G f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot z(t)\,dt \overset{(1)}{=} \int_a^b \dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b u'(t)\,dt + j\int_a^b v'(t)\,dt$$
$$= [u(t)]_a^b + j[v(t)]_a^b = [u(t)+jv(t)]_a^b = \gamma(b)-\gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Márpedig (1) igaz, csak épp nem a komplex láncszabály miatt, mert $z(t)$ komplex értelemben általában nem is deriválható.

Ha $z(t)$ csak szakaszonként, mondjuk az (a_{i-1}, a_i) intervallumokon (ahol $a = a_0 < \ldots < a_n = b$) deriválható, akkor ezt külön-külön minden ilyen szakaszra megcsináljuk, és azt kapjuk, hogy

$$\int_G f(z)\,dz \overset{5.12(3)}{=} \sum_{i=1}^n \int_{G_i} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^n F(z(a_i)) - F(z(a_{i-1})) = F(z(b)) - F(z(a))$$

ahol G_i a $z \restriction [a_{i-1}, a_i]$ által adott görbe. □

5.16. Következmény. *Ha G zárt görbe, és f-nek van primitívfüggvénye G-n, akkor $\int_G f(z)\,dz = 0$.*

Példák: konstans függvények, polinomok.

5.17. Tétel (Cauchy integráltétel)**.** *Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, f holomorf D-n, G a D belsejében haladó zárt görbe, akkor $\int_G f(z)\,dz = 0$.*

Bizonyítás. (Csak téglalapra.) Legyen G az R téglalapot határoló, pozitívan irányított zárt görbe, és $I = \left|\int_G f(z)\,dz\right|$. Ha R-et elnegyedeljük (mint az ábrán), és $G^1, \ldots G^4$ a négy kis téglalap pozitívan irányított határa, akkor $\int_G f(z)\,dz = \sum_{i=1}^4 \int_{G^i} f(z)\,dz$, mert a belső éleken egyszer oda, egyszer visszafelé integrálunk, tehát az ezeken az éleken vett integrálok kiesnek. Ezért $I = \left|\int_G f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{i=1}^4 \int_{G^i} f(z)\,dz\right| \le \sum_{i=1}^4 \left|\int_{G^i} f(z)\,dz\right|$; következésképp $\left|\int_{G^i} f(z)\,dz\right| \ge I/4$ valamelyik $i \in \{1, \ldots, 4\}$-re.

Így kiválaszthatunk egy egymásba ágyazott R_n téglalapsorozatot, úgy, hogy ha G_n az R_n pozitívan irányított határa, akkor $\left|\int_{G_n} f(z)\,dz\right| \ge I/4^n$. Legyen $z_0 \in \cap_{i=1}^\infty R_n$ (van ilyen, mert a Cantor-axióma $\mathbb{R}^2$-ben is igaz, ez volt A2-ben); akkor, mivel f deriválható z_0-ban, van olyan $r(z)$ függvény, amire $\lim_{z\to z_0} r(z) = 0$ és $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + r(z)(z-z_0)$. Vagyis f egy lineáris függvény (aminek persze van primitívfüggvénye, és így 5.15 miatt zárt görbéken 0 az integrálja) és $r(z)(z-z_0)$ összege, tehát minden n-re $\int_{G_n} f(z)\,dz = \int_{G_n} r(z)(z-z_0)\,dz$. Ennek az integrálnak az abszolútértékét viszont felülről tudjuk becsülni 5.13 segítségével, mert

(1) G_n hossza $\le \frac{4s}{2^n}$ ha s az eredeti téglalap hosszabbik oldalának hossza;
(2) $|z - z_0| \le \frac{\sqrt{2}s}{2^n}$ ha $z \in G_n$ (mert R_n átlójának hossza legfeljebb $\frac{\sqrt{2}s}{2^n}$);
(3) $\lim_{z\to z_0} r(z) = 0$ miatt minden $\epsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy $|r(z)| < \epsilon$ ha $|z - z_0| < \delta$; másrészt minden $\delta > 0$-ra, ha n elég nagy, akkor G_n része z_0 δ sugarú környezetének;

következésképp minden $\epsilon>0$-ra van olyan N, hogy minden $n>N$-re $|r(z)|<\epsilon$ minden $z\in G_n$-re.

Tehát

$$(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)0\le I/4^n\le\left|\int_{G_n}f(z)\,dz\right|=\left|\int_{G_n}r(z)(z-z_0)\,dz\right|\overset{5.13}{\le}\epsilon\frac{\sqrt{2}s}{2^n}\frac{4s}{2^n}=\frac{4\sqrt{2}s^2}{4^n}\epsilon,$$

azaz $(\forall\epsilon>0)0\le I\le 4\sqrt{2}s^2\epsilon$, vagyis $I=0$. □

5.18. *Megjegyzés* (Cauchy és Stokes). Feltéve, hogy f folytonosan deriválható D-n, a Stokes-tételből kijön a Cauchy:

Ha $f=u+iv$, $L: r=(x(t),y(t))$, $z(t)=x(t)+iy(t)$, akkor

$$\begin{aligned}\int_L f(z)\,dz&=\int_I f(z(t))\dot z(t)\,dt\\&=\int_I u(z(t))x'(t)-v(z(t))y'(t)+i(v(z(t))x'(t)+u(z(t))y'(t))\,dt\\&=\int_I(u,-v)(z(t))\cdot(x',y')\,dt+i\int_I(v,u)(z(t))\cdot(x',y')\,dt\\&=\int_I(u,-v)(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt+i\int_I(v,u)(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt\\&=\int_L(u,-v)\,dr+i\int_L(v,u)\,dr=0+0=0\end{aligned}$$

mert $\operatorname{rot}(u,-v)=-v_x-u_y=0$ és $\operatorname{rot}(v,u)=u_x-v_y=0$ mert f reguláris, és így kielégíti a Cauchy-Riemann-okat.

A probléma az, hogy itt *fel kellett tennünk a folytonos deriválhatóságot*, miközben éppen a Cauchy integráltételből szeretnénk belátni (ld. 5.26), hogy egy reguláris függvény akárhányszor deriválható.

5.19. Következmény. *Ha f holomorf az egyszeresen összefüggő D tartományon, G_1 és G_2 a D-ben haladó, közös kezdő- és végpontú görbék, akkor $\int_{G_1}f(z)\,dz=\int_{G_2}f(z)\,dz$.*

Vagyis egyszeresen összefüggő tartományon holomorf függvény D-ben haladó görbék menti integrálja csak a görbék végpontjaitól függ.

Bizonyítás. Rajz. □

5.20. Következmény. *Ha G és G_1 azonos módon irányított egyszerű zárt görbék, G_1 a G belsejében halad, f holomorf egy G-t, G_1-et, és az általuk határolt „gyűrűt" tartalmazó tartományon, akkor $\int_{G_1}f(z)\,dz=\int_G f(z)\,dz$.*

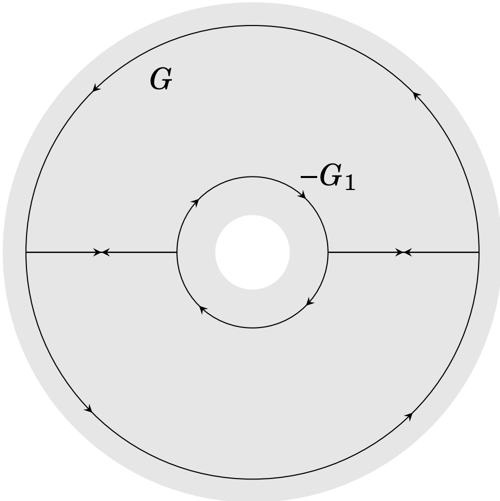
Bizonyítás. Ld. az 1. ábrát, amin a szürke rész az a tartomány, amin f holomorf. Itt a Cauchy integráltétel miatt a felső és az alsó zárt görbén is 0 az integrál. De ha ezeket pozitívan irányítjuk, akkor a két görbén vett integrál összege

$$0=\int_G f(z)\,dz+\int_{-G_1}f(z)\,dz=\int_G f(z)\,dz-\int_{G_1}f(z)\,dz,$$

mivel a vízszintes szakaszokon vett integrálok kiesnek.

□

5.21. Következmény. *Ha G és $G_1,\dots,G_n$ azonos módon irányított egyszerű zárt görbék, G_1, $\dots,G_n$ mindegyike a G belsejében, de a többi G_i külsejében halad, és f holomorf egy olyan tartományon, ami tartalmazza G-t és a G belsejét, kivéve esetleg a G_i-k belsejét, akkor $\int_G f(z)\,dz=\sum_{i=1}^n\int_{G_i}f(z)\,dz$.*



1. ÁBRA. 5.20 bizonyítása

Bizonyítás. Rajz. □

5.22. Lemma (Riemann)**.** *Ha f az a pont kivételével holomorf az egyszeresen összefüggő D tartományon, és korlátos a egy lukas környezetében, akkor $\int_G f(z)\,dz = 0$ minden olyan D-ben haladó egyszerű zárt görbén, ami nem megy át a-n.*

Bizonyítás. Ha a G egyszerű zárt görbe nem kerüli meg a-t, akkor a Cauchy integráltételt alkalmazhatjuk egy a-t nem, de G-t tartalmazó $D' \subseteq D$ egyszeresen összefüggő tartományon. Tehát az érdekes eset az, amikor megkerüli. Ilyenkor viszont 5.20 miatt $\int_G f(z)\,dz = \int_{K_r} f(z)\,dz$, ahol K_r az a középpontú, r sugarú, G-hez hasonlóan irányított körvonal (ha r elég kicsi ahhoz, hogy K_r a G belsejében haladjon).

A feltevés miatt $|f| \le M$ $\mathring{S}_\delta(a)$-ban valamilyen M-re és $\delta > 0$-ra; $r < \delta$-ra tehát az ML-formula miatt $0 \le \left|\int_G f(z)\,dz\right| = \left|\int_{K_r} f(z)\,dz\right| \le M2r\pi \to 0$ ha $r \to 0$, tehát $\left|\int_G f(z)\,dz\right| = 0$. □

5.23. Következmény (Cauchy integrálformula)**.** *Ha f holomorf az egyszeresen összefüggő D tartományon, G pozitívan irányított egyszerű zárt görbe ami a belsejével együtt $\subseteq D$ és aminek az a pont a belsejében van, akkor $f(a) = \frac{1}{2\pi j}\int_G \frac{f(z)}{z-a}\,dz$.*

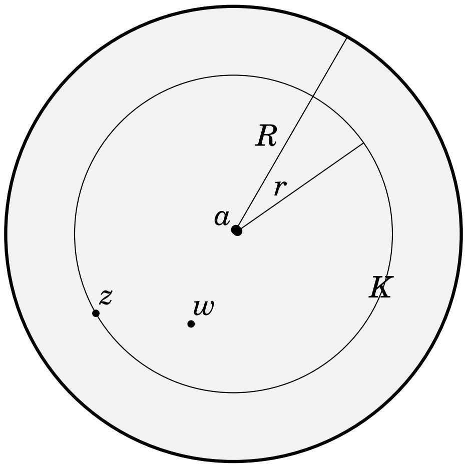
Vagyis f G belsejében felvett értékeit meghatározzák a G-n felvett értékei.

Bizonyítás.

$$\int_G \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_G \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + \int_G \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\int_G \frac{1}{z-a}\,dz = f(a)2\pi j,$$

ahol a második egyenlőség a Riemann–lemma miatt igaz, mert $g(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ holomorf a kivételével D-n, mert f az, és korlátos a egy környezetében, mert $\exists \lim_{z\to a} g(z) = f'(a)$; az utolsó meg mert $\int_G \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi j$ 5.14 2. példája és 5.20 miatt. □

5.24. Példa. $\int_G \frac{\cos z}{z}\,dz =?$, ahol G az origó középpontú, pozitívan irányított egységsugarú kör (a továbbiakban egyszerűen $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,dz$-t írunk). A Cauchy integráltétel nem alkalmazható, mert a függvény nem holomorf egy G-t tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon; sőt,



2. ÁBRA. 5.26 bizonyítása

a Riemann–lemma sem, mert $\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{z}=\infty$ miatt 0-nak nincs is olyan környezete, ahol korlátos lenne. De a Cauchy integrálformula igen, $f(z)=\cos z$-re $a=0$-val: és aszerint

$$1=\cos 0=\frac{1}{2\pi j}\int_G \frac{\cos z}{z}\,dz \rightsquigarrow \int_G \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi j.$$

5.25. Állítás. *Ha f_n (minden n-re) és f folytonos a $G: z(t)$, $t\in[a,b]$ görbén, és f_n egyenletesen tart f-hez G-n, akkor $\int_G f=\lim_{n\to\infty}\int_G f_n$. Speciálisan, ha $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ egyenletesen G-n, akkor $\int_G f=\sum_{n=0}^{\infty}\int_G f_n$.*

Bizonyítás. $\epsilon>0$-ra legyen N olyan, hogy minden $n\ge N$-re $|f_n-f|<\epsilon/L$ G-n, ahol L a G hossza. Akkor

$$\left|\int_G f_n-\int_G f\right|=\left|\int_G f_n-f\right|\le L\frac{\epsilon}{L}=\epsilon$$

az ML-formula (5.13) miatt. □

5.26. Tétel. *Ha f holomorf egy D tartományon, akkor*

(1) *f akárhányszor deriválható D-n*
(2) *minden $a\in D$-re f a körüli hatványsorba fejthető, azaz $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ egy a körüli, pozitív sugarú körlap belsejében*
(3) *az előző pontbeli sorfejtés együtthatói: $c_n=\frac{1}{2\pi j}\int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$ ahol G pozitívan irányított egyszerű zárt görbe ami a belsejével együtt $\subseteq D$ és aminek az a pont a belsejében van,*
(4) *következésképp $f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi j}\int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.*

Bizonyítás. Legyen $0<r<R$ olyanok, hogy $\mathrm{S}_R(a)\subseteq D$, K pedig egy a középpontú, pozitívan irányított r sugarú kör (ld. a 2. ábrát!). Ha $z\in K$ és $w\in \mathrm{S}_r(a)$, akkor $|w-a|<r=|z-a|$ miatt

$$\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z-a-(w-a)}=\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}=\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

konvergens mértani sor. Következésképp

$$\frac{f(z)}{z-w}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

és ez a konvergencia (z-ben, rögzített w mellett) egyenletes is a Weierstrass-kritérium miatt, mert ha $q = \frac{|w-a|}{r}$ és $|f(z)| \le M$ K-n, akkor $\left|\frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right| \le \frac{M}{r} q^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} q^n$ konvergens. Ezért 5.25 szerint az összegzés és az integrálás felcserélhető, vagyis

$$f(w) = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi j} \int_K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \cdot (w-a)^n$$

ahol az első egyenlőségben a Cauchy integrálformulát (5.23) használtuk (megtehettük, mert $\mathrm{S}_R(a)$ egyszeresen összefüggő). 5.20 miatt itt K-t helyettesíthetjük bármilyen, a (3)-ban szereplő görbével.

f tehát egy a körüli hatványsor összegfüggvénye, ezért akárhányszor deriválható és $f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n$, ahol c_n a $(z-a)^n$ együtthatója, azaz most $\frac{1}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$.

□

5.27. Következmény (Differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrálképletek). *Ha f holomorf az egyszeresen összefüggő D tartományon, G pozitívan irányított egyszerű zárt görbe ami a belsejével együtt $\subseteq D$ és aminek az a pont a belsejében van, akkor akárhányszor deriválható a-ban, és $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$.*

5.28. Feladat. $\int_K \frac{\cos(\ln z)}{z^2-3z+2}\, dz = ?$ ha K az 1 középpontú, 1/2 sugarú pozitívan irányított körvonal.

5.29. Feladat. Legyen K az $|z-2j| = 2$ egyenletű, pozitívan irányított körvonal. (a) $\int_K \frac{\cos z}{z+j}\, dz = ?$ (b) $\int_K \frac{\cos z}{z^2+1}\, dz = ?$

5.30. Feladat. $\int_K \frac{e^z}{z^5}\, dz = ?$, ha K az origó középpontú, 3 sugarú pozitívan irányított körvonal.

5.31. Feladat. Számítsa ki $\int \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz$-t a pozitívan irányított $|z-1| = 3$ körvonalon!

6. Taylor- és Laurent-sorok

Emlékeztető (ld. 4.1):

Tétel. *A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ hatványsor $\mathring{\mathrm{S}}_R(a)$ belsejében konvergens, külsejében nem, a határon pedig bármi lehet; itt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ (és $R = \infty$, és a sor mindenütt konvergens, ha* $\limsup$ 0*, és $R = 0$, és a sor csak a-ban konvergens, ha* $\limsup = \infty$*) a hatványsor konvergencia-sugara.*

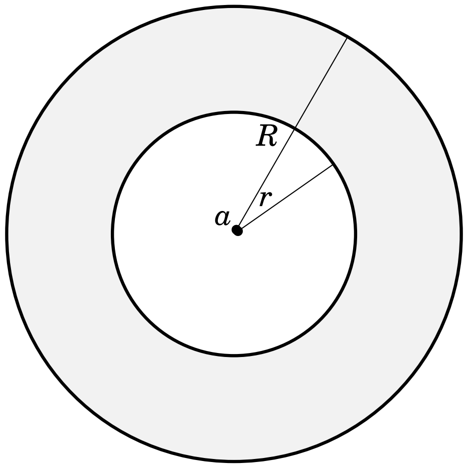
Hol lesz konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} c_{-n} (z-a)^n$ „negatív kitevőjű hatványsor”? Legyen $w = \frac{1}{z-a}$, $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} (= 1/R)$; akkor a tétel szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \text{ konvergens} \iff |w| < R = 1/r \iff r < 1/|w| = |z-a|$$

azaz az a középpontú r sugarú kör *külsejében* (a határon bármi lehet, belül divergens). Speciálisan a-t kivéve mindenhol ha $r = 0$, és sehol, ha $r = \infty$.

6.1. Definíció (Laurent-sor). A $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$ Laurent-sor konvergens, ha $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$ is konvergens.

A fenti megfontolásokból, azaz végső soron 4.1-ből kapjuk a következőt:



3. ÁBRA. Laurent-sor konvergencia-tartománya

6.2. Állítás. *Legyen* $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$; *akkor a* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *Laurent-sor konvergens a* $\{z : r < |a-z| < R\}$ *halmazon (ennek határán bármi lehet, ezen kívül divergens). Speciálisan, ha* $r < R$, *akkor egy körgyűrű belsejében konvergens, ha* $R < r$, *akkor sehol.*

A hatványsorokhoz hasonlóan:

6.3. Tétel. *Laurent-sor a konvergencia-tartománya minden belső pontjában abszolút konvergens, annak minden zárt részhalmazán egyenletesen konvergens, minden nyílt részhalmazán tagonként deriválható, és minden a konvergencia-tartománya belsejében haladó görbe mentén tagonként integrálható.*

6.4. Tétel (Taylor)**.** *Ha* f *holomorf az egyszeresen összefüggő* D *tartományon, akkor (ott 5.26 szerint akárhányszor deriválható, és) tetszőleges* $a \in D$ *körüli Taylor-sora* $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n)$ *előállítja* a*-nak abban a maximális sugarú környezetében, ami még* $\subseteq D$*. Az előállítás (azaz az együtthatók) egyértelmű.*

6.5. Tétel (Laurent)**.** *Ha* f *holomorf egy* a *körüli körgyűrűben, akkor ott előáll egy Laurent-sor összegfüggvényeként:* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, *ahol minden* $n \in \mathbb{Z}$*-re* $c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$ *(*G *tetszőleges, a körgyűrűben haladó pozitívan irányított zárt egyszerű görbe, ami megkerüli* a*-t). Ez az előállítás (adott gyűrűben) egyértelmű.*

Speciálisan: ha a körgyűrű körlap, akkor negatív n*-ekre a Cauchy integráltétel (5.17) miatt* $\int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \int_G f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz = 0$ *(hiszen* $-n-1 \geq 0$ *miatt az integrandus holomorf egy körlapon), tehát* $c_n = 0$*, vagyis* f *Taylor-sorát kapjuk.*

Ha tehát f reguláris a-ban, akkor a körüli Taylor-sorának együtthatói (a Taylor-sor egyértelműsége miatt) $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$, azaz $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j}\int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, 5.27-el összhangban.

Példák Laurent-sorba fejtésre

(1) $\frac{(z+1)^2}{z}$ 0 körüli Laurent-sora: $\frac{(z+1)^2}{z} = \frac{z^2+2z+1}{z} = z + 2 + \frac{1}{z}$ ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$-n).

(2) $e^{1/z}$ 0 körüli Laurent-sora: $\sum_0^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$ ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$-n).

(3) $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)$ 0 körüli Laurent-sorai.

(a) $\frac{1}{z+1}$ $|z| < 1$-en: $\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

(b) $\frac{1}{z+1}$ $|z| > 1$-en: $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n$

(c) $\frac{1}{z+3}$ $|z| < 3$-on: $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}$

(d) $\frac{1}{z+3}$ $|z| > 3$-on: $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}3^{-n-1}z^n$

Következésképp

$|z| < 1$-en $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$

$1 < |z| < 3$-on $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$

$3 < |z|$-n $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}3^{-n-1}z^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(1-3^{-n-1}\right)z^n$

(4) $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$ Laurent-sora az 1 körüli körgyűrűkben: két ilyen gyűrű van: (a) $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$ és (b) $\{z : 1 < |z-1|\}$.

Általában: racionális törtfüggvényeket érdemes parciális törtekre bontani, és ezeket külön-külön sorba fejteni. Most: $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$. $\frac{1}{z-1}$ maga is 1 körüli Laurent-sor, tehát azt mindkét esetben majd csak hozzá kell adni $-\frac{1}{z}$ Laurent-sorához.

(a)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{|\cdot|<1}+1} = \sum_0^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

(ebben csak nemnegatív kitevőjű tagok szerepelnek, ami nem meglepő, mert $\frac{1}{z}$ reguláris a $|z-1| < 1$ körlapon). Vagyis f Laurent-sora a $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$ körgyűrűben

$$\frac{1}{z-1} - \sum_0^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = \frac{1}{z-1} + \sum_0^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n = \sum_{-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$$

(b) $1 < |z-1|$ miatt $1/|z-1| < 1$, tehát

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}},$$

vagyis f Laurent-sora a $\{z : 1 < |z-1|\}$ körgyűrűben

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(z-1)^n.$$

6.6. *Megjegyzés.* $\frac{1}{z-\omega}$ z_0 körüli Laurent-sorát keressük. Ilyenből kettő van (kivéve, ha $z_0 = \omega$, mert akkor csak egy, de akkor $\frac{1}{z-\omega}$ már egy z_0 körüli Laurent-sor, tehát nem kell semmit csinálni): $|z-z_0| < |z_0-\omega|$ és $|z-z_0| > |z_0-\omega|$ (rajz!). Az első esetben

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{1}{z-z_0+(z_0-\omega)} = \frac{1}{z_0-\omega}\frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-\omega}+1} = \frac{1}{z_0-\omega}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\omega-z_0}} \overset{\left|\frac{z-z_0}{\omega-z_0}\right|<1}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{z_0-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\omega-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{-(\omega-z_0)^{n+1}}$$

a másodikban pedig

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{1}{z-z_0+(z_0-\omega)} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1+\frac{z_0-\omega}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\omega-z_0}{z-z_0}} \overset{\left|\frac{\omega-z_0}{z-z_0}\right|<1}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega-z_0)^n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Az első lépést mindkét esetben az motiválja, hogy $z-z_0$-at természetesen be akarjuk csempészni.

6.7. *Példa.* $\frac{1}{z-2j}$ j körüli Laurent-sorai közül az, amelyik a $|z-j|<1$ tartományon állítja elő: $z_0=j$, $\omega=2j$, és $|z-z_0|=|z-j|<1=|j-2j|=|z_0-\omega|$ tehát

$$\frac{1}{z-2j}=\frac{1}{z-j-j}=\frac{1}{-j}\frac{1}{1-\frac{z-j}{j}}=\frac{1}{-j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-j}{j}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-j)^n}{-j^{n+1}}.$$

A másik Laurent-sora (amelyik az $1<|z-j|$ tartományon állítja elő): z_0 és ω mint az előbb, csak most $|z-z_0|=|z-j|>1=|j-2j|=|z_0-\omega|$, tehát

$$\frac{1}{z-2j}=\frac{1}{z-j-j}=\frac{1}{z-j}\frac{1}{1-\frac{j}{z-j}}=\frac{1}{z-j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{z-j}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n}{(z-j)^{n+1}}.$$

További Laurent-példák:

6.8. Példák. (1) $f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$: 0 körüliek könnyűek, mert csak $\frac{1}{z-1}$-et kell; nézzük az 1 körülieket, ahol meg csak $\frac{1}{z^2}$-et, amit úgy fogunk, hogy $\frac{1}{z}$ Laurent-sorát deriváljuk.

$|z-1|<1$:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$
$$\rightsquigarrow \frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\frac{1}{z}=-\frac{d}{dz}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$$
$$\rightsquigarrow f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n$$

$|z-1|>1$:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-1}=\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n(z-1)^{n-1}$$
$$\rightsquigarrow \frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n-1}(n-1)(z-1)^{n-2}$$
$$\rightsquigarrow f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n-1}(n-1)(z-1)^{n-2}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n-1}(n-1)(z-1)^{n-3}=\sum_{n=-\infty}^{-3}(-1)^n(n+2)(z-1)^n$$

(2) e^z 1 körüli Laurent-sora (ami persze Taylor): $e^z=ee^{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}e\frac{(z-1)^n}{n!}$.

L'Hospital Komplex függvényeknél a L'Hospital szabály az 5.26 egyszerű következménye:

6.9. Tétel (L'Hospital)**.** *Ha f, g regulárisak a-ban, $f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)=0$ $n=0,\dots k-1$-re és $g^{(k)}(a)\neq 0$, akkor* $\lim_a \frac{f}{g}=\frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}$.

Nem kell $\frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}$ a-beli határértékét számolni mint a valós esetben, mert $f^{(k)}$ és $g^{(k)}$ 5.26 miatt deriválhatók, és így folytonosak is a egy környezetében. (De ettől még igaz, hogy a tétel feltételei mellett $\lim_a \frac{f}{g}=\lim_a\frac{f'}{g'}$, hiszen mindkettő $=\frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}$.)

Bizonyítás. Mivel f és g regulárisak a-ban, 5.26 miatt hatványsorba fejthetők egy a középpontú körlapon: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ és $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n=$

$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$. Ezért

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n}{\sum_{n=k}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n}=\frac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)+\frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}(z-a)^2+\dots}{\frac{g^{(k)}(a)}{k!}+\frac{g^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)+\frac{g^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}(z-a)^2+\dots}\xrightarrow{z\to a}\frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}$$

ahol a második egyenlőségben $(z-a)^k$-nal egyszerűsítettünk, és a határértékeket az egyenletes konvergencia (6.3) miatt számolhattuk tagonként. □

7. Izolált szingularitási helyek osztályozása

7.1. Definíció. a izolált szingularitási helye f-nek (vagy: f-nek a-ban izolált szingularitása van), ha f a-ban nem, de a egy lukas környezetében reguláris.

Az alábbiakban tegyük fel, hogy a izolált szingularitási helye f-nek. Akkor 6.5 miatt egyféleképpen Laurent-sorba fejthető a egy lukas környezetében. Legyen $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ ez a Laurent-sor.

(1) f-nek *megszüntethető szingularitása* van a-ban, ha minden $n>0$-ra $c_{-n}=0$, azaz ha a Laurent-sorban nincsenek negatív kitevőjű tagok (vagyis a Laurent-sor valójában hatványsor).

7.2. Állítás. *Ez ekvivalens azzal, hogy létezik (véges)* $\lim_a f(=c_0)$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Egyenletes konvergencia miatt tagonként számolható a határérték, és $n>0$-ra $\lim_{z\to a}(z-a)^n=0$, ezért $\lim_{z\to a}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k=c_0$.
($\Leftarrow$) $\lim_{z\to a}f(z)$ végessége miatt $\lim_{z\to a}f(z)(z-a)^{-n-1}$ véges minden negatív n-re ($n<-1$-re valójában 0), tehát $f(z)(z-a)^{-n-1}$ korlátos a valamilyen környezetében, és így a Riemann–lemma (5.22) miatt $\int_G f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz=0$, amiből a Laurent–tétel (6.5) miatt $c_n=0$ negatív n-ekre. □

7.3. Példa. $f(z)=\frac{e^z-1}{z}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}{z}\overset{\text{ha } z\neq 0}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}=1+\frac{z}{2!}+\dots$-nak 0-ban megszüntethető szingularitása van (Laurent-sorában nincsenek negatív kitevőjű tagok), és valóban, $c_0=1\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$.

(2) f-nek *n-edrendű pólusa* van a-ban ($n>0$), ha $-n$ a legmagasabb negatív kitevő a sorban, azaz ha $c_{-n}\neq 0$, de minden $m>n$-re $c_{-m}=0$.

7.4. Állítás. *Ez ekvivalens azzal, hogy létezik véges* $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)(=c_{-n})$, *de minden $m<n$-re nem létezik véges* $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$.

Bizonyítás. Hasonló az előző eset bizonyításához.
($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k(z-a)^k$, $c_{-n}\neq 0$. Akkor

$$(z-a)^n f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k(z-a)^{k+n}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k-n}(z-a)^k,$$

és, mivel az egyenletes konvergencia miatt tagonként számolható a határérték,

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{z\to a}c_{k-n}(z-a)^k=c_{-n}.$$

De ha $m<n$ és $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ véges, akkor $(z-a)^m f(z)$-re alkalmazhatjuk az előző állítás ($\Leftarrow$) irányát, és azt kapjuk, hogy $(z-a)^m f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-a)^k$, azaz

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-a)^{k-m}=\sum_{k=-m}^{\infty}d_{k+m}(z-a)^k,$$

ami a Laurent-sor egyértelműsége miatt ellentmond a $c_{-n} \neq 0$ feltevésünknek.
($\Leftarrow$) A feltevés miatt $(z-a)^n f(z)$-re alkalmazhatjuk az előző állítás ($\Leftarrow$) irányát, és azt kapjuk, hogy $(z-a)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$, azaz

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n} = \sum_{k=-n}^{\infty} c_{k+n} (z-a)^k,$$

vagyis f Laurent-sorában valóban 0 minden $-n$-nél kisebb kitevőjű tag együtthatója. És $c_{-n} \neq 0$, máskülönben a ($\Rightarrow$) irányt n helyén $n-1$-re alkalmazva azt kapnánk, hogy létezik véges $\lim_{z\to a}(z-a)^{n-1} f(z)$, ellentmondva második feltételünknek.

□

7.5. *Megjegyzés.* f-nek pontosan akkor van n-edrendű pólusa van a-ban valamilyen n-re, ha $\lim_a f = \infty$.

7.6. Példa. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \dots$ -nak 0 elsőrendű pólusa ($c_{-1} = 1 \neq 0$ de minden $m > 1$-re $c_{-m} = 0$), és valóban: $\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} \overset{\text{L'H}}{=} 1 = c_{-1}$, de $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{e^z-1}{z}}{z} = \infty$.

(3) f-nek *lényeges szingularitása* van a-ban, ha a Laurent-sorban végtelen sok negatív kitevőjű tag van.

7.7. Állítás. *Ez ekvivalens azzal, hogy egyetlen $n \geq 0$-ra sem létezik (véges) $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)$, és azzal is, hogy $\nexists \lim_{z\to a} f(z)$ (végtelen sem).*

7.8. Példa. $e^{1/z}$ 0 körüli Laurent-sora: $\sum_0^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$. És valóban, $\lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \infty$, $\lim_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$ miatt $\nexists \lim_{z\to a} e^{1/z}$ (végtelen sem).

Példa nem izolált szingularitásra: $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 0-ban, mert 0 minden környezetében van olyan z_0 amire $\sin\frac{1}{z_0} = 0$ (az $\frac{1}{n\pi} \to 0$ sorozat mentén végig 0); vagy $\ln z$ minden negatív valósban.

8. Reziduum

8.1. Definíció. Ha a izolált szingularitási helye f-nek, akkor $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) (= \operatorname{Res}_a f) = c_{-1}$, ahol c_{-1} $\frac{1}{z-a}$ együtthatója f a körüli azon Laurent-sorában, ami a egy lukas környezetében előállítja. Vagyis a Laurent tétel (6.5) szerint $\frac{1}{2\pi j}\int_G f(z)\,dz$ ahol G a-t megkerülő, egyszerű, zárt, pozitív irányítású görbe, ami a kivételével a belsejével együtt része egy olyan tartománynak, ahol f holomorf.

8.2. Tétel (Reziduum-tétel)**.** *Ha f holomorf az egyszeresen összefüggő D tartományon az a_1, $\dots, a_n$ pontok kivételével, G egyszerű, zárt, pozitív irányítású D-beli görbe, aminek $a_1, \dots, a_n$ a belsejében van, akkor $\int_G f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f$.*

Bizonyítás. $k = 1, \dots n$-re legyenek G_k pozitívan irányított, G belsejében és egymás külsejében haladó, a_k körüli körök. Akkor 5.20 miatt $\int_G f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{G_k} f(z)\,dz$. De $\frac{1}{2\pi j}\int_{G_k} f(z)\,dz \overset{6.5}{=} c_{-1} = \operatorname{Res}_{a_k} f$ (ahol c_{-1} az a_k körüli Laurent-sor együtthatója). Tehát

$$\int_G f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi j \operatorname{Res}_{a_k} f = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

□

Módszerek a reziduum kiszámítására

(1) f-et Laurent-sorba fejtjük (ha ez könnyű).

8.3. Példák. (a) $\int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi j \operatorname{Res}_0 \sin\frac{1}{z} = 2\pi j$, mert $\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}$ miatt $c_{-1} \overset{n=0}{=} 1$.

(b) $\int_{|z|=1} ze^{1/z}\,dz = 2\pi j \operatorname{Res}_0 ze^{1/z}$, és ezt könnyű kiszámolni, mert

$$e^{1/z} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \rightsquigarrow ze^{1/z} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!z^{n-1}} \rightsquigarrow c_{-1} \overset{n=2}{=} \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},$$

tehát $\int_{|z|=1} ze^{1/z}\,dz = 2\pi j\frac{1}{2} = \pi j$.

(2) Ha f-nek megszüntethető szingularitása van a-ban, akkor az a körüli Laurent-sorában csak pozitív kitevőjű tagok vannak, tehát $\operatorname{Res}_a f = c_{-1} = 0$.

(3) Ha f-nek n-edrendű pólusa van a-ban, akkor

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$$

mert

$$\begin{aligned}
f(z) &= c_{-n}\tfrac{1}{(z-a)^n} + c_{-n+1}\tfrac{1}{(z-a)^{n-1}} + c_{-n+2}\tfrac{1}{(z-a)^{n-2}} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + \ldots \\
&\rightsquigarrow (z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + c_{-n+2}(z-a)^2 + \ldots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \ldots \\
&\rightsquigarrow \tfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)] = c_{-1}(n-1)! + c_0\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(z-a) + c_1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)(z-a)^2\ldots \\
&\rightsquigarrow \lim_{z\to a}\tfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)] = (n-1)!c_{-1}
\end{aligned}$$

Speciálisan, ha elsőrendű a pólus, akkor $\operatorname{Res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ (ezt tudjuk a 7.4 állításból is).

8.4. Példák. (a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z(1-e^z)} = ?$

0 másodrendű pólus, mert $\lim_{z\to 0} z^2\frac{1}{z(1-e^z)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{(1-e^z)} \overset{L'H}{=} \frac{1}{-1} = -1$, de $\lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(1-e^z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(1-e^z)} = \infty$. Ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=0}\tfrac{1}{z(1-e^z)} &= \tfrac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\tfrac{d}{dz}\big(z^2\tfrac{1}{z(1-e^z)}\big) = \lim_{z\to 0}\tfrac{d}{dz}\tfrac{z}{1-e^z} \\
&= \lim_{z\to 0}\tfrac{1-e^z+ze^z}{(1-e^z)^2} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to 0}\tfrac{-e^z+e^z+ze^z}{2e^z(e^z-1)} = \lim_{z\to 0}\tfrac{z}{2(e^z-1)} \overset{L'H}{=} \tfrac{1}{2e^z}\Big|_{z=0} = \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

következésképp $\int_{|z|=1}\frac{1}{z(1-e^z)} = 2\pi j\frac{1}{2} = \pi j$.

(b) $e^{jz}z^{-4}$-nek 0 negyedrendű pólusa, ezért $\operatorname{Res}_{z=0} e^{jz}z^{-4} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}e^{jz} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0} j^3 e^{jz} = \frac{-j}{6}$. Tehát pl. $\int_{|z|=1} e^{jz}z^{-4}\,dz = 2\pi j \operatorname{Res}_0 e^{jz}z^{-4}\,dz = 2\pi j\frac{-j}{6} = \pi/3$.

(4) Ha f és g reguláris a-ban, $g(a) = 0$ de $g'(a) \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

8.5. Példák. (a) $\int_{|z|=1} \operatorname{ctg} z = 2\pi j$, mert $\operatorname{Res}_0 \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1$.

(b) Legyen $f(z) = \frac{1}{(2-z)(z^2+4)}$; akkor $\operatorname{Res}_2 f = \operatorname{Res}_2 \frac{(z^2+4)^{-1}}{2-z} = \frac{(z^2+4)^{-1}}{-1}\Big|_{z=2} = -\frac{1}{8}$ és $\operatorname{Res}_{\pm 2j} f = \operatorname{Res}_{\pm 2j}\frac{(2-z)^{-1}}{z^2+4} = \frac{(2-z)^{-1}}{2z}\Big|_{z=\pm 2j} = \frac{1\mp j}{16}$. Tehát pl. $\int_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi j\big(-\frac{1}{8} + \frac{1+j}{16} + \frac{1-j}{16}\big) = 0$.

9. Argumentum-elv

9.1. Definíció. Legyen f reguláris a-ban, $n \in \mathbb{N}^+$. f-nek a n-szeres zérushelye, ha $f(a) = 0$ és van olyan a-ban reguláris g függvény, amire $g(a) \neq 0$ és $f(z) = (z-a)^n g(z)$ a egy környezetében.

9.2. Állítás. *f-nek a pontosan akkor n-szeres zérushelye, ha $1/f$-nek a-ban n-edrendű pólusa van.*

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen g mint a definícióban; akkor g a-beli folytonossága miatt $1/f$-nek izolált szingularitási helye a és $\lim_{z\to a} \frac{(z-a)^n}{f(z)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(a)}$ véges, $m < n$-re viszont $\lim_{z\to a} \frac{(z-a)^m}{f(z)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(z-a)^{n-m} g(z)}$ végtelen.
($\Leftarrow$) Ha $1/f$-nek a-ban n-edrendű pólusa van, akkor a körüli Laurent-sora $\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k$ (ahol $c_{-n} \neq 0$); vagyis $\frac{1}{f(z)} = \frac{h(z)}{(z-a)^n}$, ahol h reguláris a-ban (hiszen a Laurent-sora hatványsor) és $h(a) = c_{-n} \neq 0$, így tehát h folytonossága miatt $h(z) \neq 0$ a egy környezetében; következésképp $1/h$ reguláris (és persze nem 0) a-ban és így $f(z) = \frac{(z-a)^n}{h(z)}$ mutatja, hogy f-nek a n-szeres zérushelye. □

9.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy a D tartományban f véges sok pont kivételével deriválható, és ezekben a pontokban f-nek pólusa van (f* meromorf*). Akkor f'/f is ilyen, és ennek elsőrendű pólusai vannak ott, ahol f-nek zérusai és pólusai. Ha a ilyen hely, akkor*

$$\operatorname{Res}_a \frac{f'}{f} = \begin{cases} n & \text{ha } a \text{ } f\text{-nek } n\text{-edfokú zérushelye} \\ -n & \text{ha } a\text{-ban } f\text{-nek } n\text{-edrendű pólusa van} \end{cases}.$$

Bizonyítás. Ha f-nek n-edfokú zérushelye a, akkor a egy környezetében $f(z) = (z-a)^n g(z)$, ahol g reguláris és nem 0 a-ban. Ekkor $f'(z) = n(z-a)^{n-1} g(z) + (z-a)^n g'(z)$, tehát $z \neq a$-ban

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1} g(z) + (z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

és $\frac{g'(z)}{g(z)}$ reguláris a-ban (mert ilyenek hányadosa és a nevező g folytonossága miatt nem 0), következésképp f'/f-nek elsőrendű pólusa van a-ban és $\operatorname{Res}_a f'/f = n$.

Ha f-nek n-edrendű pólusa van a-ban, akkor a egy környezetében $f(z) = (z-a)^{-n} g(z)$, ahol g reguláris a-ban és $g(a) = c_{-n} \neq 0$ (ahol c_{-n} $(z-a)^{-n}$ együtthatója f a körüli Laurent-sorában). (Vagy: 9.2 miatt $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n h(z)$, ahol h reguláris és nem 0 a-ban, következésképp $g(z) = \frac{1}{h(z)}$ reguláris a-ban, és ha g a körüli hatványsora $\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k$, akkor

$$\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k = f(z) = (z-a)^{-n} g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^{k-n},$$

amiből $c_{-n} = d_0 = g(a)$.) Ekkor $z \neq a$-ban $f'(z) = -n(z-a)^{-n-1} g(z) + (z-a)^{-n} g'(z)$, tehát

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n(z-a)^{-n-1} g(z) + (z-a)^{-n} g'(z)}{(z-a)^{-n} g(z)} = \frac{-n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

és $\frac{g'(z)}{g(z)}$ reguláris a-ban (mert ilyenek hányadosa és a nevező g folytonossága miatt nem 0), következésképp f'/f-nek elsőrendű pólusa van a-ban és $\operatorname{Res}_a f'/f = -n$. □

9.4. Következmény. *Ha G pozitívan irányított, egyszerű, zárt görbe, $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_m$ a G által határolt tartományban vannak, f meromorf egy ezt tartalmazó tartományban, f-nek*

a_i α_i-edfokú zérushelye, b_i pedig β_i-edrendű pólusa (és f-nek nincs más zérushelye és pólusa), akkor

$$\int_G \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi j(N-P)$$

ahol $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ és $P = \sum_{i=1}^m \beta_i$ (vagyis N a zérushelyek, P pedig a pólusok száma, de „multiplicitással" számolva).

Bizonyítás. Az előző állításból és a reziduum-tételből következik. □

9.5. Definíció. Legyen $G : \gamma(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ zárt görbe, $a \notin G$.

$$\mathrm{n}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi j}\int_G \frac{1}{z-a}\,dz$$

a G indexe a-ban.

Azt tudjuk, hogy ha G pozitívan irányított egyszerű zárt görbe, és a az általa határolt tartomány belsejében van, akkor $\mathrm{n}(\gamma, a) = 1$ (és így $\mathrm{n}(-\gamma, a) = -1$). Ennek a ténynek az általánosítása a következő.

9.6. Tény. *Az a-beli index minden zárt görbére egész szám, és a görbe a pozitív irányban való megkerüléseinek „nettó" számát adja meg. Vagyis ha például a görbe 3-szor pozitív, egyszer negatív irányban kerüli meg a-t, akkor az a-beli indexe $3-1=2$.*

9.7. Tétel (Argumentum elv)**.** *Tegyük fel, hogy G a D tartományban haladó egyszerű zárt görbe, f meromorf D-n, de G-n nincs se pólusa, se zérushelye. Akkor, ahogy z pozitív irányban egyszer bejárja G-t, $f(z)$ argumentuma 2π egész számú többszörösével változik, mégpedig a*

$$\Delta_G \arg f(z) = 2\pi j(N-P)$$

képletnek megfelelően, ahol N és P mint 9.4-ben.

Bizonyítás. Ha G-t $z(t)$, $t \in [a,b]$ paraméterezi, akkor legyen G' ennek f szerinti képe, azaz a $\gamma(t) = f(z(t))$, $t \in [a,b]$ által paraméterezett görbe. Akkor

$$2\pi j(N-P) = \int_G \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_a^b \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}\dot{z}(t) = \int_{G'} \frac{1}{w}\,dw = \int_{G'} \frac{1}{w-0}\,dw = 2\pi j\,\mathrm{n}(\gamma, 0)$$

ahol az első egyenlőség 9.4 miatt igaz, a második kettő az integrál definíciója miatt, de a harmadikban használtuk még azt a „láncszabályt", amit már a Newton-Leibniz tétel bizonyításában is, hogy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t)) = f'(z(t))\dot{z}(t)$. Az utolsó egyenlőség az index definíciója.

De akkor

$$\Delta_G \arg f(z) = \Delta_{G'} \arg w = 2\pi j\,\mathrm{n}(\gamma, 0) = 2\pi j(N-P)$$

ahol az első egyenlőség azért igaz, mert $f(z)$ argumentuma pontosan annyiszor 2π-t változik, ahányszor G f szerinti képe megkerüli az origót — és ez 9.6 miatt $2\pi j\,\mathrm{n}(\gamma, 0)$. □

FÜGGELÉK A. ÖSSZEFÜGGŐSÉG

A.1. Definíció. H összefüggő, ha minden A, B nyílt halmazra $H \subseteq A \cup B$ és $A \cap B = \emptyset$-ból $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$ következik.

A.2. Tétel. *Ha H nyílt, akkor pontosan akkor összefüggő, ha p.ö.f. (ha $\mathbb{R}^2$-ben vagyunk, akkor a p.ö.f.-ben feltehetjük, hogy a poligonok minden szakasza valamelyik tengellyel párhuzamos.)*

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $p \in H$ tetszőleges; azt kell belátnunk, hogy minden $q \in H$-ra p-t összeköti egy H-beli töröttvonal q-val; vagyis azt, hogy $X \supseteq H$ ha

$$X = \{q \in H : p\text{-t összeköti egy } H\text{-beli töröttvonal } q\text{-val}\}.$$

Ha két pont benne van egy közös H-beli környezetben, akkor vagy mindkettő X-beli, vagy mindkettő $H \setminus X$-beli, hiszen összeköti őket egy H-beli szakasz (vagy, ha $\mathbb{R}^2$-ben vagyunk, akkor két tengelypárhuzamos szakaszból álló poligon is); ebből, és H nyíltságából már következik, hogy X és $H \setminus X$ is nyílt, mert H nyíltsága miatt minden H-beli r pontnak van olyan környezete, ami része H-nak, és ez az előbbiek miatt „homogén”, és ezért része X-nek ha $r \in X$, és része $H \setminus X$-nek ha $r \in H \setminus X$.

Azt kaptuk tehát, hogy H két diszjunkt nyílt halmaz úniója, ami csak akkor nem mond ellen az összefüggőségnek, ha az egyik halmaz üres. $p \in X$ miatt X nem az, tehát $H \setminus X = 0$, azaz $X \supseteq H$.

($\Leftarrow$) Ha H nem összefüggő, akkor $H = X \dot\cup Y$, ahol $X \neq \emptyset \neq Y$ nyíltak. Legyen $p \in X$, $q \in Y$. H p.ö.f.-sége miatt van p-t és q-t összekötő, H-ban haladó töröttvonal. Feltehetjük, hogy egy H-beli szakasz köti össze őket (mert a töröttvonalon lesz egy utolsó X-beli pont, és akkor nevezhetjük azt p-nek, és a következőt q-nak). Legyen $g(t)$, $t \in [0,1]$ ez a szakasz, és $f : H \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ha $x \in X$ és 1 máskor. Akkor $f \circ g$ folytonos $[0,1]$-en és $(f \circ g)(0) = 0$, $(f \circ g)(1) = 1$ (ellentmondva a Bolzano-tételnek), mert tetszőleges $t_0 \in [0,1]$ és $\epsilon > 0$-ra (mondjuk tegyük fel, hogy $g(t_0) \in X$) X nyíltsága miatt van olyan $\delta > 0$, hogy $g(t_0)$ δ-sugarú környezete $\subseteq X$, és g folytonossága miatt δ-hoz van olyan η, hogy $|t - t_0| < \eta$-ból $|g(t) - g(t_0)| < \delta$, és így $g(t) \in X$, azaz $(f \circ g)(t) = 0 = (f \circ g)(t_0)$ következik. □

FÜGGELÉK B. MEGOLDÁSOK

1.6 (1) j középpontú 1 sugarú kör

(2) $|z+1-j| = |z-(j-1)|$, tehát ez a $j-1$ középpontú 1 és 2 sugarú koncentrikus körök közé eső tartomány.

(3) Az 1-től és j-től azonos távolságben levő pontok, azaz az $y = x$ ($\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$) egyenes.

(4) $|z-(-2)| < |2-z|$, vagyis azok a pontok, amik közelebb vannak -2-höz mint 2-höz, vagyis a negatív valós részűek.

(5) $|z-(-3/2)| > 2$, vagyis a $-3/2$ középpontú, 2 sugarú kör külseje.

(6) $|z-4| > |z-0|$, vagyis azok a pontok, amik közelebb vannak 0-hoz mint 4-hez, azaz $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 2\}$.

1.9 $|z| = \sqrt{1+3} = 2$; $\cos\arg(z) = 1/2$, $\sin\arg(z) = \sqrt{3}/2$, tehát $\arg z = \pi/3$, vagyis $z = 2(\cos\pi/3 + j\sin\pi/3)$. Az állítás miatt tehát z ötödik gyökei: $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi/3+2k\pi}{5} + j\sin\frac{\pi/3+2k\pi}{5}\right)$.

2.2 Mert az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identitásfüggvény az; mert koordinátafüggvényei, azaz a valós és képzetes részei folytonos $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények.

4.13 Ez konvergens mértani sor iff $\left|e^{jz}\right| < 1$. Ha $z = x + jy$, akkor $1 > \left|e^{jz}\right| = e^{-y} \iff -y < 0 \iff y > 0$. Tehát a sor azokra a z-kre konvergens, amikre $\operatorname{Im} z > 0$. És ilyenkor az összeg $\frac{1}{1-e^{jz}}$.

4.14 Ha $x = \operatorname{Re} z \geq 0$, akkor $a_n \not\to 0$, tehát divergens. Különben $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = (n+1)e^{(2n+1)x} \to 0 < 1$, tehát konvergens.

4 $\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$, tehát

$$\cos(\frac{\pi}{2}+j) = \frac{1}{2}(e^{-1+\frac{j\pi}{2}} + e^{1-\frac{j\pi}{2}}) = \frac{1}{2}(e^{-1}(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) + e(\cos\frac{-\pi}{2} + j\sin\frac{-\pi}{2})) = \frac{1}{2}(e^{-1}-e)j,$$

vagyis $\operatorname{Im}\cos(\frac{\pi}{2}+j) = \frac{1}{2}(e^{-1}-e) = \operatorname{sh}(-1)$.
VAGY: $\cos(\frac{\pi}{2}+j) = \cos\frac{\pi}{2}\cos j - \sin\frac{\pi}{2}\sin j = -\sin j = -j\operatorname{sh}1$.

5.28 Mivel $\frac{\cos(\ln z)}{z-2}$ reguláris az 1 középpontú, 1/2 sugarú körlapon,

$$\int_K \frac{\cos(\ln z)}{z^2-3z+2}\,dz = \int_K \frac{\frac{\cos(\ln z)}{z-2}}{z-1}\,dz = 2\pi j \frac{\cos(\ln z)}{z-2}\Big|_{z=1} = -2\pi j$$

a Cauchy integrálformula miatt.

5.29 (a) Mivel az integrandus reguláris, a Cauchy-integráltétel miatt $\int_K \frac{\cos z}{z+j}\,dz = 0$.

(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z+j}$ reguláris, ezért $\int_K \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = \int_K \frac{f(z)}{z-j}\,dz = 2\pi j f(j) = \pi\cos j = \pi\operatorname{ch}1$ a Cauchy-integrálformula miatt és 4.20(4) miatt.

5.30 $f(z) = e^z$ reguláris, ezért a differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrálképletek szerint $1 = f^4(0) = \frac{4!}{2\pi j}\int_K \frac{e^z}{z^5}\,dz$, azaz $\int_K \frac{e^z}{z^5}\,dz = \frac{\pi j}{12}$.

VAGY reziduum-tétellel: Az integrandusnak a K által határolt körlapon 0-ban van izolált szingularitása, és $\frac{e^z}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-5}}{n!}$ miatt $\operatorname{Res}_0 \frac{e^z}{z^5} = \frac{1}{4!}$. Tehát a reziduum-tétel miatt $\int_K \frac{e^z}{z^5}\,dz = 2\pi j\frac{1}{4!} = \frac{\pi j}{12}$.

5.31 5.21 miatt $\int_{|z-1|=3} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \int_{K_0} \frac{e^z/(z+1)}{z}\,dz + \int_{K_{-1}} \frac{e^z/z}{z+1}\,dz$, ahol K_p a p középpontú, 1/2 sugarú, pozitívan irányított körvonal. Legyen $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$, $g(z) = \frac{e^z}{z}$; akkor f reguláris egy K_0-t, g egy K_{-1}-et tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon, ezért a Cauchy integrálformula szerint $1 = f(0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{K_0} \frac{e^z/(z+1)}{z}\,dz$ és $-1/e = g(-1) = \frac{1}{2\pi j}\int_{K_{-1}} \frac{e^z/z}{z+1}\,dz$, azaz $\int_{|z-1|=3} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = 2\pi j - 2\pi j/e = 2\pi j(1-1/e)$.

VAGY: $\frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+1}$ és 5.20 miatt

$$\int_K \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \int_K \frac{e^z}{z}\,dz - \int_K \frac{e^z}{z+1}\,dz = 2\pi i(1-\frac{1}{e})$$

mert $1 = e^0 = \frac{1}{2\pi j}\int_K \frac{e^z}{z}\,dz$ és $e^{-1} = \frac{1}{2\pi j}\int_K \frac{e^z}{z+1}\,dz$ a Cauchy integrálformula miatt.

VAGY: reziduum-tétellel. $\int_K \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_0 \frac{e^z}{z(z+1)} + \operatorname{Res}_{-1}\frac{e^z}{z(z+1)})$ mert $\frac{e^z}{z(z+1)}$ a $0, -1$ pontok kivételével reguláris a komplex síkon; de $\operatorname{Res}_0 \frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e^0}{2z+1\big|_{z=0}} = 1$ és $\operatorname{Res}_{-1}\frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e^{-1}}{2z+1\big|_{z=-1}} = -e^{-1}$ mert e^z és $g(z) = z(z+1)$ regulárisak 0, -1-ben, $g(0) = 0 = g(-1)$ de $g'(0) \neq 0 \neq g'(-1)$ tehát $\int_K \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i(1-\frac{1}{e})$