MODÁLIS LOGIKA

SIMON ANDRÁS

1. Más szemantika propozicionális logikára

Új logika (PL'): formulák ugyanazok mint propozicionális logikában (PL) (emlékeztető: $\varphi ::= \bot|p|\neg\varphi|\varphi \vee \psi$, ahol $p \in \Pi$), de a szemantika a következő.

1.1. Definíció (modell)**.** $\langle W, v\rangle$ modell, ha W nemüres halmaz, és $v : \Pi \longrightarrow \mathcal{P}\, W$.

W elemei: *világok* vagy *állapotok*.

1.2. Definíció (formula jelentése)**.** Legyen $\mathcal{M} = \langle W, v\rangle$ egy modell. $\varphi \in Form_\Pi$ jelentése az $\mathcal{M}$ modellben (v-t kiterjesztjük Π-ről $Form_\Pi$-re formulaindukcióval):

- $\bot^{\mathcal{M}} = \emptyset$
- $p^{\mathcal{M}} = v(p)$ ha $p \in \Pi$
- $(\neg\varphi)^{\mathcal{M}} = W \setminus \varphi^{\mathcal{M}}$
- $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{M}} = \varphi^{\mathcal{M}} \cup \psi^{\mathcal{M}}$.

$\mathcal{M} \models'_w \varphi$ (φ igaz az $\mathcal{M}$ modell w világában) ha $w \in \varphi^{\mathcal{M}}$. (Persze most is, mint PL-ben, ezt direktben is lehet definiálni: $\langle W, v\rangle \not\models'_w \bot$, $\langle W, v\rangle \models'_w p$ iff $w \in v(p)$; $\langle W, v\rangle \models'_w \varphi \vee \psi$ iff $\langle W, v\rangle \models'_w \varphi$ vagy $\langle W, v\rangle \models'_w \psi$; $\langle W, v\rangle \models'_w \neg\varphi$ iff $\langle W, v\rangle \not\models'_w \varphi$.) Végül: $\mathcal{M} \models' \varphi$ (φ igaz $\mathcal{M}$-ben) iff $(\forall w \in W)\mathcal{M} \models'_w \varphi$; és $\models' \varphi$ (φ érvényes) iff minden $\mathcal{M}$ modellben $\mathcal{M} \models' \varphi$.

Ez tényleg más logika: pl. PL-ben trv., hogy ha két modell elmélete megegyezik, akkor a két modell egyenlő (ie., $\{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\} = \{\varphi : \mathcal{N} \models \varphi\} \implies \mathcal{M} = \mathcal{N}$). PL'-re ez már nem igaz: pl. $\mathcal{M} = \langle\{w\}, v\rangle$ (v tetszőleges), $\mathcal{N} = \langle\{s, t\}, v_1\rangle$, ahol $v_1(p) = \{s, t\}$ ha $v(p) = \{w\}$, és $v_1(p) = \emptyset$ ha $v(p) = \emptyset$. Formulaindukcióval könnyű látni, hogy minden φ-re $\mathcal{M} \models'_w \varphi \iff \mathcal{N} \models'_s \varphi \iff \mathcal{N} \models'_t \varphi$, kövképp $\mathcal{M} \models' \varphi \iff \mathcal{N} \models' \varphi$, noha persze $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$. Kicsit részletesebben:

1.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{M}_i = \langle W_i, v_i\rangle$ $(i = 1, 2)$ PL' modellek, $Z \subseteq W_1 \times W_2$ és tfh. $(\forall p \in \Pi)(\forall w_1 \in W_1)(\forall w_2 \in W_2)(w_1 Z w_2 \implies [w_1 \in v_1(p) \iff w_2 \in v_2(p)])$. (Az ilyen Z-t $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közti* biszimuláció*nak mondják.) Akkor $(\forall\varphi \in Form_\Pi)(\forall w_1 \in W_1)(\forall w_2 \in W_2)(w_1 Z w_2 \implies [\mathcal{M}_1 \models'_{w_1} \varphi \iff \mathcal{M}_2 \models'_{w_2}])$.*

A fenti példában $Z = \{\langle w, s\rangle, \langle w, t\rangle\}$.

Bizonyítás. Formulaindukcióval. Legyen $w_1 Z w_2$. $\bot$ sem itt, sem ott nem igaz. Ha $\varphi = p$ (atomi), akkor $\mathcal{M}_1 \models'_{w_1} p \iff w_1 \in v_1(p) \iff w_2 \in v_2(p) \iff \mathcal{M}_2 \models'_{w_2} p$. Tfh. φ, ψ-re igaz az állítás. $\mathcal{M}_1 \models'_{w_1} \varphi \vee \psi \iff \mathcal{M}_1 \models'_{w_1} \varphi$ vagy $\mathcal{M}_1 \models'_{w_1} \psi \iff \mathcal{M}_2 \models'_{w_2} \varphi$ vagy $\mathcal{M}_2 \models'_{w_2} \psi \iff \mathcal{M}_2 \models'_{w_2} \varphi \vee \psi$, és végül $\mathcal{M}_1 \models'_{w_1} \neg\varphi \iff \mathcal{M}_1 \not\models'_{w_1} \varphi \iff \mathcal{M}_2 \not\models'_{w_2} \varphi \iff \mathcal{M}_2 \models'_{w_2} \neg\varphi$. $\square$

Észrevételeket és javításokat az `asimon@math.bme.hu` címre küldhetsz.

De azért az igaz, hogy

1.4. Tétel. *Minden* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$*-ra*

$$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \models' \varphi.$$

Persze $\Sigma \models' \varphi$ továbbra is azt jelenti, hogy $\mathcal{M} \models' \Sigma \implies \mathcal{M} \models' \varphi$.

1.5. Lemma. *Legyen* $\mathcal{M}$ *PL-modell,* $\mathcal{N} = \langle W, v\rangle$ *pedig* PL' *modell, és legyen* $w \in W$*. Ha* $\mathcal{M}(p) = 1 \iff w \in v(p)$ *minden* $p \in \Pi$*-re, akkor* $\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{N} \models'_w \varphi$ *minden* $\varphi \in Form_\Pi$*-re.*

A lemma bizonyítása. Formulaindukcióval. □

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Tfh. $\Sigma \not\models' \varphi$. Akkor van olyan $\mathcal{N} = \langle W, v\rangle$ modell és $w \in W$ világ, hogy $\mathcal{N} \models' \Sigma$, de $\mathcal{N} \not\models'_w \varphi$. Defjük az $\mathcal{M}$ (PL-)modellt így: $\mathcal{M}(p) = 1 \iff w \in v(p)$. Akkor a lemma miatt $\mathcal{M} \models \Sigma$ (mert $\mathcal{N} \models' \Sigma$ és így $\mathcal{N} \models'_w \Sigma$), és $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

($\Leftarrow$) Tfh. $\Sigma \not\models \varphi$. Akkor van olyan $\mathcal{M}$ (PL-)modell, amiben Σ igaz, de φ nem. Defjük az $\mathcal{N} = \langle W, v\rangle$ modellt így: $W = \{w\}$ (vagyis egyetlen világ van), és $v(p) = \{w\}$ vagy $\emptyset$, attól függően, hogy $\mathcal{M}(p) = 1$ vagy 0. Akkor a lemma feltételei állnak (erre az egyetlen w-re), tehát $\mathcal{N} \models'_w \Sigma$ (és így $\mathcal{N} \models' \Sigma$, mivel w az egyetlen $\mathcal{N}$-beli világ), és $\mathcal{N} \not\models'_w \varphi$ (tehát $\mathcal{N} \not\models' \varphi$). □

2. Modális logika

2.1. Szintaxis $\varphi ::= \bot | p | \neg\varphi | \varphi \vee \psi | \Diamond \varphi$, ahol $p \in \Pi$.

($\Diamond \varphi$-t „lehetséges, hogy φ"-nek, vagy „gyémánt φ"-nek szokás olvasni.) A kijelentéslogika többi konnektívumát a szokásos definíciókkal vezetjük be (pl. $\varphi \to \psi \overset{\text{def}}{=} \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$, $\top \overset{\text{def}}{=} \neg\bot, \ldots$), és most van még egy új konnektívum: $\Box \varphi \overset{\text{def}}{=} \neg \Diamond \neg\varphi$ („szükségszerű, hogy φ", „doboz φ").

2.2. Szemantika Modell: mint PL′-ben, csak most még van egy binér reláció is, azaz

2.1. Definíció (frame,modell)**.** $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *frame*, ha W nemüres halmaz és $R \subseteq W \times W$. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v\rangle$ *modell*, ha $\mathcal{F}$ frame és $v : \Pi \longrightarrow \mathcal{P}\, W$.

Vagyis: modell = frame + kiértékelés. W elemei: *világok* vagy *állapotok* vagy egyszerűen *pontok*. Ha sRt, akkor „t az s rákövetkezője" vagy „s látja t-t".

2.2. Definíció (formula jelentése)**.** Legyen $\mathcal{M} = \langle W, R, v\rangle$ egy modell. $\varphi \in Form_\Pi$ jelentése az $\mathcal{M}$ modellben (v-t kiterjesztjük Π-ről $Form_\Pi$-re formulaindukcióval):

- $\bot^{\mathcal{M}} = \emptyset$
- $p^{\mathcal{M}} = v(p)$ ha $p \in \Pi$
- $(\neg\varphi)^{\mathcal{M}} = W \setminus \varphi^{\mathcal{M}}$
- $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{M}} = \varphi^{\mathcal{M}} \cap \psi^{\mathcal{M}}$
- $(\Diamond \varphi)^{\mathcal{M}} = \{ w \in W : (\exists w' \in \varphi^{\mathcal{M}}) wRw' \}$.

$\mathcal{M} \models_w \varphi$ (φ igaz az $\mathcal{M}$ modell w világában) ha $w \in \varphi^{\mathcal{M}}$. Ugyanez kicsit direktebben:

- $\mathcal{M} \not\models_w \bot$
- $\mathcal{M} \models_w p$ ha $w \in v(p)$
- $\mathcal{M} \models_w \varphi \wedge \psi$ ha $\mathcal{M} \models_w \varphi$ és $\mathcal{M} \models_w \psi$

- $\mathcal{M} \models_w \neg\varphi$ ha $\mathcal{M} \not\models_w \varphi$
- $\mathcal{M} \models_w \Diamond\varphi$ ha van olyan $w' \in W$, amire wRw' és $\mathcal{M} \models_{w'} \varphi$.

Végül: $\mathcal{M} \models \varphi$ (φ *igaz* vagy *érvényes* $\mathcal{M}$-ben) ha $\varphi^{\mathcal{M}} = W$ azaz ha $(\forall w \in W)\mathcal{M} \models_w \varphi$; és $\mathcal{F} \models \varphi$ (φ érvényes $\mathcal{F}$-ben) ha minden v kiértékelésre $\langle \mathcal{F}, v \rangle \models \varphi$. K frame- vagy modellosztályra $K \models \varphi$ ha φ érvényes K minden elemében. φ érvényes ($\models \varphi$) ha minden frame-ben érvényes.

2.3. Definíció (Helyettesítés). $p_1, \ldots, p_n \in \Pi$ és $\varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in Form$-ra a $\varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n]$-t a következőképpen definiáljuk:

- $\bot[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] = \bot$
- $p[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] = \sigma_i$ ha $p = p_i$ és p egyébként
- $(\neg\varphi)[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] = \neg(\varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n])$
- $(\varphi \vee \psi)[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] = \varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] \vee \psi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n]$
- $(\Diamond\varphi)[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] = \Diamond(\varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n])$

$\varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n]$ a φ egy *instanciája.* $\Sigma \subseteq Form_\Pi$ formulahalmaz *zárt helyettesítésre*, ha minden $p_1, \ldots, p_n \in \Pi$, $\varphi \in \Sigma$ és $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in Form_\Pi$-re $\varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n] \in \Sigma$.

2.4. Állítás. *$\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle$-re, $p_1, \ldots, p_n \in \Pi$-re és $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in Form$-ra legyen $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}, v' \rangle$, ahol $v'(p_i) = \sigma_i^{\mathcal{M}}$ és $v'(p) = v(p)$ a többi kijelentésváltozóra. Akkor minden φ formulára $\varphi^{\mathcal{M}'} = \varphi[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n]^{\mathcal{M}}$.*

Bizonyítás. φ felépítésére vonatkozó indukcióval:

- $\bot[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n]^{\mathcal{M}} = \bot^{\mathcal{M}} = \emptyset = \bot^{\mathcal{M}'}$
- $(p[\sigma_1/p_1, \ldots, \sigma_n/p_n])^{\mathcal{M}} = \begin{cases} \sigma_i^{\mathcal{M}} = v'(p_i) = p_i^{\mathcal{M}'} & \text{ha } p = p_i \\ p^{\mathcal{M}} = p^{\mathcal{M}'} & \text{egyébként} \end{cases}$
- A bizonyítás hátralevő részében a könnyebb olvashatóság kedvéért feltesszük, hogy $n = 1$.

  $((\neg\varphi)[\sigma/p])^{\mathcal{M}} = (\neg(\varphi[\sigma/p]))^{\mathcal{M}} = W \setminus (\varphi[\sigma/p])^{\mathcal{M}} = W \setminus \varphi^{\mathcal{M}'} = (\neg\varphi)^{\mathcal{M}'}$;

  itt, ahogyan a következőkben is, az utolsó előtti egyenlőségben az indukciós feltevést használtuk
-
$$\begin{aligned}((\varphi \vee \psi)[\sigma/p])^{\mathcal{M}} &= (\varphi[\sigma/p] \vee \psi[\sigma/p])^{\mathcal{M}} \\ &= (\varphi[\sigma/p])^{\mathcal{M}} \cup (\psi[\sigma/p])^{\mathcal{M}} = \varphi^{\mathcal{M}'} \cup \psi^{\mathcal{M}'} = (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{M}'}\end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned}((\Diamond\varphi)[\sigma/p])^{\mathcal{M}} &= (\Diamond(\varphi[\sigma/p]))^{\mathcal{M}} = \{w \in W : (\exists w' \in (\varphi[\sigma/p])^{\mathcal{M}})wRw'\} \\ &= \{w \in W : (\exists w' \in \varphi^{\mathcal{M}'})wRw'\} = (\Diamond\varphi)^{\mathcal{M}'}\end{aligned}$$

□

2.5. Következmény. *Egy frame-ben érvényes formulák halmaza zárt helyettesítésre.*

Bizonyítás. Az állítás szerint ha φ egy instanciája nem érvényes az $\mathcal{F}$ frame-ben, akkor van olyan $\mathcal{F}$-re épülő modell, amelyben φ nem igaz. □

Bár a továbbiakban szinte kizárólag a most definiált „alap” modális logikával (*basic modal logic*, *BML*) foglalkozunk, azért megemlítjük ennek két népszerű általánosítását.

multimodális logikák: Egy modális konnektívum ($\Diamond$) helyett több ($\Diamond_i$, $i \in I$); ennek megfelelően egy frame $\langle W, R_i \rangle_{i \in I}$ alakú, ahol R_i a $\Diamond_i$-nek megfelelő elérhetőségi reláció.

polimodális logikák: Unér modalitások helyett n-argumentumú ($n \in \omega$) modalitások; ha $\Diamond$ ilyen, akkor *Form* definíciója annyiban módosul, hogy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Form$-ra $\Diamond(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in Form$. A $\Diamond$-hoz tartozó elérhetőségi reláció ilyenkor $n+1$ argumentumú, és az igazság-definíció megfelelő része így alakul: $\mathcal{M} \models_w \Diamond(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ha van olyan $w_1, \ldots, w_n \in W$, hogy $Rww_1, \ldots, w_n$ és $\mathcal{M} \models_{w_i} \varphi_i$ minden $1 \leq i \leq n$-re.

(Végső soron tehát minden olyan elsőrendű struktúra frame, amiben csak relációk szerepelnek.)

A később sorra kerülő definíciók és tételek mind különösebb nehézség nélkül általánosíthatók ezekre a logikákra.

2.3. Példák

Temporális logika Legyen a nyelvben két unér modalitás ($<F>$ és $<P>$, duálisaik $[F]$ és $[P]$), a frame-ek pedig legyenek $\langle W, <, > \rangle$ alakúak, ahol $\langle W, < \rangle$ részbenrendezés, és $>$ a $<$ konverze. Egy ilyen frame-ben $<F>\, \varphi$ jelentése „valamikor a jövőben φ”.

Cilindrikus modális logika Legyenek $\Diamond_i$, $i \in I$ unér modalitások, a frame-ek pedig $\{\, {}^I U, R_i \,\}_{i \in I}$, ahol $s, t \in {}^I U$-ra $sR_it \iff \forall j \neq i . s_j = t_j$. Ez az (egyenlőségmentes) elsőrendű logika modális változata. Ha egyenlőséget is szeretnénk, minden $i, j \in I$-re beveszünk a nyelvbe egy δ_{ij} 0-argumentumú modalitást, aminek elérhetőségi relációja $D_{ij} = \{\, s \in {}^I U : s_i = s_j \,\}$.

2.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy az ilyen frame-ekben érvényesek a következő modális formulák:

(i) $\Diamond_i \perp \leftrightarrow \perp$
(ii) $\varphi \to \Diamond_i \varphi$
(iii) $\Diamond_i \Diamond_i \varphi \to \Diamond_i \varphi$
(iv) $\Diamond_i(\varphi \wedge \Diamond_i \psi) \leftrightarrow \Diamond_i \varphi \wedge \Diamond_i \psi$
(v) $\Diamond_i \Diamond_j \varphi \to \Diamond_j \Diamond_i \varphi$

Az elsőrendű logika milyen érvényes formuláinak felelnek meg a fentiek?

Egy polimodális logika Legyen $\Diamond$ egy binér modalitás, a frame-ek pedig $\langle\, U \times U, R \,\rangle$ alakúak, ahol

$$R = \{\, \langle \langle u, w \rangle, \langle u, v \rangle, \langle v, w \rangle \rangle : u, v, w \in U \,\}.$$

Egy ilyen frame-re épülő $\mathcal{M}$ modellben a formulák jelentései binér relációk, és ezekre igaz a következő:

2.7. Feladat. $\Diamond(\varphi, \psi)^{\mathcal{M}} = \varphi^{\mathcal{M}} \circ \psi^{\mathcal{M}}$ (ahol $\circ$ reláció-kompozíciót jelöl).

3. Modális definiálhatóság

3.1. Feladat. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(i) $\models \Box \top$
(ii) $\models \Diamond \top$
(iii) $\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box \varphi \to \Box \psi)$ (és a konverze?)
(iv) $\models \Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond \varphi \vee \Diamond \psi)$
(v) $\models \Diamond(\varphi \to \psi) \to (\Box \varphi \to \Diamond \psi)$
(vi) ha $K \models \varphi$, akkor $K \models \Box \varphi$
(vii) $\models \varphi \to \Box \varphi$

3.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{F}$ egy frame, R az $\mathcal{F}$ elérhetőségi relációja.*

(i) $\mathcal{F} \models \Diamond \top \iff \mathcal{F} \models \forall s \exists t. sRt$
(ii) $\mathcal{F} \models \Box \bot \iff \mathcal{F} \models \forall s \neg \exists t. sRt$
(iii) $\mathcal{F} \models \Box p \to p \iff \mathcal{F} \models \forall s. sRs$, *azaz ha R reflexív*
(iv) $\mathcal{F} \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *R tranzitív*
(v) $\mathcal{F} \models \Box\Box p \to \Box p \iff$ *R sűrű, azaz* $\mathcal{F} \models \forall s, t(sRt \to \exists w. sRwRt)$
(vi) $\mathcal{F} \models p \to \Box \Diamond p \iff$ *R szimmetrikus*
(vii) $\mathcal{F} \models \Diamond p \to \Box p \iff \mathcal{F} \models \forall s \forall t \forall w(sRt \wedge sRw \to t = w)$, *azaz ha R parciális függvény.*
(viii) $\mathcal{F} \models \Diamond p \to \Box \Diamond p \iff \mathcal{F} \models \forall s \forall t \forall w(sRt \wedge sRw \to tRw)$, *azaz ha R „euklideszi”.*

Bizonyítás. $\Leftarrow$ bizonyítása minden esetben könnyű. Nézzünk példákat a $\Rightarrow$-ra (amit nem bizonyítunk, az hf.):

(i) Ha volna olyan pont, aminek nincs rákövetkezője, akkor ott (bármilyen értékelés mellett) nem igaz a $\Diamond \top$.

(iii) Ha s irreflexív pont, akkor $v(p) = W \setminus \{ s \}$ (képben: $\overset{\emptyset}{\neg p}$) mellett $\langle \mathcal{F}, v \rangle \not\models_s \Box p \to p$ (röviden: $s \not\models \Box p \to p$), hiszen s minden rákövetkezőjében igaz p, de s-ben nem.

(iv) Ha R nem tranzitív, akkor vannak olyan $rRsTt$ pontok, amikre $\neg rRt$; legyen $v(p) = W \setminus \{ t \}$. Képben: $\bullet \to \bullet \to \overset{\neg p}{\bullet}$. Node akkor $r \not\models \Box p \to \Box\Box p$, hiszen r minden rákövetkezőjében igaz p, de van egy olyan rákövetkezője (s), amiben nem igaz $\Box p$. $\Box$

3.3. Feladat. Bizonyítsuk be a többi állítást is.

3.1. Modálisan definiálható nem elsőrendű tulajdonságok

Nem minden modális formulának felel meg elsőrendű formula (vagy akár formulahalmaz). Azaz van olyan φ modális formula, amihez nem létezik olyan Σ elsőrendű formulahalmaz, hogy minden $\mathcal{F}$ frame-re $\mathcal{F} \models \varphi \iff \mathcal{F} \models \Sigma$. Pl.:

(W): $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

3.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{F}$ egy frame, R az $\mathcal{F}$ elérhetőségi relációja. $\mathcal{F} \models W$ pontosan akkor, ha R tranzitív és nincsenek benne végtelen láncok.*

Bizonyítás. ($\Leftarrow$) Tfh. van olyan v kiértékelés és $s \in W$, hogy $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle \models_s \Box(\Box p \to p) \wedge \Diamond \neg p$ (röviden: $s \models \Box(\Box p \to p) \wedge \Diamond \neg p$). Akkor ($s \models \Diamond \neg p$ miatt) van olyan t, hogy $sRt \models \neg p$, amiből viszont ($s \models \Box(\Box p \to p)$ miatt) $t \models \neg \Box p$, azaz $t \models \Diamond \neg p$ következik. De R tranzitivitása miatt $s \models \Box(\Box p \to p)$-ból $t \models \Box(\Box p \to p)$ is következik (hiszen t minden szomszédja s-nek is szomszédja), tehát $t \models \Box(\Box p \to p) \wedge \Diamond \neg p$. Vagyis azt kaptuk, hogy minden olyan világnak, amelyben igaz $\varphi \equiv \Box(\Box p \to p) \wedge \Diamond \neg p$, van olyan szomszédja, amelyben szintén igaz φ. Másszóval, ha van olyan olyan világ, amiben nem igaz **W**, akkor van végtelen lánc.

($\Rightarrow$) R tranzitív: tfh. nem, és tanúsítsa ezt $rRsRt$. Legyen $v(p) = W \setminus \{s, t\}$. Akkor $r \not\models \Box p$, hiszen $rRs \not\models p$, noha $r \models \Box(\Box p \to p)$, a következő miatt: ha w az r s-től különböző rákövetkezője (speciel $w \neq t$), akkor $w \models p$, tehát $w \models \Box p \to p$; s-ben meg azért igaz $\Box p \to p$, mert $s \not\models \Box p$, hiszen $sRt \not\models p$.

W-ben nincs végtelen lánc: tfh. $w_0 R w_1 R \ldots$ (w_i-k nem feltétlenül különbözőek), és legyen $v(p) = W \setminus \{w_i : i \in I\}$. Akkor $w_0 \not\models \Box p$, hiszen $w_0 R w_1 \not\models p$, noha $w_0 \models \Box(\Box p \to p)$, éppúgy mint az előbb: ha $w_0 R s$, akkor $s \models \Box p \to p$, mert ha s nem valamelyik w_i, akkor $s \models p$, ellenkező esetben pedig $s \not\models \Box p$. $\Box$

3.5. Állítás. *Nincs olyan Σ elsőrendű formulahalmaz, amely pontosan akkor lenne igaz egy frameben, ha annak elérhetőségi relációja tranzitív és nincsenek benne végtelen láncok.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Σ ilyen, és minden $n \in \omega$-ra legyen $\mathcal{F}_n = \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, < \rangle$. Akkor $\mathcal{F}_n \models \Sigma$, tehát $\mathcal{F}_n$-ek minden ultraszorzatában is. De ha D egy nemprincipális ultrafilter ω felett, akkor

$$00000\ldots/D < 01111\ldots/D < 01222\ldots/D < 01233\ldots/D < \ldots$$

végtelen lánc $\prod_\omega \mathcal{F}_n / D$-ben.

VAGY: Tegyük fel, hogy $\Sigma \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ ilyen; legyen $\mathcal{L}^+ = L \cup \{c_n : n \in \omega\}$ az $\mathcal{L}$ bővítése új konstansokkal, és legyen $\Sigma^+ = \Sigma \cup \{c_0 R \ldots R c_n : n \in \omega\}$. Akkor Σ^+ minden véges része kielégíthető, a kompaktsági tétel miatt tehát van $\mathcal{M}$ modelje; ebben $c_0^{\mathcal{M}}, \ldots, c_n^{\mathcal{M}}, \ldots$ végtelen R-lánc, noha $\Sigma \subseteq \Sigma^+$ miatt $\mathcal{M} \restriction \mathcal{L} \models \Sigma$.

$\Box$

3.2. Modálisan nem definiálható elsőrendű tulajdonságok

3.6. Definíció. Legyenek $\mathcal{M}_i = \langle \mathcal{F}_i, v_i \rangle$, modellek, ahol $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$ ($i = 1, 2$). Az $f : W_1 \longrightarrow W_2$ függvény *p-morfizmus* $\mathcal{M}_1$-ből $\mathcal{M}_2$-be, ha

(i) $sR_1 t \implies f(s) R_2 f(t)$ minden $s, t \in W_1$-re (cikk)

(ii) $f(s) R_2 t \implies (\exists u \in W_1)(sR_1 u \wedge f(u) = t)$ minden $s \in W_1, t \in W_2$-re (cakk)

(iii) $s \in v_1(p) \iff f(s) \in v_2(p)$ minden $p \in \Pi$-re és $s \in W_1$-re.

f p-morfizmus $\mathcal{F}_1$-ből $\mathcal{F}_2$-be, ha az első két tulajdonság teljesül.

$\mathcal{M}_2$ ($\mathcal{F}_2$) p-morf képe $\mathcal{M}_1$-nek ($\mathcal{F}_1$-nek), ha van szürjektív $\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$) p-morfizmus. Jelölés: $\mathcal{M}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2$). $\mathbb{H}K$ a K frame- vagy modellosztály p-morf képeinek osztálya.

3.7. Állítás. *Ha $f : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ p-morfizmus, akkor*

$$\mathcal{M}_1 \models_w \varphi \iff \mathcal{M}_2 \models_{fw} \varphi$$

minden $w \in W_1$ és $\varphi \in Form_\Pi$-re.

Bizonyítás. Indukció φ felépítésére: atomi formulákra 3.6(iii) miatt igaz az állítás, és a Boole-konnektívumokra az öröklődés triviális. Úgyhogy tfh. $\varphi = \Diamond \psi$. Ha $\mathcal{M}_1 \models_w \Diamond \psi$, akkor van olyan $s \in W_1$, hogy wR_1s és $\mathcal{M}_1 \models_s \psi$. Az indukciós feltevés miatt $\mathcal{M}_2 \models_{fs} \psi$ és 3.6(i) miatt $f(w)R_2f(s)$, tehát $\mathcal{M}_2 \models_{fw} \Diamond\psi$.

Fordítva, ha $\mathcal{M}_2 \models_{fw} \Diamond\psi$, akkor $\mathcal{M}_2 \models_t \psi$ valamilyen $f(w)R_2t \in W_2$-re. 3.6(ii) miatt létezik $u \in W_1$, amire wR_1u és $f(u) = t$. Utóbbi (és az indukciós feltevés) miatt $\mathcal{M}_1 \models_u \psi$, előbbi miatt tehát $\mathcal{M}_1 \models_w \Diamond\psi$. □

3.8. Következmény. *Ha $\mathcal{F}_1 = \langle W_1, R_1 \rangle \models \varphi$ és $\mathcal{F}_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ az $\mathcal{F}_1$ p-morf képe, akkor $\mathcal{F}_2 \models \varphi$.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{F}_2 \not\models \varphi$, akkor van olyan v_2 értékelés és $w \in W_2$ világ, amire $\langle \mathcal{F}_2, v_2 \rangle \not\models_w \varphi$. Definiáljuk a v_1 értékelést $\mathcal{F}_1$-en úgy, hogy 3.6(iii) teljesüljön, azaz $v_1(p) = \{ s \in W_1 : f(s) \in v_2(p) \}$. Akkor $f : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ p-morfizmus, így az Állítás miatt ha s a w valamelyik őse, akkor $\mathcal{M}_1 \not\models_s \varphi$; tehát $\mathcal{F}_1 \not\models \varphi$. □

A következmény megfordítása persze nem igaz; a bizonyítás v_2 definiálásánál akadna meg, de mindjárt lesz ellenpélda is.

Most már könnyű megmutatni, hogy az irreflexivitás nem definiálható modális formulával. Tegyük fel ui., hogy a φ formula éppen az irreflexív frame-ekben érvényes. Akkor érvényes $\langle \omega, < \rangle$-ben is, és így annak minden p-morf képében is. De a $\langle \{ w \}, \{ \langle w, w \rangle \} \rangle$ frame p-morf képe $\langle \omega, < \rangle$-nek (az egyetlen $\omega \longrightarrow \{w\}$ függvény p-morfizmus), és nem irreflexív. (Mivel ebben az egyelemű frame-ben érvényes $\Box p \to p$ (mert reflexív), $\langle \omega, < \rangle$-en meg nem (mert nem reflexív), ez példa arra, hogy a fenti következmény nem fordítható meg.)

Mellesleg a példa azt is mutatja, hogy az irreflexív frame-ek osztálya nemcsak egy, hanem akárhány modális formulával sem defhető. Sőt azt is, hogy nem definiálható egy olyan modalitás, aminek az elérhetőségi relációja a $\neq$. (Szemben pl. $R \circ R$-rel, amit $\delta(p) = \Diamond\Diamond p$ definiál.) Mert ez azt jelentené, hogy van egy olyan $\delta(p)$ formula, amire igaz lenne, hogy tetszőleges modellben $\mathcal{M} \models_w \delta(p) \iff (\exists t \neq w)\mathcal{M} \models_t p$. Legyen $\mathcal{M}$ az az $\langle \omega, < \rangle$-re épülő modell, amiben $v(p) = \omega$ minden $p \in \Pi$-re, $\mathcal{M}'$ pedig az a $\langle \{ w \}, \{ \langle w, w \rangle \} \rangle$-ra épülő modell, amiben $v'(p) = \{w\}$ minden $p \in \Pi$-re. $\mathcal{M}'$ ekkor persze p-morf képe $\mathcal{M}$-nek. $\mathcal{M} \models_0 \delta(p)$ (hiszen pl. $1 \neq 0$-ban igaz a p), 3.7 miatt tehát $\mathcal{M}' \models_w \delta(p)$, noha itt nincs egy másik világ, ahol p igaz lenne.

Hasonlóan: antiszimmetria ($sRtRs \Rightarrow s = t$) nem defhető, mert $\langle \omega, \leq \rangle$-nek p-morf képe a $\langle \{ 0, 1 \}, \{ 0, 1 \}^2 \rangle$ frame (a p-morfizmus a $\mod 2$ függvény).

3.9. Feladat. Legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ előrendezések (vagyis az elérhetőségi relációk reflexívek és tranzitívek). Tekintsük mindkettőn azt a topológiát, amiben a felfelé zárt halmazok a nyíltak. Akkor $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ p-morfizmus pontosan akkor, ha folytonos (cikk) és nyílt (cakk).

3.9 Felfelé zártak tetszőleges úniója és metszete is felfelé zárt (trv.), tehát nemhogy topológiát alkotnak, de ráadásul ún. Alexandrov teret.

f cikk iff folytonos. Legyen $X = f^{-1}Y$, Y zárt felfelé; ha $z \geq x \in X$, akkor $f(z) \geq f(x) \in Y$, tehát $f(z) \in Y$, azaz $z \in X$. Fordítva: ha f folytonos, és $x \leq y$, akkor $Y = \{ z : z \geq f(x) \}$ tranzitivitás miatt zárt felfelé, és x eleme az ősképének, tehát y is (különben az őskép nem lenne zárt felfelé); következésképp $f(y) \in Y$, azaz $f(y) \geq f(x)$.

f cakk iff nyílt: Ha X zárt felfelé és $f(x) \leq z$ valamilyen $x \in X$-re, akkor cakk miatt van olyan y, amire $x \leq y$ (ergo $y \in X$) és $f(y) = z$; azaz z is benne van X f szerinti képében.

Fordítva: ha f nyílt és $f(x) \leq z$, akkor $X = \{y : x \leq y\}$ nyíltsága miatt $f(x) \in fX = \{f(y) : x \leq y\}$ is nyílt, tehát $f(z) \in fX$, vagyis van olyan y, hogy $x \leq y$ és $f(y) = z$.

[Ld. Bezhanishvili, Gehrke: Completeness of S4..., APAL 131 (pp 287-301)]

3.10. Feladat. Keressünk további nem definiálható elsőrendű tulajdonságokat.

R univerzális (azaz $(\forall s, t \in W)sRt$) sem definiálható, de ezt p-morfizmussal nem tudjuk megmutatni: 3.6(i) miatt ui. ha egy frame ilyen, akkor minden p-morf képe is ilyen.

3.11. Definíció. Legyenek $\mathcal{M}_i = \langle \mathcal{F}_i, v_i \rangle$, modellek, ahol $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$ ($i \in I$) és W_i-k páronként diszjunktak. Legyen továbbá $W = \cup_{i \in I} W_i$, $R = \cup_{i \in I} R_i$ és $v : \Pi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ az a kiértékelés az $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ frame-en, amit $v(p) = \cup_{i \in I} v_i(p)$ definiál. Ekkor $\mathcal{F}$ az $\mathcal{F}_i$ frame-ek *diszjunkt úniója*, $\mathcal{M} = \langle F, v \rangle$ pedig az $\mathcal{M}_i$ modellek diszjunkt úniója. Jelölés: $\biguplus_I \mathcal{M}_i$ ill. $\biguplus_I \mathcal{F}_i$.

$\mathbb{U}\mathrm{d}K$ jelöli a K frame- vagy modellosztály lezártját diszjunkt únióra.

3.12. Állítás. *Ha $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$ az $\mathcal{M}_i = \langle W_i, R_i, v_i \rangle$ ($i \in I$) modellek diszjunkt úniója, akkor*

$$\mathcal{M}_i \models_w \varphi \iff \mathcal{M} \models_w \varphi$$

minden $i \in I$-re, $w \in W_i$-re és $\varphi \in Form$-ra.

Bizonyítás. 3.7 miatt, mert az identitásfüggvény $\mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}$ p-morfizmus. □

3.13. Következmény. *Ha $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ az $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$ ($i \in I$) frame-ek diszjunkt úniója, akkor minden $\varphi \in Form$-ra*

$$\mathcal{F} \models \varphi \iff \text{minden } i \in I\text{-re } \mathcal{F}_i \models \varphi.$$

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Ha $\mathcal{F}_k \not\models \varphi$ valamelyik $k \in I$-re, akkor $\langle \mathcal{F}_k, v_k \rangle \not\models_w \varphi$ valamilyen v_k értékelésre és $w \in W_k$-re. $j \in I, j \neq k$-ra v_j legyen tetszőleges értékelés $\mathcal{F}_j$-n, v pedig a v_i ($i \in I$) értékelések „úniója”. Ekkor $\langle \mathcal{F}, v \rangle$ az $\langle \mathcal{F}_i, v_i \rangle$ modellek diszjunkt úniója, az állítás miatt tehát $\langle \mathcal{F}, v \rangle \not\models_w \varphi$, azaz $\mathcal{F} \not\models \varphi$.

($\Leftarrow$) Ha $\mathcal{F} \not\models \varphi$, azaz van olyan v értékelés és $w \in W$ világ, amelyre $\langle \mathcal{F}, v \rangle \not\models_w \varphi$, akkor $i \in I$-re definiáljuk a $\mathcal{F}_i$ frame-hez a v_i értékelést így: $v_i(p) = v(p) \cap W_i$. Ekkor $\langle \mathcal{F}, v \rangle$ az $\langle \mathcal{F}_i, v_i \rangle$ modellek diszjunkt úniója, az állítás miatt tehát $\langle \mathcal{F}_k, v_k \rangle \not\models_w \varphi$, azaz $\mathcal{F}_k \not\models \varphi$, ahol $k \in I$ olyan, hogy $w \in W_k$. □

Most már meg tudjuk mutatni, hogy az univerzalitás sem defhető: a Következmény miatt ui. a modálisan defhető frame-osztályok zártak diszjunkt únióra, az „univerzális” frame-ek osztálya meg nyilván nem.

Éppúgy mint az irreflexivitás definiálhatatlanságából, az univerzalitás definiálhatatlanságából is le lehet szűrni, hogy valamilyen modalitás nem definiálható: nevezetesen az, aminek az elérhetőségi relációja az $W \times W$. Vagyis nincs olyan $\delta(p)$ modális formula, amelyre igaz volna, hogy minden modellben $\mathcal{M} \models_w \delta(p) \iff (\exists t)\mathcal{M} \models_t p$. Tegyük fel ui. hogy δ ilyen, és legyen $\mathcal{M}_1$ egy olyan modell, amiben p minden világban igaz, $\mathcal{M}_2$ pedig egy olyan, amiben p minden világban hamis. Akkor a diszjunkt úniójukban $\delta(p)$ hamis lesz minden $\mathcal{M}_2$-ből származó világban (3.12 miatt), noha p igaz minden (lényeg: legalább egy) $\mathcal{M}_1$-ből származó világban (megintcsak 3.12 miatt).

„van reflexív világ” ($\exists x.xRx$) és „minden világnak van megelőzője” ($\forall y \exists x.xRy$) sem definiálható modálisan, de ezek nem bizonyíthatóak sem p-morfizmussal, sem diszjunkt únióval[1].

3.14. Definíció. Legyen $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle$ és $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}', v' \rangle$ modellek, ahol $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ és $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$. $\mathcal{M}'$ *generált részmodellje* $\mathcal{M}$-nek, ha

(i) $W' \subseteq W$
(ii) $R' = R \cap (W' \times W')$
(iii) $(\forall x \in W')(\forall y \in W)(xRy \implies y \in W')$
(iv) $v'(p) = v(p) \cap W'$ minden $p \in \Pi$-re.

$\mathcal{F}'$ *generált részframe*-je $\mathcal{F}$-nek, ha az első három feltétel teljesül.

$\mathbb{S}K$ jelöli a K frame- vagy modellosztály lezártját generált rész képzésre.

$X \subseteq W$-re a legszűkebb, X-et tartalmazó univerzumú generált részmodellt (részframe-et) az X által generált részmodellnek (részframe-nek) hívjuk. Ha $X = \{ w \}$, akkor a generált modellt (frame-et) pont-generált modellnek (frame-nek) mondjuk, amelynek w a *gyökere*.

Pl. diszjunkt únió minden komponense generált részmodellje (részframe-je) az úniónak.

3.15. Állítás. *Ha $\mathcal{M}' = \langle W', R', v' \rangle$ generált részmodellje $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$-nek, akkor*

$$\mathcal{M}' \models_w \varphi \iff \mathcal{M} \models_w \varphi$$

minden $w \in W'$-re és $\varphi \in Form$-ra.

Bizonyítás. 3.7 miatt, mert az identitásfüggvény $\mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ p-morfizmus (a 3.6(ii) feltétel a 3.14(iii) miatt teljesül). □

3.16. Következmény. *Ha $\mathcal{F}'$ generált részframe-je $\mathcal{F}$-nek, akkor*

$$\mathcal{F} \models \varphi \implies \mathcal{F}' \models \varphi$$

minden $\varphi \in Form$-ra.

Mielőtt példát mutatnánk egy elsőrendű tulajdonságra amelynek modális definiálhatatlanságát generált részframe segítségével tudjuk belátni, bizonyítunk egy állítást, ami összekapcsolja a p-morfizmus, a diszjunkt únió és a generált részmodell fogalmát.

3.17. Állítás. *Minden modell (frame) p-morf képe pont-generált részmodelljei (részframe-jei) diszjunkt úniójának.*

Bizonyítás. Természetesen elég a modellekre vonatkozó állítást bizonyítani.

Legyen $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$ és minden $w \in W$-re legyen $\mathcal{M}_w = \langle W_w, R_w, v_w \rangle$ az $\mathcal{M}$ w által generált részmodellje, $\mathcal{N} = \langle W', R', v' \rangle$ pedig ezek diszjunkt úniója. Hogy $\mathcal{N}$ valóban *diszjunkt* únió legyen, tegyük fel, hogy $\mathcal{M}_w$ világai meg vannak címkézve w-vel, azaz minden világ egy $\langle s, w \rangle$ pár, és két ilyen pár R_w relációban áll egymással, ha az első koordinátájuk R-ben áll.

Legyen f a $\langle s, w \rangle \mapsto s$ által definiált $W' \longrightarrow W$ függvény. Ez nyilván szürjektív és minden $p \in \Pi$-re és $\langle s, w \rangle \in W'$-re $\langle s, w \rangle \in v'(p) \iff \langle s, w \rangle \in v_w(p) \iff f(\langle s, w \rangle) = s \in v(p)$. Ha $\langle s, w \rangle R' \langle t, w' \rangle$, akkor $w' = w$ és $\langle s, w \rangle R_w \langle t, w' \rangle$, és így $f(\langle s, w \rangle) = sRt = f(\langle t, w' \rangle)$. Végül ha $f(\langle s, w \rangle)Rt$, azaz sRt, akkor s-sel együtt t is eleme $\mathcal{M}$ w által generált részmodelljének, így $\langle s, w \rangle R' \langle t, w \rangle$ és persze $f(\langle t, w \rangle) = t$. □

[1] ellenőrizni!

3.18. Állítás. *Ha $\mathcal{M}$-et a w pont generálja, akkor*

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff (\forall n \in \mathbb{N})\mathcal{M} \models_w \Box^n \varphi$$

Bizonyítás. Csak a $\Leftarrow$ irány szorul bizonyításra. Ahhoz viszont elég annyit belátni, hogy minden világ elérhető w-ből véges sok „R-lépéssel”. Ez viszont nyilvánvaló abból, hogy az ilyen világok halmaza w-t tartalmazó generált részmodell univerzuma. $\Box$

A $\langle \{ b \}, \emptyset \rangle \subseteq \langle \{ a, b \}, \{ \langle a, a \rangle \} \rangle$ frame-ek mutatják, hogy a $\exists x.xRx$ által definiált frame-osztály valóban nem definiálható modális formulákkal. A

$$\langle \{ b \}, \emptyset \rangle \subseteq \langle \{ a, b \}, \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \} \rangle$$

frame-ek pedig azt, hogy a $\forall y \exists x.xRy$ által definiált frame-osztály sem definiálható modális formulákkal.

Mint eddig is, 3.15 használható annak megmutatására, hogy valamilyen modalitás nem definiálható. Pl. az, amelyiknek az elérhetőségi relációja az R konverze. Azaz nincs olyan $\delta(p) \in Form$, amire $\mathcal{M} \models_w \delta(\varphi) \iff \exists s(sRw \wedge \mathcal{M} \models_s \varphi)$. Ezt mutatja az

$$\langle \{ a, b \}, \{ \langle a, b \rangle \}, v \rangle, \qquad v(p) = \{a\}$$

modell, mert ennek b világában igaz a $\delta(p)$, és ennek generált részmodellje a $\langle \{ b \}, \emptyset, v' \rangle$, ahol $v'(p) = \emptyset$, aminek a b világában viszont nem igaz a $\delta(p)$.

Végül: a „minden világnak van reflexív rákövetkezője” ($\forall x \exists y.xRyRy$) sem definiálható modális formulával, noha ez a tulajdonság megőrződik p-morfizmusra, diszjunkt únióra és generált részframe-ekre is. Ezért szükségünk van egy újabb (utolsó) konstrukcióra/megőrzési tételre.

3.2.1. *Ultrafilter-bővítés*

3.19. Definíció. Legyen $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ egy frame. $X \subseteq W$-re $m(X) = \{ t \in W : (\exists w \in X)tRw \}$ és $m^\delta(X) = \{ t \in W : (\forall w \in W)(tRw \to w \in X) \}$.

Azaz: $m(X)$ azon világok halmaza, akik látnak egy X-beli világot, $m^\delta(X)$ pedig azoké, akik csak X-beli világot látnak. Ezek nem teljesen új fogalmak: 2.2-ben $(\Diamond \varphi)^\mathcal{M} = m(\varphi^\mathcal{M})$, és nem nehéz látni, hogy $(\Box \varphi)^\mathcal{M} = m^\delta(\varphi^\mathcal{M})$. És éppúgy, ahogy $\Box$ és $\Diamond$ egymás duálisai ($\Box \varphi = \neg \Diamond \neg \varphi$ és $\Diamond \varphi = \neg \Box \neg \varphi$), m^δ és m is egymás duálisai:

3.20. Feladat.

(i) $m^\delta(X) = -m(-X)$ és $m(X) = -m^\delta(-X)$

(ii) $m(X \cup Y) = m(X) \cup m(Y)$ és $m^\delta(X \cap Y) = m^\delta(X) \cap m^\delta(Y)$

3.20 $m^\delta(X) \cap m^\delta(Y) = \{ t \in W : (\forall w \in W)(tRw \to w \in X) \} \cap \{ t \in W : (\forall w \in W)(tRw \to w \in Y) \} = \{ t \in W : (\forall w \in W)(tRw \to w \in X \cap Y) \} = m^\delta(X \cap Y)$

3.21. Definíció (Ultrafilter-bővítés). Legyen $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle$, ahol $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$. Legyen $u, v \in \mathrm{Uf}\, W$-re $uR^{ue}v \iff (\forall X \in v)m(X) \in u$ és $v^{ue}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in \mathrm{Uf}\, W : v(p) \in u \}$ minden $p \in \Pi$-re. Ekkor $\mathcal{M}$ *ultrafilter-bővítése* $\mathcal{M}^{ue} = \langle \mathcal{F}^{ue}, v^{ue} \rangle$, ahol $\mathcal{F}^{ue} = \langle \mathrm{Uf}\, W, R^{ue} \rangle$ az $\mathcal{F}$ frame ultrafilter-bővítése.

3.22. Állítás. $(\forall u, v \in \mathrm{Uf}\, W)(uR^{ue}v \leftrightarrow (\forall X \subseteq W)(m^\delta(X) \in u \to X \in v)$.

Bizonyítás. Kéne: $(\forall X \in v) m(X) \in u \iff (\forall X \subseteq W)(m^\delta(X) \in u \to X \in v)$
($\Rightarrow$) Legyen $X \subseteq W$ olyan, hogy $m^\delta(X) \in u$. $m^\delta(X) = -m(-X)$, tehát $m(-X) \notin u$ és így a baloldal miatt $-X \notin v$, azaz $X \in v$.
($\Leftarrow$) Ha $X \in v$, akkor $-X \notin v$, így a jobboldal miatt $m^\delta(-X) \notin u$, tehát $m(X) = -m^\delta(-X) \in u$. $\square$

3.23. Feladat (Topológia-kedvelőknek)**.**

(i) Minden $u \in \mathrm{Uf}\, W$-re $R^{ue}u = \{ v : uR^{ue}v \}$ zárt a Stone topológiában (ld. (ii)).
(ii) Ha $C \subseteq \mathrm{Uf}\, W$ zárt a Stone topológiában (azaz $\bigcap\{ \mathcal{U}_X : X \in \mathcal{X} \}$ alakú, ahol $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(W)$), akkor $R^{ue}C = \{ v : (\exists u \in C) uR^{ue}v \}$ is zárt. [Segítség: $\mathcal{X}$-ről feltehetjük, hogy filter.]
(iii) R^{ue} zárt a szorzat-topológiában.
(iv) (Farkas) (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i)

3.23 (i)
$$R^{ue}u = \bigcap\{ \mathcal{U}_X : m^\delta(X) \in u \}$$
mert
$$\begin{aligned} v \in R^{ue}u \iff uR^{ue}v \iff & \forall X(m^\delta(X) \in u \to X \in v) \\ \iff & \forall X(m^\delta(X) \in u \to v \in \mathcal{U}_X) \iff v \in \bigcap\{ \mathcal{U}_X : m^\delta(X) \in u \}. \end{aligned}$$

(ii) Azt állítjuk, hogy
$$R^{ue}C = \bigcap\{ \mathcal{U}_X : m^\delta(X) \in \mathcal{X} \} \tag{1}$$
A kulcslépés ennek belátásához a következő ekvivalencia
$$\exists u(\mathcal{X} \subseteq u \ \& \ uR^{ue}v) \iff \forall X(m^\delta(X) \in \mathcal{X} \to X \in v) \tag{2}$$

($\Rightarrow$) Legyen u olyan, hogy $\mathcal{X} \subseteq u$ és $uR^{ue}v$, azaz $\forall X(m^\delta(X) \in u \implies X \in v)$. Akkor $m^\delta(X) \in \mathcal{X}$-ből $m^\delta(X) \in u$ és így $X \in v$ következik.

($\Leftarrow$) Először is: $\mathcal{X} \cup \{ m(X) : X \in v \}$ véges metszet tulajdonságú, a következők miatt. $\mathcal{X}$ zárt véges metszetre (mert filter) és minden $X_1, \dots, X_n$-re $m(X_1 \cap \dots \cap X_n) \subseteq m(X_i)$, tehát elég azt megmutatni, hogy $X_1, \dots, X_n \in v$ és $X \in \mathcal{X}$-re $X \cap m(X_1 \cap \dots \cap X_n) \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy nem. Akkor egy X-beli sem lát $X_1 \cap \dots \cap X_n$-belit, következésképp $m^\delta(-(X_1 \cap \dots \cap X_n)) \supseteq X$, tehát (mivel $\mathcal{X}$ zárt felfelé) $m^\delta(-(X_1 \cap \dots \cap X_n)) \in \mathcal{X}$, és így a feltevés miatt $-(X_1 \cap \dots \cap X_n) \in v$, ami ellentmond $X_1 \cap \dots \cap X_n \in v$-nek.

Legyen u egy $\mathcal{X} \cup \{ m(X) : X \in v \}$-t tartalmazó ultrafilter. Akkor $\mathcal{X} \subseteq u$ és $uR^{ue}v$.

(2) segítségével most már be tudjuk látni (1)-et:
$$\begin{aligned} v \in R^{ue}C \iff (\exists u \in C) uR^{ue}v \iff & \exists u(\mathcal{X} \subseteq u \ \& \ uR^{ue}v) \\ \underset{(1)}{\iff} & \forall X(m^\delta(X) \in \mathcal{X} \implies X \in v) \iff v \in \bigcap\{ \mathcal{U}_X : m^\delta(X) \in \mathcal{X} \}. \end{aligned}$$

(iii) Elég belátni, hogy ha $\langle u_0, v_0 \rangle \notin R^{ue}$, akkor van olyan $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ nyílt halmaz, hogy $\langle u_0, v_0 \rangle \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ és $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \cap R^{ue} = \emptyset$. De ez triviális, mert a feltevés miatt van olyan $X \in v_0$, hogy $m(X) \notin u_0$; legyen $\mathcal{X} = \{ u : -m(X) \in u \}$ és $\mathcal{Y} = \{ v : X \in v \}$.

3.24. Állítás. *$\mathcal{F}^{ue}$ (mint elsőrendű modell) részmodellként tartalmazza $\mathcal{F}$ egy izomorf másolatát.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ w világának felejen meg $\mathcal{F}^{ue}$ γ_w világa, ahol γ_w a w által generált principális ultrafilter. γ nyilván injektív, és megtartja R-et, mert

$$\begin{aligned}\gamma_s R^{ue}\gamma_t &\iff (\forall X \in \gamma_t)m(X) \in \gamma_s\\ &\iff (\forall X \subseteq W)(t \in X \to s \in \{\, w \in W : (\exists x \in X)wRx \,\})\\ &\iff (\forall X \subseteq W)(t \in X \to (\exists x \in X)sRx)\\ &\iff sRt.\end{aligned}$$

□

A következő példa mutatja, hogy $\mathcal{F}$ természetes képe általában nem generált részframe-je $\mathcal{F}^{ue}$-nek.

3.25. Példa. Legyen $\mathcal{F} = \langle\, \omega, < \,\rangle$. Hogy fog kinézni $\mathcal{F}^{ue}$? Azt az állítás miatt már tudjuk, hogy az $\mathcal{F}^{ue}$-beli principális ultrafilterek $\mathcal{F}$ egy izomorf másolatát alkotják, tehát csak az a kérdés, hogy a nemprincipális ultrafilterek hogy viszonyulnak ezekhez és egymáshoz.

Első észrevétel: nemprincipális ultrafilterek minden eleme végtelen. Merthogy $\cup_{i=1}^{n} X_i \in u \implies (\exists i \in \{1, \ldots, n\})X_i \in u$ (ha ui. nincs ilyen i, akkor $\cap_{i=1}^{n} - X_i \in u$ és így $\cup_{i=1}^{n} X_i = -(\cap_{i=1}^{n} - X_i) \notin u$), tehát ha egy véges halmaz eleme egy ultrafilternek, akkor annak egy egyelemű részhalmaza is, és így az ultrafilter principális.

Második észrevétel: ha v nemprincipális, akkor $m(X) = \omega$ minden $X \in v$-re. Valóban, az előző észrevétel miatt X végtelen, tehát minden egész számnál van nagyobb X-beli szám.

A második észrevétel miatt viszont ha v nemprincipális, akkor minden $u \in \mathrm{Uf}\,\omega$-ra $u <^{ue} v$, hiszen $\omega \in u$.

Tehát $\mathcal{F}^{ue}$ az ω egy másolatával kezdődik, aztán jönnek a nemprincipális ultrafilterek, akik mindenkinél (egymásnál is) nagyobbak. Tehát az $\mathcal{F}$-beli világok(nak megfelelő világok) minden nemprincipális ultrafiltert látnak, azaz az egész $\mathcal{F}^{ue}$-t generálják.

3.26. Tétel (Farkas). *$\mathcal{F}$ természetes beágyazás szerinti képe pontosan akkor generált részframe-je $\mathcal{F}^{ue}$-nek ha $\mathcal{F}$-ben minden világnak csak véges sok rákövetkezője van.*

3.27. Feladat. Bizonyítsuk be a Farkas tételt!

3.27 ($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $\gamma_w R^{ue} v$, és legyenek $\{\, w_i : i < n \,\}$ w rákövetkezői. Akkor minden v-beli X-re $m(X) \in \gamma_w$, azaz $w \in m(X)$, azaz $\bigvee_{i<n} w_i \in X$; de akkor v-t valamelyik $\{\, w_i : i < n \,\}$ generálja, (tehát benne van $\mathcal{F}$ természetes beágyazás szerinti képében), különben $-\{\, w_i : i < n \,\} = \cap_{i<n} - \{\, w_i \,\} \in v$.

($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy w-nek végtelen sok rákövetkezője van, legyen ezek halmaza W_0, és legyen v egy W_0-t tartalmazó nem-principális ultrafilter. Azt állítjuk, hogy $\gamma_w R^{ue} v$. Valóban, ha $X \in v$, akkor $X \cap W_0 \in v$, tehát nemüres; mondjuk $s \in X \cap W_0$. W_0 definíciója miatt $wRs \in X$, tehát $w \in m(X)$, azaz $m(X) \in \gamma_w$.

3.28. Állítás. *Minden $\mathcal{M} = \langle\, W, R, v \,\rangle$ modellre és minden $\varphi \in Form$-ra $\varphi^{\mathcal{M}^{ue}} = \{\, u \in \mathrm{Uf}\,W : \varphi^{\mathcal{M}} \in u \,\}$, azaz*

$$\mathcal{M}^{ue} \models_u \varphi \iff \varphi^{\mathcal{M}} \in u$$

minden $u \in \mathrm{Uf}\,W$-re.

Bizonyítás. Indukció φ felépítésére.

$\varphi = p$ (vagyis atomi): $\mathcal{M}^{ue} \models_u p \iff u \in v^{ue}(p) \iff p^{\mathcal{M}} = v(p) \in u$. A második ekvivalenciában v^{ue} definícióját használtuk.
$\varphi = \neg\psi$: $\mathcal{M}^{ue} \models_u \neg\psi \iff \mathcal{M}^{ue} \not\models_u \psi \iff \psi^{\mathcal{M}} \notin u \iff (\neg\psi)^{\mathcal{M}} = -(\psi^{\mathcal{M}}) \in u$. A második ekvivalencia az indukciós feltevés, a harmadik pedig u *ultra*filtersége miatt áll.
$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$: $\mathcal{M}^{ue} \models_u \psi_1 \wedge \psi_2 \iff \mathcal{M}^{ue} \models_u \psi_1$ és $\mathcal{M}^{ue} \models_u \psi_2 \iff \psi_1^{\mathcal{M}} \in u$ és $\psi_2^{\mathcal{M}} \in u \iff (\psi_1 \wedge \psi_2)^{\mathcal{M}} = \psi_1^{\mathcal{M}} \cap \psi_2^{\mathcal{M}} \in u$. A második ekvivalencia az indukciós feltevés, a harmadik pedig u filtersége (az egyik irányban a metszetre, a másikban a felfelé zártsága) miatt áll.
$\varphi = \Diamond\psi$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{ue} \models_u \Diamond\psi \iff (\exists v \in \mathrm{Uf}\, W)(uR^{ue}v \text{ és } \mathcal{M}^{ue} \models_v \psi)&\\ \iff (\exists v \in \mathrm{Uf}\, W)(uR^{ue}v \text{ és } \psi^{\mathcal{M}} \in v)&\end{aligned}$$

(az indukciós feltevés miatt.) Vagyis az kéne, hogy

(*) $$(\exists v \in \mathrm{Uf}\, W)(uR^{ue}v \quad \text{és} \quad \psi^{\mathcal{M}} \in v) \iff (\Diamond\psi)^{\mathcal{M}} \in u.$$

Balról jobbra: Mivel $uR^{ue}v$ miatt minden v-beli halmazra, így $\psi^{\mathcal{M}}$-re is áll, hogy m szerinti képe $\in u$. De $m(\psi^{\mathcal{M}}) = (\Diamond\psi)^{\mathcal{M}}$.

Jobbról balra nehezebb a dolog, mert v-t „meg kell csinálni” valahogy.

Legyen $v_0 = \{X \subseteq W : m^{\delta}(X) \in u\}$. m^{δ} $\cap$-tartó 3.20 miatt; ezért, és mert u zárt metszetre, v_0 is zárt metszetre.

Következésképp annak belátásához, hogy

(**) $$v_0 \cup \{\psi^{\mathcal{M}}\} \text{ véges metszet tulajdonságú}$$

elég megmutatni, hogy ha $X \subseteq W$-re $m^{\delta}(X) \in u$, akkor $X \cap \psi^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$. És ez igaz, mert $m^{\delta}(X)$ (és a jobboldal miatt) $(\Diamond\varphi)^{\mathcal{M}} \in u$, tehát van $t \in m^{\delta}(X) \cap (\Diamond\varphi)^{\mathcal{M}}$. $t \in (\Diamond\varphi)^{\mathcal{M}}$ miatt t-nek van $\psi^{\mathcal{M}}$-beli rákövetkezője, és ez X-nek is eleme $t \in m^{\delta}(X)$ miatt.

B.5 és (**) miatt tehát van $v_0 \cup \{\psi^{\mathcal{M}}\}$-t tartalmazó $v \in \mathrm{Uf}\, W$. Ez jó lesz (*)-ban, mert $\psi^{\mathcal{M}} \in v$ és v_0 definíciója miatt $uR^{ue}v$ (v.ö. 3.22). ☐

3.29. Következmény. *$\mathcal{M} \models_w \varphi \iff \mathcal{M}^{ue} \models_{\gamma_w} \varphi$ minden $\mathcal{M}$ modell minden w világára és minden $\varphi \in Form$-ra.*

Bizonyítás. Az állítás miatt $\mathcal{M}^{ue} \models_{\gamma_w} \varphi \iff \varphi^{\mathcal{M}} \in \gamma_w \iff w \in \varphi^{\mathcal{M}} \iff \mathcal{M} \models_w \varphi$. ☐

3.30. Következmény. *$\mathcal{F}^{ue} \models \varphi \implies \mathcal{F} \models \varphi$ minden $\mathcal{F}$ frame-re és $\varphi \in Form$-ra.*

Bizonyítás. Az előző következményből a szokásos módon. ☐

Most már meg tudjuk mutatni, hogy $\forall x \exists y xRyRy$ (azaz: mindenkinek van reflexív rákövetkezője) sem definiálható modálisan. Legyen ui. $\mathcal{F}$ az 3.25-beli frame. Akkor $\mathcal{F}^{ue} \models \forall x \exists y xRyRy$ (hiszen mindenki lát egy nemprincipális ultrafiltert, azok meg látják magukat), noha ugyanez a formula $\mathcal{F}$-ben nem igaz, mert ott egyáltalán nincsenek reflexív világok. Ezzel 3.30 miatt beláttuk, hogy a „mindenkinek van reflexív rákövetkezője” tulajdonság sem definiálható modálisan.

3.31. Feladat. Legyenek R és S binér relációk egy W halmazon. Mutassuk meg, hogy $(R \circ S)^{ue} = R^{ue} \circ S^{ue}$.

* * *

Az eddigiekben négy különböző konstrukcióval (p-morf kép, diszjunkt únió, generált részmodell, ultrafilter-bővítés) láttuk be, hogy valamilyen elsőrendű tulajdonság nem definiálható modális formulával. A később bizonyítandó Goldblatt-Thomason tétel (3.52) szerint ehhez más konstrukcióra nincs is szükségünk.

3.32. Definíció. Legyenek $\mathcal{M}_i = \langle \mathcal{F}_i, v_i \rangle$, modellek, ahol $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$ $(i = 1, 2)$. A $Z \subseteq W_1 \times W_2$ reláció *biszimuláció* $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ között, ha

(i) $sR_1t \;\;\&\;\; sZs' \implies (\exists t' \in W_2)(tZt' \;\;\&\;\; s'R_2t')$ minden $s, t \in W_1, s' \in W_2$-re (cikk)

(ii) $sZs'R_2t' \implies (\exists t \in W_1)(sR_1tZt')$ minden $s \in W_1, s', t' \in W_2$-re (cakk)

(iii) $s \in v_1(p) \iff t \in v_2(p)$ minden $p \in \Pi$-re és $\langle s, t \rangle \in Z$-re.

Z biszimuláció $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ között, ha az első két tulajdonság teljesül.

3.33. Feladat. Egy $f : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ függvény pontosan akkor p-morfizmus, ha biszimuláció.

3.34. Állítás. *Ha Z biszimuláció $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ között, akkor*

$$\mathcal{M}_1 \models_s \varphi \iff \mathcal{M}_2 \models_t \varphi$$

minden $\langle s, t \rangle \in Z$ és $\varphi \in Form_\Pi$-re.

Bizonyítás. Formulaindukcióval. □

3.35. Feladat. Legyen $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$, ahol $W = \{ w \} \cup \{ w_{ij} : j < i \leq \omega \}$, $R = \{ \langle w, w_{i0} \rangle : i \leq \omega \} \cup \{ \langle w_{ij}, w_{ij+1} \rangle : j + 1 < i \leq \omega \}$ és $v(p) = \emptyset$ minden p-re, $\mathcal{M}'$ pedig $\mathcal{M}$-nek az a (nem generált!) részmodellje, amelynek világai $W \setminus \{ w_{\omega,j} : j < \omega \}$.

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{M} \models_w \varphi \iff \mathcal{M}' \models_w \varphi$ minden $\varphi \in Form_\Pi$-re, de nincs olyan biszimuláció $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ között, ami $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ w világait összekötné.

Az állítás megfordítása tehát általában nem igaz, de bizonyos modellosztályokban igen.

3.36. Definíció. $\mathcal{M}$ *modálisan szaturált* (röviden: *m-szaturált*), ha minden w világának, aminek szomszédaiban egy Σ formulahalmaz végesen kielégíthető, van olyan szomszédja, amelyben Σ igaz. Azaz

$$(\forall \Sigma \subseteq Form_\Pi)(\forall w \in W)[(\forall \Delta \subseteq_\omega \Sigma)(\exists w' \in W)(wRw' \;\;\&\;\; \mathcal{M} \models_{w'} \Delta) \\ \implies (\exists w' \in W)(wRw' \;\;\&\;\; \mathcal{M} \models_{w'} \Sigma)]$$

3.37. Feladat. m-szaturált minden olyan modell, amelyben minden világnak csak véges sok rákövetkezője van.

3.38. Feladat. m-szaturált modellek generált részmodelljei is m-szaturáltak.

Kevésbé egyszerű, de jóval hasznosabb példákat ad a következő

3.39. Állítás. *$\mathcal{M}^{ue}$ m-szaturált minden $\mathcal{M}$ modellre.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$ és tegyük fel, hogy Σ minden véges részhalmaza igaz $u \in \mathrm{Uf}\, W$ egy rákövetkezőjében. Olyan $v \in \mathrm{Uf}\, W$-t akarunk csinálni, akire $uR^{ue}v$ és $v \models \Sigma$. Az első feltétel (és 3.22) miatt v-nek biztosan tartalmaznia kell a $\{ X \subseteq W : m^\delta(X) \in u \}$, a második (és 3.28) miatt pedig a $\{ \sigma^\mathcal{M} : \sigma \in \Sigma \}$ halmazokat. Fordítva, ha v tartalmazza ezeket a halmazokat, akkor v jó is lesz. Tehát elég azt belátnunk, hogy

$$\{ X \subseteq W : m^\delta(X) \in u \} \cup \{ \sigma^\mathcal{M} : \sigma \in \Sigma \}$$

véges metszet tulajdonságú. Mivel u zárt véges metszetre, 3.20 szerint elég azt megmutatni, hogy ha $m^\delta(X) \in u$ és $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$, akkor $X \cap \bigcap_1^n \sigma_i^\mathcal{M} \neq \emptyset$. Ez viszont igaz, mert van olyan u', hogy $uR^{ue}u' \models \bigwedge_1^n \sigma_i$, és erre (megintcsak 3.22 és 3.28 miatt) igaz, hogy $X \in u'$ és $\bigcap_1^n \sigma_i^\mathcal{M} = (\bigwedge_1^n \sigma_i)^\mathcal{M} \in u'$. Akkor viszont $X \cap \bigcap_1^n \sigma_i^\mathcal{M} \in u'$, tehát nemüres. □

3.40. Feladat. Ha Σ minden véges része kielégíthető $\mathcal{M}^{ue}$-ben, akkor Σ is.

Az m-szaturált modellek jelentőségét a következő tétel adja.

3.41. Tétel. *Legyenek $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ m-szaturált modellek, $Z \subseteq W_1 \times W_2$ pedig álljon a modálisan ekvivalens világok párjaiból, azaz*

$$\langle s, t \rangle \in Z \iff (\forall \varphi \in \mathit{Form}_\Pi)[\mathcal{M}_1 \models_s \varphi \iff \mathcal{M}_2 \models_t \varphi]$$

Akkor Z biszimuláció $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ között. Speciel: az m-szaturált modellek osztályában bármely két modálisan ekvivalens világot összeköt egy biszimuláció.

Bizonyítás. Csak a „cikk” tulajdonságot látjuk be (mert a „cakk” bizonyítása ugyanaz, a kijelentésváltozókra vonatkozó feltétel pedig Z definíciója miatt teljesül).

Tegyük fel, hogy sR_1t és sZs', és legyen $\Sigma = \{ \varphi : \mathcal{M}_1 \models_t \varphi \}$. Akkor Σ minden véges része kielégül s' egy rákövetkezőjében, mert

$$\mathcal{M}_1 \models_t \bigwedge \Delta \overset{sR_1t}{\Longrightarrow} \mathcal{M}_1 \models_s \Diamond \bigwedge \Delta \overset{sZs'}{\Longrightarrow} \mathcal{M}_2 \models_{s'} \Diamond \bigwedge \Delta$$

minden $\Delta \subseteq_\omega \Sigma$-ra. $\mathcal{M}_2$ m-szaturáltsága miatt tehát van olyan t', amire $s'R_2t'$ és $\mathcal{M}_2 \models_{t'} \Sigma$, vagyis tZt'. □

3.3. Kapcsolat elsőrendű logikával Minden modell (és persze minden frame is) tekinthető egy szokásos elsőrendű struktúrának: $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$ annak az elsőrendű nyelvnek egy modellje, amiben egy binér relációjel van (ennek interpretációja R), és minden $p \in \Pi$-re egy unér relációjel (P, amelynek jelentése $v(p)$). Ezt a nyelvet $\mathcal{L}^1_\Pi$-vel fogjuk jelölni. Fordítva is, természetesen minden ilyen struktúra tekinthető (modális) modellnek.

3.42. Definíció. *Standard fordítás*nak hívjuk a következő $\mathit{Form}_\Pi \longrightarrow \mathcal{L}^1_\Pi$ függvényt:

- $ST_x(p) = P(x)$
- $ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$
- $ST_x(\varphi \vee \psi) = ST_x(\varphi) \vee ST_x(\psi)$
- $ST_x(\Diamond \varphi) = \exists y(Rxy \wedge ST_y(\varphi))$

Vegyük észre, hogy $ST_x(\varphi)$-nek x az egyetlen szabad változója.

Mivel a standard fordítás valójában a modális formulák igazságfeltételeinek átfogalmazása, a következő állítás nem meglepő:

3.43. Állítás. $\mathcal{M} \models_w \varphi \iff \mathcal{M} \models ST_x(\varphi)[w]$

Bizonyítás. Formulaindukcióval. □

Ezek után definiálhatjuk frame-ek és modellek ultraszorzatát úgy, mint a megfelelő elsőrendű struktúrák ultraszorzatát (és a továbbiakban $\mathbb{P}uK$-val ill. $\mathbb{P}wK$-val jelöljük majd a K frame- vagy modellosztály lezártját ultraszorzatra és ultrahatványra); és a Łos lemmából az előző állításon keresztül kapjuk, hogy

3.44. Tétel (Łos). *Legyen F ultrafilter I felett, $\mathcal{M}_i$ modell W_i univerzummal (minden $i \in I$-re), és $w \in \prod_{i\in I} W_i$. Akkor*

$$\prod \mathcal{M}_i/F \models_{w/F} \varphi \iff \{\, i \in I : \mathcal{M}_i \models_{w_i} \varphi \,\} \in F.$$

3.45. Következmény. *Tegyük fel, hogy a Σ formulahalmaz minden véges része kielégíthető a K modellosztály valamely elemében. Akkor van olyan ultraszorzata K-beli modelleknek, amiben Σ kielégíthető.*

Bizonyítás. Legyen $I = \mathcal{P}_\omega(\Sigma)$ (Σ véges részhalmazainak halmaza), és minden $i \in I$-re legyen $\mathcal{M}_i$ és w_i olyan, hogy $\mathcal{M}_i \models_{w_i} i$. $\varphi \in \Sigma$-ra legyen $X_\varphi = \{\, i \in I : \varphi \in i \,\}$; akkor $\{\, X_\varphi : \varphi \in \Sigma \,\}$ véges metszet tulajdonságú, mert $\{\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \,\} \in X_{\varphi_1} \cap \ldots \cap X_{\varphi_n}$, tehát van őt tartalmazó F ultrafilter I felett. $\prod \mathcal{M}_i/F \models_{w/F} \Sigma$, mert minden $\varphi \in \Sigma$-ra $\{\, i \in I : \mathcal{M}_i \models_{w_i} \varphi \,\} \supseteq X_\varphi \in F$. □

3.46. Állítás.

$$\prod_I \mathcal{F}_i/D \rightarrowtail {}^I\Big(\biguplus_I \mathcal{F}_i\Big)/D \quad \text{és} \quad \prod_I \mathcal{M}_i/D \rightarrowtail {}^I\Big(\biguplus_I \mathcal{M}_i\Big)/D$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}_i = \langle\, W_i, R_i \,\rangle$, $\mathcal{M}_i = \langle\, \mathcal{F}_i, v_i \,\rangle$, és legyen $\langle\, W, R\, v \rangle$ ($\langle\, W^+, R^+\, v^+ \rangle$) az ultraszorzat (ultrahatvány).

$s \in \prod_I W_i$-re jelölje $|s|$ az s $\prod_I W_i$-beli D-szerinti ekvivalencia-osztályát, azaz

$$|s| = \{\, t \in \prod_I W_i : \{\, i \in I : s_i = t_i \,\} \in D \,\}$$

és $s \in {}^I \biguplus_I W_i$-re

$$|s|_+ = \{\, t \in {}^I \biguplus_I W_i : \{\, i \in I : s_i = t_i \,\} \in D \,\}.$$

Az világos, hogy a W-beli $|s|$-hez a W^+-beli $|s|_+$-t rendelő f leképezés jóldefiniált és injektív. Az is világos, hogy az ultraszorzat frame f szerinti képe részmodellje az ultrahatvány frame-nek, hiszen $s, t \in \prod_I W_i$-re

$$|s| R |t| \iff \{\, i : s_i R_i t_i \,\} \in D \iff f(|s|) = |s|_+ R^+ |t|_+ = f(|t|).$$

Ha $s \in \prod_I W_i$, $t \in {}^I\big(\biguplus_I W_i\big)$ és $f(|s|) R^+ |t|_+$, akkor

$$\{\, i : t_i \in W_i \,\} \supseteq \{\, i : s_i R_i t_i \,\} \in D,$$

tehát van t-vel D-ekvivalens $t' \in \prod_I W_i$, és arra $|s| R |t'|$ és $f(|t'|) = |t|_+$. Végül, minden $s \in \prod_I W_i$-re

$$|s| \in v(p) \iff \{\, i : s_i \in v_i(p) \,\} \in D \iff f(|s|) = |s|_+ \in v^+(p).$$

□

3.47. Következmény. *Ha egy frame- vagy modellosztály zárt diszjunkt únióra, generált részre és ultrahatványra, akkor zárt ultraszorzatra is.*

3.48. Feladat. Ha $\mathsf{Fr}(\Sigma) = \{\, \mathcal{F} : \mathcal{F} \models \Sigma \,\}$ zárt elemi ekvivalenciára, akkor elemi.

3.48 Emlékeztető: K elemi iff zárt elemi ekvivalenciára és ultraszorzatra. Tehát az kéne, hogy $K = \mathsf{Fr}(\Sigma)$ zárt ultraszorzatra. 3.47 miatt (és mert K zárt diszjunkt únióra és generált részframe-ekre) elég azt megmutatni, hogy zárt ultrahatványra. Ez viszont következik a Łos lemmából és az elemi ekvivalenciára való zártságból.

3.49. Következmény. *Tegyük fel, hogy a Σ formulahalmaz minden véges része kielégíthető a K modellosztály valamely elemében. Akkor van olyan ultrahatványa K-beli modellek diszjunkt úniójának, amiben Σ kielégíthető.*

Bizonyítás. Következik 3.46-ból 3.45 és 3.15 miatt. □

Az elsőrendű logikával való kapcsolat egyik gyümölcse a következő

3.50. Tétel. *Minden modellnek van megszámlálhatóan szaturált ultrahatványa.*

Bizonyítás. Nehéz (megszámlálható nyelvekre nem, de az nekünk nem lesz elég). Ld. Chang-Keisler 6.1.4, 6.1.8. □

3.51. Állítás. *A megszámlálhatóan szaturált modellek m-szaturáltak.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{M}$ mint az állításban, és tegyük fel, hogy Σ minden véges részhalmaza kielégíthető w valamely szomszédjában. Akkor

$$(\mathcal{M}, w) \models \exists x R c_w x \wedge \bigwedge \{\, ST_x(\varphi) : \varphi \in \Delta \,\}$$

minden $\Delta \subseteq_\omega \Sigma$-ra; $\mathcal{M}$ megszámlálható szaturáltsága miatt tehát $Rc_w x \cup \{\, ST_x(\varphi) : \varphi \in \Sigma \,\}$ is kielégíthető $(\mathcal{M}, w)$-ben, azaz w-nek van olyan szomszédja, amelyben Σ igaz. □

3.52. Tétel (Goldblatt-Thomason). *Egy ultrahatványra zárt (tehát például elsőrendben definiálható) K frame-osztály pontosan akkor definiálható modálisan, ha zárt p-morf képekre, diszjunkt únióra, generált részframe-ekre és ha $\mathcal{F}^{ue} \in K \implies \mathcal{F} \in K$.*

Bizonyítás. A tétel egyik irányát már beláttuk (3.8, 3.13, 3.16 és 3.30). Fordítva, tegyük fel, hogy a K frame-osztály zárt p-morf képekre, diszjunkt únióra és generált részframe-ekre, K komplementere pedig ultrafilter-bővítésre. Azt állítjuk, hogy ha $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$-ben érvényes $\Lambda_K = \{\, \varphi \in Form_\Pi : K \models \varphi \,\}$, akkor $\mathcal{F} \in K$.

Először is, 3.17 és az első három zártsági feltevés miatt $\mathcal{F}$-ről feltehetjük, hogy egy a pont generálja. Legyen $\Pi' = \{\, p_A : A \subseteq W \,\}$, $v(p_A) = A$ minden $A \subseteq W$-re, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle$, és

$$\Sigma = \{\, \varphi \in Form_{\Pi'} : \mathcal{M} \models_a \varphi \,\}.$$

Σ minden véges részhalmaza kielégíthető K-ban (azaz minden $\Delta \subseteq_\omega \Sigma$-hoz létezik $\mathcal{G} \in K$, v' értékelés és s $\mathcal{G}$-beli világ, hogy $\langle \mathcal{G}, v' \rangle \models_s \Delta$), mert tegyük fel, hogy $\Delta \subseteq_\omega \Sigma$ nem, és legyen φ az $Form_\Pi$-beli formula, amit úgy kapunk $\bigwedge \Delta$-ból, hogy abban a Π'-beli atomi formulákat rendre Π-beliekre cseréljük. Akkor $K \models \neg\varphi$, és így $\mathcal{F} \models \neg\varphi$, noha világos, hogy van olyan v' kiértékelés, amire $\langle \mathcal{F}, v' \rangle \models_w \varphi$.

3.49 és K ultrahatványra és diszjunkt únióra való zártsága miatt tehát van olyan $\mathcal{G}_0 \in K$, v_0 kiértékelés és b világ, hogy $\langle \mathcal{G}_0, v_0 \rangle \models_s \Sigma$. Feltehetjük, hogy $\mathcal{G}_0$-t b generálja 3.15 és K generált részframe-ekre való zártsága miatt.

Legyen $\mathcal{N} = \langle \mathcal{G}, v' \rangle$ (ahol $\mathcal{G} = \langle S, Q \rangle$) a $\langle \mathcal{G}_0, v_0 \rangle$ egy megszámlálhatóan szaturált ultrahatványa (3.50) . Akkor $\mathcal{G} \in K$ és $\mathcal{N}$ m-szaturált 3.51 miatt.

Ezzel elérkeztünk az utolsó (és legnehezebb) lépéshez: azt fogjuk megmutatni, hogy $\mathcal{F}^{ue}$ p-morf képe $\mathcal{G}$-nek. Ezzel kész is leszünk, hiszen K zárt p-morf képre, K komplementere pedig ultrafilter-bővítésre.

Legyen $f(s) = \{ A \subseteq W : \mathcal{N} \models_s p_A \}$. Azt fogjuk belátni, hogy $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}^{ue}$ szürjektív p-morfizmus.

Először persze azt kellene tisztázni, hogy f valóban W feletti ultrafilterekbe képez. Ha tudnánk, hogy

(1) $$\text{minden } \varphi \in Form_{\Pi'}\text{-re } \mathcal{N} \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi$$

akkor könnyű dolgunk lenne, mert akkor

- $f(s)$ zárt felfelé: ha $B \supseteq A \in f(s)$, akkor $\mathcal{N} \models_s p_A$ és $\mathcal{M} \models p_A \to p_B$, (1) miatt tehát $\mathcal{N} \models_s p_B$, azaz $B \in f(s)$
- $f(s)$ zárt metszetre: ha $A, B \in f(s)$, akkor $\mathcal{N} \models_s p_A \wedge p_B$ és $\mathcal{M} \models p_A \wedge p_B \leftrightarrow p_{A\cap B}$, (1) miatt tehát $\mathcal{N} \models_s p_{A\cap B}$, azaz $A \cap B \in f(s)$
- minden $A \subseteq W$-re, ha $A \notin f(s)$, akkor $W \setminus A \in f(s)$: (1) miatt ui. $\mathcal{N} \models_s \neg p_A \to p_{W\setminus A}$.

Ez már elég motiváció arra, hogy belássuk (1)-et. Legyen tehát $\varphi \in Form_{\Pi'}$.

$$\begin{array}{rlr}
\mathcal{M} \models \varphi & \iff (\forall n \in \mathbb{N})\mathcal{M} \models_a \Box^n \varphi & 3.18 \\
& \iff (\forall n \in \mathbb{N})\, \Box^n \varphi \in \Sigma & \Sigma \text{ definíciója} \\
& \iff (\forall n \in \mathbb{N})\langle \mathcal{G}_0, v_0 \rangle \models_b \Box^n \varphi & \langle G_0, v_0 \rangle \models_b \Sigma \\
& \iff \langle \mathcal{G}_0, v_0 \rangle \models \varphi & 3.18 \\
& \iff \mathcal{N} \models \varphi & 3.44
\end{array}$$

Mivel $\mathcal{N}$ és $\mathcal{M}^{ue}$ is m-szaturált (utóbbi 3.39 miatt), f p-morf voltának belátásához 3.41 szerint elég megmutatnunk, hogy

(2) $$\langle s, u \rangle \in f \iff (\forall \varphi \in Form_{\Pi'})[\mathcal{N} \models_s \varphi \iff \mathcal{M}^{ue} \models_u \varphi]$$

($\Leftarrow$) könnyű, mert ha az $\langle s, u \rangle$ párra teljesül a feltétel, akkor speciel minden $A \subseteq W$-re $\mathcal{N} \models_s p_A \iff v(p_A) \in u$, azaz $f(s) = u$.

($\Rightarrow$) Természetesen elég az $\mathcal{M}^{ue} \models_{f(s)} \varphi \implies \mathcal{N} \models_s \varphi$ implikációt belátni. Tegyük fel, hogy $\mathcal{M}^{ue} \models_{f(s)} \varphi$; 3.28 miatt ez azt jelenti, hogy $A = \{ w \in W : \mathcal{M} \models_w \varphi \} \in f(s)$. $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow p_A$, (1) miatt tehát $\mathcal{N} \models \varphi \leftrightarrow p_A$. Következésképp

$$\mathcal{N} \models_s \varphi \iff \mathcal{N} \models_s p_A \iff A \in f(s)$$

erről pedig már láttuk, hogy igaz. Ezzel(2) bizonyítása teljes.

Már csak f szürjektivitásának bizonyítása maradt hátra. Legyen u W feletti ultrafilter. Olyan $s \in S$ világot kellene találnunk, amire

$$\mathcal{N} \models_s p_A \iff A \in u$$

minden $A \subseteq W$-re. $\Gamma(x) = \{ ST_x(p_A) : A \in u \}$ minden véges része kielégíthető $\mathcal{N}$-ben, mert ha $A_1, \ldots, A_n \in u$ és $A = \cap_1^n A_i$ (következésképp $\mathcal{M}$-ben, és így (1) miatt $\mathcal{N}$-ben is igaz $p_A \leftrightarrow \bigwedge_1^n p_{A_i}$), akkor $\mathcal{M} \not\models \neg p_A$, (1) miatt tehát $\mathcal{N} \not\models \neg p_A$, azaz van olyan $\mathcal{N}$-beli t világ, amire $\mathcal{N} \models_t p_A$, azaz $\langle \mathcal{N}, t \rangle \models \bigwedge_1^n ST_x(p_{A_i})$. $\mathcal{N}$ megszámlálható szaturáltsága (valójában már kompaktsága, azaz „1-szaturáltsága”) miatt tehát van olyan s világ, ami $\mathcal{N}$-ben kielégíti $\Gamma(x)$-et. Erre az s-re tehát $A \in u \implies \mathcal{N} \models_s p_A$, azaz $u \subseteq f(s)$; de mindketten ultrafilterek, tehát ebből $u = f(s)$ is következik. $\square$

3.53. Feladat. Ha a K frame-osztály zárt p-morf képekre, diszjunkt únióra, generált részframe-ekre és ultrafilter-bővítésre, és K komplementere zárt pont-generált részframe-ekre és ultrafilter-bővítésre, akkor K modálisan definiálható.

4. TELJESSÉG

4.1. Definíció (Normális modális logika)**.** $\Lambda \subseteq$ *Form normális modális logika* ha az alábbi feltételek teljesülnek:

(i) Λ tartalmazza az összes kijelentéslogikai tautológiát
(ii) Λ zárt helyettesítésre
(iii) Λ zárt modus ponens-re
(iv) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \in \Lambda$
(v) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \in \Lambda$
(vi) $\varphi \in \Lambda \implies \Box\varphi \in \Lambda$

„Normális modális logika” helyett általában egyszerűen „logikát” mondunk.

4.2. Példák.

(i) $\Lambda = Form$ (az inkonzisztens logika)
(ii) $\Lambda_F = \{\, \varphi \in Form : F \models \varphi \,\}$, ahol F frame-ek egy osztálya
(iii) $\{\, \varphi \in Form : \mathcal{M} \models \varphi \,\}$ általában *nem* logika, mert nem zárt helyettesítésre ($\mathcal{M} \models p \not\Rightarrow \mathcal{M} \models q$)
(iv) Normális modális logikák metszete is az.

Az első és utolsó példa miatt minden $\Gamma \subseteq Form$-hoz van legszűkebb, Γ-t tartalmazó logika (ez a Γ által axiomatizált logika, amit néha $\mathsf{K} \oplus \Gamma$-val fogunk jelölni). Az $\emptyset$ által axiomatizált logika neve: K.

4.3. Definíció (Levezethetőség)**.** $\vdash_\Lambda \varphi \iff \varphi \in \Lambda$ és

$$\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \iff (\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma) \vdash_\Lambda \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi.$$

Speciálisan: $\emptyset \vdash_\Lambda \varphi \iff \vdash_\Lambda \varphi$, mert $n = 0$-ra a jobboldalon $\vdash_\Lambda \top \to \varphi$ áll (az „üres konjunkció”-t $\top$-ként szokás (és érdemes) definiálni), de $\top \to \varphi$ ekvivalens φ-vel. Kicsit részletesebben:

4.4. Állítás. $\vdash_\Lambda \top \to \varphi \iff \vdash_\Lambda \varphi$

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) 4.1(i) miatt $\top \in \Lambda$, és így a feltevés és 4.1(iii) miatt $\varphi \in \Lambda$
($\Leftarrow$) 4.1(i) miatt $\varphi \to (\top \to \varphi) \in \Lambda$, és így a feltevés és 4.1(iii) miatt $\top \to \varphi \in \Lambda$. $\Box$

Ha $\Gamma \subseteq Form$-ra $\bigwedge\Gamma$-val jelöljük a Γ elemeiből képzett véges konjunkciókat (beleértve az üres konjunkciót is), azaz $\bigwedge\Gamma = \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n : n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma\}$, akkor $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \iff (\exists \psi \in \bigwedge\Gamma) \vdash_\Lambda \psi \to \varphi$.

Az alábbiakban tautológia alatt nem csak a kijelentéslogikai tautológiákat, hanem ezek tetszőleges instanciáit is értjük; tehát például $\Diamond q \vee \neg\Diamond q$-t, ami nem kijelentéslogikai formula, tehát kijelentéslogikai tautológia sem lehet, de egy ilyen, nevezetesen $p \vee \neg p$ egy instanciája. 4.1(i),(ii) miatt ezeket a tágabb értelemben vett tautológiákat is tartalmazza minden normális modális logika.

4.5. Állítás.

(i) $\emptyset \vdash_\Lambda \varphi \iff \vdash_\Lambda \varphi$
(ii) *Ha* $\Sigma \subseteq \Gamma$ *és* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$, *akkor* $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$.
(iii) $\varphi \in \Lambda \implies \Sigma \vdash_\Lambda \varphi$
(iv) $\varphi \in \Sigma \implies \Sigma \vdash_\Lambda \varphi$

(v) *Ha* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \to \psi$ *és* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$*, akkor* $\Sigma \vdash_\Lambda \psi$*.*

(vi) *Ha* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$ *és* $\Sigma \vdash_\Lambda \psi$*, akkor* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \wedge \psi$*.*

(vii) *Ha* $\vdash_\Lambda \sigma \to \varphi$ *és* $\vdash_\Lambda \delta \to \sigma$*, akkor* $\vdash_\Lambda \delta \to \varphi$*; speciálisan:*

(viii) *ha* $\vdash_\Lambda \sigma \to \varphi$*, akkor* $\vdash_\Lambda \sigma \wedge \sigma' \to \varphi$*.*

(ix) *Ha* $\varphi \leftrightarrow \psi$ *tautológia, akkor* $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$ *pontosan akkor áll, ha* $\Sigma \vdash_\Lambda \psi$*.*

Bizonyítás. (i) Ld. a megjegyzést a levezethetőség definíciójának végén.

(ii): 4.3 triviális következménye.

(iii): (i) és (ii)

(iv): $\vdash_\Lambda \varphi \to \varphi$ (mert tautológia), tehát $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$ 4.3 szerint.

(v): A feltételek miatt $\vdash_\Lambda \sigma_1 \to (\varphi \to \psi)$ és $\vdash_\Lambda \sigma_2 \to \varphi$, ahol $i = 1$, 2-re $\sigma_i \in \bigwedge \Sigma$. $\vdash_\Lambda [\sigma_1 \to (\varphi \to \psi)] \to \big[(\sigma_2 \to \varphi) \to (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \to \psi)\big]$ (tautológia), és ezekből modus ponens kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy $\vdash_\Lambda \sigma_1 \wedge \sigma_2 \to \psi$, amiből meg már következik $\Sigma \vdash_\Lambda \psi$.

(vi) $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ (iii) miatt, és ebből (v) kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \wedge \psi$.

(vii): $\vdash_\Lambda (\delta \to \sigma) \to \big[(\sigma \to \varphi) \to (\delta \to \varphi)\big]$ mert tautológia, és a két feltétel és modus ponens kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy $\vdash_\Lambda \delta \to \varphi$.

(ix): Elég belátni, hogy ha $\varphi \to \psi$ tautológia és $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$, akkor $\Sigma \vdash_\Lambda \psi$; és ez igaz, mert 4.1(i) és (iii) miatt $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \to \psi$, és így (v) miatt $\Sigma \vdash_\Lambda \psi$.

□

4.6. Állítás (Dedukció-tétel). $\Sigma \cup \{\delta\} \vdash_\Lambda \varphi \iff \Sigma \vdash_\Lambda \delta \to \varphi$.

Bizonyítás.

$$\Sigma \cup \{\delta\} \vdash_\Lambda \varphi \overset{4.3,4.5(viii)}{\iff} (\exists \sigma \in \bigwedge \Sigma) \vdash_\Lambda \sigma \wedge \delta \to \varphi$$
$$\iff (\exists \sigma \in \bigwedge \Sigma) \vdash_\Lambda \sigma \to (\delta \to \varphi) \overset{4.3}{\iff} \Sigma \vdash_\Lambda \delta \to \varphi$$

ahol a középső ekvivalencia 4.5(ix) miatt áll, hiszen $(\sigma \wedge \delta \to \varphi) \leftrightarrow \big[\sigma \to (\delta \to \varphi)\big]$ tautológia. □

4.7. Állítás.

(i) *Ha* $\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$*, akkor* $\vdash_\Lambda \Box\varphi \to \Box\psi$

(ii) *Ha* $\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$*, akkor* $\vdash_\Lambda \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$

(iii) $\vdash_\Lambda \Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$

Bizonyítás. (i):

(1)	$\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$	feltevés
(2)	$\vdash_\Lambda \Box(\varphi \to \psi)$	(1), 4.1(vi)
(3)	$\vdash_\Lambda \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	4.1(v)
(4)	$\vdash_\Lambda \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	(3), 4.1(ii)
(5)	$\vdash_\Lambda \Box\varphi \to \Box\psi$	(2),(4), 4.1(iii)

(ii):

(1)	$\vdash_\Lambda \varphi \to \psi$	feltevés
(2)	$\vdash_\Lambda (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	4.1(i)
(3)	$\vdash_\Lambda \neg\psi \to \neg\varphi$	(1),(2),4.1(iii)
(4)	$\vdash_\Lambda \Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi$	(3), (i)
(5)	$\vdash_\Lambda \neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi$	(4)-ből, mint az imént
(6)	$\vdash_\Lambda (p \leftrightarrow p') \to [(q \leftrightarrow q') \to ((p \to q) \to (p' \to q'))]$	4.1(i)
(7)	$\vdash_\Lambda (\neg\Box\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi) \to [(\neg\Box\neg\psi \leftrightarrow \Diamond\psi) \to ((\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi))]$	(6), 4.1(ii)
(8)	$\vdash_\Lambda (\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$	(7), 4.1(iv),4.1(ii), 4.1(iii) kétszer
(9)	$\vdash_\Lambda \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$	(5), (8), 4.1(iii)

(iii):

(1)	$\vdash_\Lambda \varphi \wedge \psi \to \varphi$	4.1(i)
(2)	$\vdash_\Lambda \Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi$	(1), (ii)
(3)	$\vdash_\Lambda \varphi \wedge \psi \to \psi$	4.1(i)
(4)	$\vdash_\Lambda \Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\psi$	(3), (ii)
(5)	$\vdash_\Lambda (p \to q) \to [(p \to r) \to (p \to q \wedge r)]$	4.1(i)
(6)	$\vdash_\Lambda (\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi) \to [(\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\psi) \to (\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)]$	(5), 4.1(ii)
(7)	$\vdash_\Lambda \Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$	(6),(2),(4), 4.1(iii) kétszer

□

4.8. Feladat. $\vdash_\Lambda \Box\top$

4.9. Feladat. $\vdash_\Lambda \Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

4.10. Definíció. Σ Λ-*konzisztens* ha $\Sigma \nvdash_\Lambda \bot$, és *maximálisan* Λ-*konzisztens* ha Λ-konzisztens és nincs Λ-konzisztens valódi bővítése.

$$MC^\Lambda_\Pi = \{\, \Sigma \subseteq Form_\Pi : \Sigma \text{ maximálisan } \Lambda\text{-konzisztens} \,\}$$

Amikor csak tehetjük, $\vdash_\Lambda$ helyett a továbbiakban $\vdash$-t, „Λ-konzisztens” helyett „konzisztens”-t írunk.

4.11. Állítás. (i) $\Sigma \vdash \neg\varphi$ *pontosan akkor, ha* $\Sigma \cup \{\, \varphi \,\}$ *inkonzisztens.*
(ii) $\Sigma \vdash \varphi$ *pontosan akkor, ha* $\Sigma \cup \{\, \neg\varphi \,\}$ *inkonzisztens.*

Bizonyítás. Az első igaz, mert

$$\Sigma \vdash_\Lambda \neg\varphi \overset{4.5(ix)}{\iff} \Sigma \vdash_\Lambda \varphi \to \bot \overset{4.6}{\iff} \Sigma \cup \{\, \varphi \,\} \vdash_\Lambda \bot,$$

a második pedig az elsőből következik, mert

$$\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \overset{4.5(ix)}{\iff} \Sigma \vdash_\Lambda \neg\neg\varphi \overset{(i)}{\iff} \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ inkonzisztens.}$$

□

4.12. Állítás. *Σ pontosan akkor maximálisan konzisztens, ha konzisztens és minden φ-re $\varphi \in \Sigma$ vagy $\neg\varphi \in \Sigma$.*

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Ha $\varphi \notin \Sigma$, akkor Σ maximalitása miatt $\Sigma \cup \{\varphi\}$ inkonzisztens, így 4.11(i) miatt $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Hasonlóan, ha $\neg\varphi \notin \Sigma$, akkor $\Sigma \vdash \varphi$. Ezért 4.5(vi) miatt ha $\varphi, \neg\varphi \notin \Sigma$, akkor $\Sigma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$, és így 4.5(ix) miatt $\Sigma \vdash \bot$, ellentmondva Σ konzisztenciájának.

($\Leftarrow$) Elég azt megmutatni, hogy $\Sigma^+ \supset \Sigma$-ból Σ^+ inkonzisztenciája következik. De ez igaz, hiszen ha $\varphi \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$, akkor a feltevés miatt $\neg\varphi \in \Sigma$, és így $\varphi, \neg\varphi \in \Sigma^+$, és így 4.5(iv) miatt $\Sigma^+ \vdash \varphi$ és $\Sigma^+ \vdash \neg\varphi$, amiből a fentihez hasonló módon következik, hogy Σ^+ inkonzisztens. □

4.13. Állítás. *Ha Σ maximálisan konzisztens, akkor $\Sigma \vdash \varphi \iff \varphi \in \Sigma$.*

Bizonyítás. A ($\Leftarrow$) irány 4.5(iv), a másik pedig 4.12 következménye, mert

$$\varphi \notin \Sigma \implies \neg\varphi \in \Sigma \implies \Sigma \vdash \neg\varphi \implies \Sigma \nvdash \varphi$$

különben 4.5(vi) miatt $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, és így 4.5(ix) miatt $\Sigma \vdash \bot$, ellentmondva Σ konzisztenciájának. □

4.14. Állítás. *Ha Σ maximálisan konzisztens, akkor $\varphi \in \Sigma$ & $\psi \in \Sigma \iff \varphi \wedge \psi \in \Sigma$.*

Bizonyítás. 4.13 miatt elég belátni, hogy

$$\Sigma \vdash_\Lambda \varphi \;\&\; \Sigma \vdash_\Lambda \psi \iff \Sigma \vdash_\Lambda \varphi \wedge \psi$$

A balról jobbra irány 4.5(vi), másik meg 4.5(iii) és 4.5(v) miatt igaz. □

4.15. Állítás. *Ha $\mathcal{M} \models \Lambda$, akkor $\mathcal{M}$ minden w világára $\{\varphi : \mathcal{M} \models_w \varphi\} \in MC^\Lambda$.*

Bizonyítás. Legyen w az $\mathcal{M}$ tetszőleges világa és $\Sigma = \{\varphi : \mathcal{M} \models_w \varphi\}$. 4.12 miatt elég belátni, hogy Σ konzisztens. Mivel $\wedge$ igazságfeltétele miatt Σ zárt $\wedge$-re, ha inkonzisztens, akkor valamilyen $\sigma \in \Sigma$-ra $\sigma \to \bot \in \Lambda$, és így (4.1(i),(iii) miatt) $\neg\sigma \in \Lambda$; de akkor $\neg$ igazságfeltétele miatt $\neg\sigma \in \Lambda \setminus \Sigma$, ellentmondva az $\mathcal{M} \models \Lambda$ feltevésnek. □

4.16. Definíció. Legyen F egy frame- vagy modell-osztály. Λ *helyes* (*gyengén teljes*) F-re nézve, ha $\Lambda \subseteq \Lambda_F$ ($\Lambda_F \subseteq \Lambda$). Λ *erősen teljes* F-re nézve, ha minden Λ-konzisztens formulahalmaz kielégíthető egy F-beli struktúrán. Λ-t *jellemzi* (vagy *meghatározza*) F, ha Λ helyes és teljes F-re nézve (azaz $\Lambda = \Lambda_F$). Λ *teljes*, ha van olyan F frame-osztály ami jellemzi.

4.17. Állítás. *Ha Λ erősen teljes az F frame- vagy modell-osztályra nézve, akkor gyengén teljes is rá nézve.*

Bizonyítás. $\Lambda_F \subseteq \Lambda$, mert

$$\varphi \in \Lambda_F \implies \{\neg\varphi\} \text{ kielégíthetetlen } F\text{-en} \implies \{\neg\varphi\}\ \Lambda\text{-inkonzisztens}$$
$$\implies \vdash_\Lambda \neg\varphi \to \bot \implies \vdash_\Lambda \varphi \implies \varphi \in \Lambda.$$

□

4.18. Feladat. Λ pontosan akkor gyengén teljes F-re nézve ha minden Λ-konzisztens formula kielégíthető egy F-beli struktúrán.

4.19. Állítás. *Λ helyes $\mathsf{Fr}(\Lambda) = \{\, \mathcal{F} : \mathcal{F} \models \Lambda \,\}$-ra nézve.*

Bizonyítás. $\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathsf{Fr}(\Lambda)}$, mert $\varphi \in \Lambda \implies \mathsf{Fr}(\Lambda) \models \varphi \iff \varphi \in \Lambda_{\mathsf{Fr}(\Lambda)}$, ahol az első implikáció $\mathsf{Fr}(\Lambda)$ definíciója, az ekvivalencia pedig egy frame-osztály logikájának definíciója (4.2(ii)) miatt igaz. $\square$

4.20. Állítás. *K helyes az összes frame osztályára nézve.*

Bizonyítás. K, mint a legszűkebb normális modális logika, természetesen része Λ_F-nek is, ahol F az összes frame osztálya. $\square$

4.21. Állítás. *Ha Γ érvényes az F frame-osztályban, akkor $\mathsf{K} \oplus \Gamma$ helyes F-re nézve.*

Bizonyítás. Λ_F logika (4.2(ii)), és a feltevés szerint $\Gamma \subseteq \Lambda_F$; tehát $\oplus$ definíciója miatt $\mathsf{K} \oplus \Gamma \subseteq \Lambda_F$. $\square$

4.22. Definíció (Kanonikus frame és modell)**.** Legyen $\Sigma, \Delta \in MC^{\Lambda}_{\Pi}$-re legyen

$$\Sigma R^{\Lambda} \Delta \iff (\forall \varphi \in \Delta) \Diamond \varphi \in \Sigma$$

és

$$v^{\Lambda}(p) = \{\, \Sigma \in MC^{\Lambda}_{\Pi} : p \in \Sigma \,\}$$

minden $p \in \Pi$-re.

Λ *kanonikus frame*-je $\mathcal{F}^{\Lambda} = \langle MC^{\Lambda}_{\Pi}, R^{\Lambda} \rangle$, *kanonikus modellje* pedig $\mathcal{M}^{\Lambda} = \langle \mathcal{F}^{\Lambda}, v^{\Lambda} \rangle$.

4.23. Feladat. $\Sigma R^{\Lambda} \Delta \iff (\forall \varphi)(\Box \varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Delta)$

4.24. Állítás (Lindenbaum lemma)**.** *Minden konzisztens formulahalmazt tartalmaz egy maximálisan konzisztens formulahalmaz.*

Bizonyítás. Ha Π legfeljebb megszámlálható (és így $Form_{\Pi}$ megszámlálható), akkor $Form_{\Pi}$ elemeit felsoroljuk: $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$. Legyen Δ_0 a kibővítendő konzisztens formulahalmaz. Ha $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_n$ konzisztens, akkor $\Delta_n \cup \{\, \varphi_n \,\}$ és $\Delta_n \cup \{\, \neg\varphi_n \,\}$ valamelyike konzisztens 4.11 miatt; legyen ez a Δ_{n+1}.

$\Delta = \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n$ konzisztens, mert minden véges része (része valamelyik Δ_n-nek és így) konzisztens. Maximálisan konzisztens, mert minden n-re φ_n és $\neg\varphi_n$ valamelyike $\in \Delta$; és persze $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

A következő bizonyításvázlat Π számosságától függetlenül működik: $Form_{\Pi}$-t mint algebrát (elemek: formulák, műveletek: a logikai konnektívumok) a Λ szerinti ekvivalenciával faktorizálva (4.1 első három pontja miatt) Boole-algebrát (egy extra művelettel) kapunk. A konzisztens formulahalmazok természetes homomorfizmus szerinti képei a véges metszet tulajdonságú halmazok, a maximálisan konzisztenseké pedig az ultrafilterek. Tehát az állítás következik abból, hogy minden Boole algebrában minden véges metszet tulajdonságú halmazt tartalmaz egy ultrafilter. $\square$

4.25. Állítás. *Ha $\Diamond \varphi \in \Sigma \in MC^{\Lambda}$, akkor van olyan $\Delta \in MC^{\Lambda}$, hogy $\varphi \in \Delta$ és $\Sigma \mathcal{R}^{\Lambda} \Delta$.*

Bizonyítás. 4.23 miatt olyan MC^Λ-ra van szükségünk, ami tartalmazza a
$$\Delta_0 = \{\,\varphi\,\} \cup \{\,\sigma : \Box\sigma \in \Sigma\,\}$$
formulahalmazt. 4.24 miatt ehhez elég belátnunk, hogy Δ_0 konzisztens. Tegyük fel, hogy nem az. Akkor 4.11 miatt van olyan $\Box\sigma_1, \dots, \Box\sigma_n \in \Sigma$, hogy $\vdash_\Lambda \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \to \neg\varphi$, 4.7(i) miatt tehát $\vdash_\Lambda \Box(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \to \Box\neg\varphi$ és így 4.9 miatt $\vdash_\Lambda \Box\sigma_1 \wedge \dots \wedge \Box\sigma_n \to \Box\neg\varphi$. Vagyis azt kaptuk, hogy $\Sigma \vdash_\Lambda \neg\Diamond\varphi$, ami ellentmond Σ konzisztenciájának. □

4.26. Tétel (Igazság-lemma). $\mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \varphi \iff \varphi \in \Sigma$.

Bizonyítás. Indukció φ felépítésére. Ha atomi, akkor az állítás v^Λ definíciója miatt igaz. A Boole-konnektívumokra öröklődik, mert
$$\mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \neg\varphi \iff \mathcal{M}^\Lambda \not\models_\Sigma \varphi \iff \varphi \notin \Sigma \iff \neg\varphi \in \Sigma$$
az indukciós feltevés és 4.12 miatt, és
$$\mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \varphi \;\&\; \mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \psi \iff \varphi \in \Sigma \;\&\; \psi \in \Sigma \iff \varphi \wedge \psi \in \Sigma$$
az indukciós feltevés és 4.14 miatt.

Végül:
$$\mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \Diamond\varphi \iff \exists\Delta(\Sigma R^\Lambda \Delta \;\&\; \mathcal{M}^\Lambda \models_\Delta \varphi) \iff \exists\Delta(\Sigma R^\Lambda \Delta \;\&\; \varphi \in \Delta) \iff \Diamond\varphi \in \Sigma$$
ahol a második ekvivalencia az indukciós feltevés, az utolsó ekvivalencia $\Rightarrow$ iránya R^Λ definíciója, $\Leftarrow$ iránya pedig 4.25 miatt igaz. □

4.27. Következmény. $\mathcal{M}^\Lambda \models \varphi \iff \varphi \in \Lambda$. *Speciálisan:* $\mathcal{M}^\Lambda \models \Lambda$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Ha $\varphi \notin \Lambda$, akkor 4.11(ii) és 4.5(i) miatt $\{\,\neg\varphi\,\}$ Λ-konzisztens, tehát létezik őt tartalmazó $\Sigma \in MC^\Lambda$, és arra $\mathcal{M}^\Lambda \not\models_\Sigma \varphi$. ($\Leftarrow$) 4.5(iii) és 4.13 miatt Λ része minden maximálisan konzisztens formulahalmaznak. □

Azt kaptuk tehát, hogy minden Λ-konzisztens formulahalmaz kielégíthető egy olyan modellen, amiben Λ érvényes, másszóval minden normális modális logika erősen teljes az $\{\,\mathcal{M}^\Lambda\,\}$ modellosztályra nézve. Ez azonban nem túl izgalmas eredmény.

Az első valódinak nevezhető teljességi tételünk a következő:

4.28. Tétel. K *helyes és erősen teljes az összes frame osztályára nézve.*

Bizonyítás. 4.20-ban már beláttuk a helyességet. Az erős teljességhez az kéne, hogy minden K-konzisztens formulahalmaz kielégíthető egy frame-en. Ez viszont igaz, mert 4.24 és 4.26 szerint kielégíthető $\mathcal{F}^\mathsf{K}$-n. □

A következő példán már jobban látszik az ilyesféle teljességi bizonyítások szerkezete. Nevezetesen, hogy Λ-nak az F frame-osztályra vonatkozó erős teljességét $\mathcal{F}^\Lambda \in F$ megmutatásával látjuk be. Az előző tételben F az összes frame, tehát semmi dolgunk nem volt.

4.29. Tétel. $\Lambda = \mathsf{K} \oplus \Box p \to p$ *helyes és erősen teljes a reflexív frame-ek osztályára nézve.*

Bizonyítás. A helyesség következik 3.2 és 4.21-ből. Az erős teljességhez 4.26 miatt elég belátni, hogy $\mathcal{F}^\Lambda$ reflexív, azaz 4.23 miatt azt, hogy minden $\Sigma \in MC^\Lambda_\Pi$-re és $\varphi \in Form_\Pi$-re $\Box\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Sigma$. Ez viszont igaz, mert $\Box p \to p \in \Lambda$ és 4.1(ii) miatt $\Box\varphi \to \varphi \in \Lambda \subseteq \Sigma$, tehát $\Box\varphi \in \Sigma$-ból 4.5(v) és Σ maximalitása miatt $\varphi \in \Sigma$ következik. □

4.30. Lemma. (i) $\Box p \to p \in \Lambda \iff \mathcal{F}^\Lambda$ *reflexív*

(ii) $\Box p \to \Box\Box p \in \Lambda \iff \mathcal{F}^\Lambda$ *tranzitív*

(iii) $p \to \Box\Diamond p \in \Lambda \iff \mathcal{F}^\Lambda$ *szimmetrikus*

(iv) $\Diamond p \to \Box\Diamond p \in \Lambda \iff \mathcal{F}^\Lambda$ *euklideszi* $(wR^\Lambda s \ \& \ wR^\Lambda t \implies sR^\Lambda t)$

Bizonyítás. Az állításoknak csak a $\implies$ irányát bizonyítjuk, mert a másik minden esetben következik 3.2 és 4.27-ból. Például:

$$\mathcal{F}^\Lambda \text{ reflexív} \overset{3.2}{\implies} \mathcal{F}^\Lambda \models \Box p \to p \implies \mathcal{M}^\Lambda \models \Box p \to p \overset{4.27}{\implies} \Box p \to p \in \Lambda.$$

(ii) Kell: $\Sigma R^\Lambda \Delta R^\Lambda \Gamma \implies \Sigma R^\Lambda \Gamma$ (azaz ha minden $\varphi \in Form$-ra $\Box\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Delta$ és $\Box\varphi \in \Delta \implies \varphi \in \Gamma$, akkor minden $\varphi \in Form$-ra $\Box\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Gamma$) minden $\Sigma, \Delta, \Gamma \in MC^\Lambda$-ra. De ez igaz, hiszen $\Box p \to \Box\Box p \in \Lambda$ és 4.1(ii) miatt $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi \in \Lambda \subseteq \Sigma$, tehát $\Box\varphi \in \Sigma$-ból Σ maximalitása miatt $\Box\Box\varphi \in \Sigma$, amiből meg a feltevések miatt $\Box\varphi \in \Delta$ és így $\varphi \in \Gamma$ következik.

(iii) Kell: $\Sigma R^\Lambda \Delta \implies \Delta R^\Lambda \Sigma$ (azaz ha $\Box\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Delta$ minden $\varphi \in Form$-ra akkor $\varphi \in \Sigma \implies \Diamond\varphi \in \Delta$ minden $\varphi \in Form$-ra) minden $\Sigma, \Delta \in MC^\Lambda$-ra. De ez igaz, hiszen $p \to \Box\Diamond p \in \Lambda$ és 4.1(ii) miatt $\varphi \to \Box\Diamond\varphi \in \Lambda \subseteq \Sigma$, tehát $\varphi \in \Sigma$-ból Σ maximalitása miatt $\Box\Diamond\varphi \in \Sigma$, amiből meg a feltevés miatt $\Diamond\varphi \in \Delta$ következik.

(iv) Kell: $\Sigma R^\Lambda \Delta \ \& \ \Sigma R^\Lambda \Gamma \implies \Delta R^\Lambda \Gamma$ (azaz ha $\Box\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Delta$ és $\varphi \in \Gamma \implies \Diamond\varphi \in \Sigma$ minden $\varphi \in Form$-ra akkor $\varphi \in \Gamma \implies \Diamond\varphi \in \Delta$ minden $\varphi \in Form$-ra) minden $\Sigma, \Delta, \Gamma \in MC^\Lambda$-ra. De ez igaz, hiszen $\Sigma R^\Lambda \Gamma$ miatt $\varphi \in \Gamma$-ból $\Diamond\varphi \in \Sigma$, amiből $\Diamond p \to \Box\Diamond p \in \Lambda$, 4.1(ii) és Σ maximalitása miatt $\Box\Diamond\varphi \in \Sigma$, és ebből $\Sigma R^\Lambda \Delta$ miatt $\Diamond\varphi \in \Delta$ következik.

$\Box$

4.31. Következmény. *Legyen Γ a lemmabeli formulák egy részhalmaza. Akkor $\Lambda = \mathsf{K} \oplus \Gamma$ helyes és erősen teljes a Γ-beli formuláknak megfelelő tulajdonságokkal rendelkező frame-ek F osztályára nézve. Speciálisan:*

(i) $\Lambda = \mathsf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$ *helyes és erősen teljes a tranzitív frame-ek osztályára nézve.*

(ii) $S4 = \mathsf{K} \oplus \{\Box p \to \Box\Box p, \Box p \to p\}$ *helyes és erősen teljes a reflexív, tranzitív frame-ek osztályára nézve.*

(iii) $S5 = S4 \oplus p \to \Box\Diamond p$ *helyes és erősen teljes a reflexív, tranzitív, szimmetrikus frame-ek (azaz az ekvivalencia-relációk) osztályára nézve.*

Bizonyítás. A helyesség 3.2 és 4.21-ből következik, a teljesség meg mert ha Γ Λ-konzisztens, akkor 4.26 miatt $\mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \Gamma$, ahol Γ része egy, a 4.24 miatt létező $\Sigma \in MC^\Lambda$-nak, azaz Γ kielégíthető, mégpedig a lemma miatt egy F-beli frame-en. $\Box$

4.32. Tétel. $\Lambda = \mathsf{K} \oplus \Box\Box p \to \Box p$ *helyes és erősen teljes a sűrű frame-ek osztályára nézve.*

Bizonyítás. A helyesség következik 3.2 és 4.21-ből. Azt kellene megmutatnunk, hogy $\mathcal{R}^\Lambda$ sűrű, azaz ha $\Sigma\mathcal{R}^\Lambda\Delta$, akkor van olyan $\Gamma \in MC^\Lambda$, hogy $\Sigma\mathcal{R}^\Lambda\Gamma\mathcal{R}^\Lambda\Delta$, azaz olyan $\Gamma \in MC^\Lambda$, amire

$$(\forall\varphi)(\Box\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Gamma) \quad \text{és} \quad (\forall\varphi \in \Delta)\,\Diamond\varphi \in \Gamma$$

4.24 miatt ehhez elég tehát belátni, hogy

$$\Gamma_0 = \{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\} \cup \{\Diamond\varphi : \varphi \in \Delta\}$$

konzisztens. Tegyük fel, hogy nem. Akkor, mivel 4.9 miatt $\{\varphi : \Box\varphi \in \Sigma\}$ zárt $\wedge$-re, van olyan $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$ és $\Box\sigma \in \Sigma$, hogy

$$\vdash_\Lambda \Diamond\delta_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\delta_n \to \neg\sigma$$

amiből 4.7(iii) $\Diamond(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \to \Diamond\delta_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\delta_n$ instanciája és 4.5(vii)miatt

$$\vdash_\Lambda \Diamond(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \to \neg\sigma$$

amiből meg 4.7(ii) miatt

$$(*) \qquad \vdash_\Lambda \Diamond\Diamond(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \to \Diamond\neg\sigma$$

következik. Csakhogy: $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$-ból $\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n \in \Delta$, és így $\Sigma\mathcal{R}^\Lambda\Delta$ miatt $\Diamond(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \in \Sigma$, amiből meg a feltevés és Σ maximalitása miatt $\Diamond\Diamond(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \in \Sigma$ következik. Ezt $(*)$-gal kombinálva kapjuk, hogy $\Diamond\neg\sigma$, azaz $\neg\Box\sigma \in \Sigma$, ami ellentmond Σ konzisztenciájának. $\Box$

4.33. Definíció. A Λ normális modális logika *kanonikus*, ha $\mathcal{F}^\Lambda \models \Lambda$. φ kanonikus, ha $\mathsf{K} \oplus \varphi$ kanonikus.

4.34. Állítás. *Ha Λ kanonikus, akkor helyes és erősen teljes az $\{\mathcal{F}^\Lambda\}$ frame-osztályra nézve.*

Bizonyítás. A helyesség a kanonicitás definíciója miatt igaz ($\Lambda \subseteq \{\varphi : \mathcal{F}^\Lambda \models \varphi\} = \Lambda_{\{\mathcal{F}^\Lambda\}}$), az erős teljesség meg triviális, hiszen ha Σ Λ-konzisztens, akkor $\mathcal{M}^\Lambda \models_{\Sigma^+} \Sigma$ bármely (4.24 miatt létező) Σ-t tartalmazó $\Sigma^+ \in MC^\Lambda$-re. $\Box$

4.35. Állítás. *Ha Σ kielégíthető egy $\mathcal{F} \in \mathrm{Fr}(\Lambda)$-n, akkor Σ Λ-konzisztens.*

Bizonyítás. 4.15 miatt Σ-t tartalmazza egy maximálisan Λ-konzisztens formulahalmaz. $\Box$

4.36. Tétel. *$KW = \mathsf{K} \oplus \mathbf{W}$ ($\mathbf{W}$ definícióját ld. az 5. oldalon) semmilyen frame-osztályra nézve sem helyes és erősen teljes; következésképp (ld. 4.34) nem is kanonikus.*

Bizonyítás. A $\Sigma = \{\Diamond p_1\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : 1 \leq i\}$ formulahalmaz KW-konzisztens, mert minden véges része az. Legyen ui. $\Sigma_n = \Diamond p_1 \wedge \bigwedge\{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) : 1 \leq i < n\}$ és $\mathcal{M}_n = \langle n, <, v\rangle$, ahol $<$ az n szokásos rendezése és $v(p_i) = \{i\}$; akkor $\mathcal{M}_n \models_0 \Sigma_n$ és $\langle n, <\rangle \models \mathbf{W}$ 3.4 miatt; 4.35 szerint tehát Σ_n konzisztens.

De Σ nem elégíthető ki egyetlen irreflexív és tranzitív frame-en sem (márpedig 3.4 miatt KW csakis olyan frame-osztályra nézve lehet helyes, amelyben csak ilyen frame-ek vannak), mert ha $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ilyen, és $\langle\mathcal{F}, v\rangle \models_w \Sigma$, akkor $\mathcal{F}$-ben van egy w-ből induló végtelen lánc, hiszen $w \models \Diamond p_1 \wedge \Box(p_1 \to \Diamond p_2)$ miatt van w_1 amire $wRw_1 \models p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Box(p_2 \to \Diamond p_3)$, tehát van olyan w_2 amire $w_1Rw_2 \models p_2 \wedge \Diamond p_3 \wedge \Box(p_3 \to \Diamond p_4)$ és így tovább. $\Box$

4.37. Feladat. *KW* kanonikus frame-jében van reflexív világ.

Eddigi teljességi tételeink mind azt mutatták meg, hogy egy Λ logika teljes valamilyen elsőrendben definiálható frame-osztályra nézve és a bizonyítás nehéz része Λ kanonicitásának belátása volt. Felmerül tehát a kérdés, hogy van-e e két fogalom közt valami összefüggés. A választ Kit Fine rövidesen bizonyítandó 4.40 tétele adja meg.

4.38. Állítás.

$$\biguplus_{h \in {}^I J} \prod_I \mathcal{F}_{h(i)} / D \twoheadrightarrow {}^I \left(\biguplus_J \mathcal{F}_j\right) / D$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}_j = \langle W_j, R_j \rangle$, $\mathcal{F} = \biguplus_{h \in {}^I J} \prod_I \mathcal{F}_{h(i)} / D$ és $\mathcal{G} = {}^I \left(\biguplus_J \mathcal{F}_j \right) / D$.

$h \in {}^I J$-re és $s \in \prod_I W_{h(i)}$-re jelölje $|s|_h$ az s $\prod_I W_{h(i)}$-beli D-szerinti ekvivalencia-osztályát, azaz
$$|s|_h = \{\, t \in \prod_I W_{h(i)} : \{\, i \in I : s_i = t_i \,\} \in D \,\}$$
és $s \in {}^I \biguplus_I W_i$-re
$$|s| = \{\, t \in {}^I \biguplus_j W_j : \{\, i \in I : s_i = t_i \,\} \in D \,\}.$$
Azt állítjuk, hogy a minden $h \in {}^I J$-re és $s \in \prod_I W_{h(i)}$-re $f(|s|_h) = |s|$ által definiált függvény $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ p-morfizmus.

Világos, hogy f jóldefiniált. f ráképezés is, mert minden $s \in {}^I \biguplus_J W_j$-re $f(|s|_h) = |s|$, ahol $h \in {}^I J$ olyan, hogy $\forall i. s_i \in W_{h(i)}$.

Ha $x R^{\mathcal{F}} y$, akkor x, y a diszjunk úniónak ugyanabban a komponensében vannak, azaz van olyan $h \in {}^I J$, hogy $x = |s|_h$, $y = |t|_h$, és $X = \{\, i \in I : s_i R_{h(i)} t_i \,\} \in D$. De $X \in D$ azt is mutatja, hogy $f(|s|_h) = |s| R^{\mathcal{G}} |t| = f(|t|_h)$.

Ha $f(|s|_h) R^{\mathcal{G}} |t|$, akkor
$$\{\, i : t_i \in W_{h(i)} \,\} \supseteq \{\, i : s_i R_i t_i \,\} \in D,$$
tehát van t-vel D-ekvivalens $t' \in \prod_I W_{h(i)}$, és arra $|s|_h R^{\mathcal{F}} |t'|_h$ és persze $f(|t'|_h) = |t|$. □

4.39. Feladat. Mondjuk ki és bizonyítsuk az analóg állítást modellekre.

4.40. Tétel (Fine)**.** *Ha a K frame-osztály zárt ultraszorzatra (például ha elemi), akkor Λ_K kanonikus.*

Bizonyítás. Minden $\varphi \notin \Lambda_K$-ra legyen $\mathcal{M}_\varphi$ olyan, $\mathcal{F}_\varphi \in K$-beli frame-re épülő modell, amiben φ nem igaz, és legyen $\mathcal{M} = \biguplus_{\varphi \notin \Lambda_K} \mathcal{M}_\varphi$. Vegyük észre, hogy

(1) $$\forall \sigma \in Form(\sigma \in \Lambda_K \iff \mathcal{M} \models \sigma),$$

hiszen ha $\sigma \in \Lambda_K$, azaz K $\models \sigma$, akkor speciel minden $\varphi \notin \Lambda_K$-ra $\mathcal{M}_\varphi \models \sigma$, tehát $\mathcal{M} \models \sigma$; ha pedig $\sigma \notin \Lambda_K$, akkor $\mathcal{M}_\sigma \not\models \sigma$ miatt $\mathcal{M} \not\models \sigma$.

Legyen $\mathcal{N} = \langle W, R, v \rangle$ az $\mathcal{M}$ egy megszámlálhatóan szaturált ultrahatványa, f pedig az $f(s) = \{\, \sigma : \mathcal{N} \models_s \sigma \,\}$ által definiált $W \longrightarrow MC^{\Lambda_K}$ függvény. Mivel $\mathcal{N}$ elemien ekvivalens $\mathcal{M}$-mel és $\mathcal{M} \models \Lambda$, f valóban MC^{Λ_K}-ba képez 4.15 miatt.

Mivel $\mathcal{N}$ és $\mathcal{M}^{\Lambda_K}$ is m-szaturált (előbbi 3.51, utóbbi **??** miatt) és minden $\sigma \in Form$-ra és $s \in W$-re
$$\mathcal{N} \models_s \sigma \iff \sigma \in f(s) \iff \mathcal{M}^{\Lambda_K} \models_{f(s)} \sigma,$$
3.41 miatt $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}^{\Lambda_K}$ p-morfizmus.

f szürjektív: Legyen $\Sigma \in MC^{\Lambda_K}$. Olyan $s \in W$ világot kellene találnunk, amire igaz, hogy minden σ-ra
$$\mathcal{N} \models_s \sigma \iff \sigma \in \Sigma,$$
vagyis (Σ maximalitása miatt) olyat, amire $\mathcal{N} \models_s \Sigma$.

$\Gamma(x) = \{\, ST_x(\sigma) : \sigma \in \Sigma \,\}$ minden véges része (vagy, ami ezzel Σ maximalitása miatt ekvivalens, minden eleme) kielégíthető $\mathcal{N}$-ben, mert ha $\sigma \in \Sigma$-ra $ST_x(\sigma)$ nem, akkor $\mathcal{M}$-ben sem (mivel $\mathcal{M}$ elemi része $\mathcal{N}$-nek), azaz (ld. 3.43) $\mathcal{M} \models \neg\sigma$, (1) miatt tehát $\neg\sigma \in \Lambda_K$, ami ellentmond Σ Λ_K-konzisztenciájának. $\mathcal{N}$ megszámlálható szaturáltsága (valójában már kompaktsága, azaz „1-szaturáltsága") miatt tehát van olyan s világ, ami $\mathcal{N}$-ben kielégíti $\Gamma(x)$-et. Erre az s-re tehát $\mathcal{N} \models_s \Sigma$.

Azt kaptuk tehát, hogy $\mathcal{F}^{\Lambda_K} \in \mathbb{HP}\mathrm{w}\mathbb{U}\mathrm{d}K$; de 4.38 miatt $\mathbb{P}\mathrm{w}\mathbb{U}\mathrm{d}K \subseteq \mathbb{HU}\mathrm{d}\mathbb{P}\mathrm{u}K$, azt pedig feltettük, hogy $\mathbb{P}\mathrm{u}K \subseteq K$; tehát $\mathcal{F}^{\Lambda_K} \in \mathbb{HU}\mathrm{d}K$ és így 3.8 és 3.13 miatt $\mathcal{F}^{\Lambda_K} \models \Lambda_K$, azaz Λ_K kanonikus. □

4.41. Példa. $\varphi_1 = \Diamond\Box p$, $\varphi_2 = \Box(\Box(\Box q \to q) \to q)$, $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ és $\psi = \varphi_1 \vee \Box p$. Azt állítjuk, hogy

(i) $\mathsf{Fr}(\varphi)$ elemi, mégpedig a $\forall x(\neg\exists y Rxy \vee \exists y(Rxy \wedge \forall z \neg Ryz))$ formula definiálja,
(ii) $\mathsf{Fr}(\varphi) \models \psi$, de
(iii) $\not\vdash_{K\oplus\varphi} \psi$.

Tehát abból, hogy egy modális formula elemi frame-osztályt definiál, nem következik, hogy az általa axiomatizált logika teljes erre a frame-osztályra nézve, és így az sem, hogy kanonikus. Ha ugyanis σ kanonikus, akkor

$$\mathcal{F}^{\mathsf{K}\oplus\sigma} \models \sigma \implies \mathcal{F}^{\mathsf{K}\oplus\sigma} \in \mathsf{Fr}(\sigma) \implies \mathsf{K}\oplus\sigma \supseteq \Lambda_{\mathsf{Fr}(\sigma)}$$

aholis a második implikáció azért igaz, mert

$$\eta \in \Lambda_{\mathsf{Fr}(\sigma)} \iff \mathsf{Fr}(\sigma) \models \eta \implies \mathcal{F}^{\mathsf{K}\oplus\sigma} \models \eta \implies \mathcal{M}^{\mathsf{K}\oplus\sigma} \models \eta \iff \eta \in \mathsf{K}\oplus\sigma$$

4.26 miatt.

(i) Az elsőrendű feltétel magyarul úgy szól, hogy „minden világ vagy vak, vagy lát egy vak világot". Az ezt teljesítő frame-eken persze φ érvényes, mert ha egy ilyenre épülő modell egy s világában nem igaz a φ_2, akkor s nem vak, tehát van vak szomszédja, ahol ezért igaz $\Box p$, tehát $s \models \varphi_1$.

Fordítva, tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle \models \varphi$ frame-ben van olyan s világ, ami nem vak (legyen t egy szomszédja), és aminek nincs is vak rákövetkezője (tehát t sem az). Legyen $v(p) = \emptyset$ és $v(q) = W \setminus \{t\}$. Akkor $s \not\models \varphi_1$, mert egyik szomszédjában sem igaz $\Box p$, mert mindnek van szomszédja, p meg sehol sem igaz.

$s \not\models \varphi$ belátásához azt kell még megmutatnunk, hogy $s \not\models \varphi_2$, azaz $s \models \Diamond(\Box(\Box q \to q) \wedge \neg q)$. De t mutatja, hogy ez így van, mert $sRt \models \Box(\Box q \to q) \wedge \neg q$, hiszen egyrészt $t \not\models q$ $v(q)$ definíciója miatt, másrészt t minden u szomszédjában $\Box q \to q$ (ha $u \neq t$, akkor $u \models q$, ha meg $u = t$, akkor $t \not\models \Box q$ (hiszen ilyenkor $tRt \not\models q$) miatt).

(ii) Ha s vak, akkor $\Box p$, ha meg van vak rákövetkezője, akkor $\Diamond\Box p$ igaz benne — akármi is legyen a kiértékelés.

(iii) bizonyítását el kell halasztanunk az alábbi „nem-sztenderd" helyességi tétel utánra.

4.42. Definíció (Általános frame). $\mathfrak{f} = \langle W, R, A \rangle$ *általános frame*, ha $\langle W, R \rangle$ frame, és $A \subseteq \mathcal{P}(W)$ zárt a Boole-műveletekre (tehát unióra és komplementerre) és a 3.19-ben definiált m-re. $\mathfrak{f} \models \varphi$, ha $\langle W, R, v \rangle \models \varphi$ minden A-ba képező v-re. Az ilyen értékeléseket *megengedett értékeléseknek* hívjuk.

4.43. Feladat (v.ö. 4.2). Ha F általános frame-ek egy osztálya, akkor $\Lambda_F = \{ \varphi \in Form : F \models \varphi \}$ normális modális logika.

4.44. Feladat. Tetszőleges $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle$ modellre $\langle \mathcal{F}, \{ \varphi^{\mathcal{M}} : \varphi \in Form \} \rangle$ általános frame, amiben v megengedett értékelés.

4.45. Feladat. Λ normális logikára és $\psi \in Form$-ra legyen $\widehat{\psi} = \{\, \Sigma \in MC^{\Lambda} : \psi \in \Sigma \,\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathfrak{f}^{\Lambda} = \langle\, \mathcal{F}^{\Lambda}, \{\, \widehat{\psi} : \psi \in Form \,\} \,\rangle$ általános frame. (Ez Λ *kanonikus általános frame*-je.)

4.46. Feladat. $\mathfrak{f}^{\Lambda} \models \Lambda$. (Ld. 2.4.)

4.47. Tétel. *Minden Γ formulahalmazra $\mathsf{K} \oplus \Gamma = \Lambda_{\mathsf{GFr}\Gamma}$. Azaz $\vdash_{\mathsf{K}\oplus\Gamma} \varphi$ pontosan akkor, ha φ érvényes minden olyan általános frame-ben, amiben Γ az.*

Bizonyítás. ($\subseteq$) 4.43 miatt $\Lambda_{\mathsf{GFr}\Gamma}$ logika, és tartalmazza Γ-t, tehát tartalmazza $\mathsf{K} \oplus \Gamma$-t is.

($\supseteq$) Legyen $\mathfrak{f}^{\mathsf{K}\oplus\Gamma}$ a $\mathsf{K} \oplus \Gamma$ kanonikus általános frame-je. 4.46 miatt $\mathfrak{f}^{\mathsf{K}\oplus\Gamma} \in \mathsf{GFr}\Gamma$, tehát $\Lambda_{\mathsf{GFr}\Gamma} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{f}^{\mathsf{K}\oplus\Gamma}} \subseteq \mathsf{K} \oplus \Gamma$, aholis az utolsó tartalmazás azért áll fenn, mert ha $\mathfrak{f}^{\mathsf{K}\oplus\Gamma} \models \varphi$, akkor speciel $\mathcal{M}^{\Lambda} \models \varphi$, tehát 4.27 miatt $\varphi \in \mathsf{K} \oplus \Gamma$. $\square$

4.48. Példa (4.41 folytatása)**.** Most már van esélyünk (iii) belátására: elég egy olyan $\mathfrak{g}$ általános frame-et találnunk, amiben φ érvényes, de ψ nem.

Legyen $W = \omega \cup \{\, \infty, \infty + 1 \,\}$, $R => \cup \{\, \langle\, \infty, n \,\rangle : n \in \omega \,\} \cup \{\, \langle\, \infty + 1, \infty \,\rangle \,\}$, ahol $>$ az ω szokásos rendezésének konverze. Legyen továbbá $A = A_1 \cup A_2$, ahol

$$A_1 = \{\, X \subseteq W : X \text{ véges és } \infty \notin X \,\}$$

és

$$A_2 = \{\, X \subseteq W : X \text{ kovéges és } \infty \in X. \,\}$$

A zárt komplementerre (A_1-beli halmazok komplementere A_2-beli és fordítva), únióra (mert A_1, A_2 zárt, és ha $X_1 \in A_1$, $X_2 \in A_2$, akkor $X_1 \cup X_2 \in A_2$), és m-re is; utóbbi belátásához vegyük észre, hogy

$$X \cap \omega \neq \emptyset \implies m(X) \in A_2 \tag{1}$$

ami azért igaz, mert $n \in X$-et minden nála nagyobb (tehát kovéges sok) szám és ∞ is látja. Következésképp ha $X \in A_2$, akkor $m(X) \in A_2$; ha $X \in A_1$, akkor vagy $X \cap \omega = \emptyset$, és akkor $m(X) = \emptyset \in A_1$, vagy $X \cap \omega \neq \emptyset$, és akkor ismét (1) miatt $m(X) \in A_2$.

$\mathfrak{g} = \langle\, W, R, A \,\rangle$ tehát általános frame, és $\mathfrak{g} \models \varphi$ a következő miatt. Ha $w \neq \infty + 1$, akkor $w = 0$ (és akkor $w \models \varphi_2$), vagy $w \neq 0$, és akkor $w \models \varphi_1$, mert $wR0 \models \Box p$. Ha pedig $w = \infty + 1$, akkor $w \models \varphi_2$, azaz $\infty \models \Box(\Box q \to q) \to q$, mert ha $v(q) \in A_2$, akkor $\infty \models q$, ha meg $v(q) \in A_1$, akkor $\infty \not\models \Box(\Box q \to q)$, azaz $\infty \models \Diamond(\Box q \wedge \neg q)$, mert $v(q)$ végessége miatt van $n = \min \omega \cap -v(q)$, és $\infty R n \models \Box q \wedge \neg q$.

De $\mathfrak{g} \not\models \psi$, mert ha $v(p) = \emptyset$ (ez megengedett értékelés, mert $\emptyset \in A_1$), akkor $\langle\, \mathfrak{g}, v \,\rangle \not\models_{\infty+1} \psi$, hiszen sem $\infty + 1$-ben, sem annak egyetlen szomszédjában, ∞-ben nem igaz a $\Box p$.

4.47 miatt tehát beláttuk, hogy $\not\vdash_{K\oplus\varphi} \psi$.

4.47 „helyesség” iránya nélkülözhetelen eszköz annak belátásához, hogy egy formula nem vezethető le valamilyen logikában. De a másik irány is hasznos, amint azt a következő állítás (amit majd a következő szakaszban fogunk használni) mutatja.

4.49. Állítás. $\vdash_{KW} \Diamond \Diamond p \to \Diamond p$

Azt már régóta tudjuk, hogy minden KW-frame tranzitív, és hogy tranzitív frameken érvényes a $\Diamond \Diamond p \to \Diamond p$ formula. De mint azt 4.41 mutatta, ebből nem következik az állítás.

Bizonyítás. 4.47-t fogjuk használni: azt látjuk be, hogy ha egy általános frame-en érvényes **W** (azaz $\Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p)$), akkor ott $\Diamond \Diamond p \to \Diamond p$ is az. Tegyük fel, hogy nem, vagyis hogy van olyan r világ, amire $r \models \Diamond \Diamond p \wedge \neg \Diamond p$. $\mathcal{F} \models W$ miatt

$$r \models \Diamond(p \vee \Diamond p) \to \Diamond((p \vee \Diamond p) \wedge \neg \Diamond(p \vee \Diamond p))$$

és $r \models \Diamond(p \vee \Diamond p)$, hiszen $r \models \Diamond \Diamond p$, tehát r lát egy olyan s-et, amire $s \models (p \vee \Diamond p) \wedge \neg \Diamond(p \vee \Diamond p)$, és mivel $r \not\models \Diamond p$, valójában $s \models \Diamond p \wedge \neg \Diamond(p \vee \Diamond p)$ is igaz. Node

$$\neg \Diamond(p \vee \Diamond p) \leftrightarrow \neg(\Diamond p \vee \Diamond \Diamond p) \leftrightarrow (\neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond \Diamond p),$$

vagyis azt kaptuk, hogy $s \models \Diamond p \wedge \neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond \Diamond p$, ami égbekiáltó ellentmondás. □

5. Eldönthetőség

5.1. Definíció. $\varphi \in Form$-ra $\mathsf{Sf}(\varphi)$ a φ részformuláinak halmaza, azaz

- $\mathsf{Sf}(\bot) = \{ \bot \}$
- $\mathsf{Sf}(p) = \{ p \}$
- $\mathsf{Sf}(\neg\varphi) = \{ \neg\varphi \} \cup \mathsf{Sf}(\varphi)$
- $\mathsf{Sf}(\varphi \vee \psi) = \{ \varphi \vee \psi \} \cup \mathsf{Sf}(\varphi) \cup \mathsf{Sf}(\psi)$
- $\mathsf{Sf}(\Diamond \varphi) = \{ \Diamond \varphi \} \cup \mathsf{Sf}(\varphi)$

$\Gamma \subseteq Form$-ra $\mathsf{Sf}(\Gamma) = \cup\{ \mathsf{Sf}(\varphi) : \varphi \in \Gamma \}$.

5.2. Definíció. Legyen $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$ egy modell, Γ pedig olyan formulahalmaz, amelyre $\mathsf{Sf}(\Gamma) = \Gamma$. $s, t \in W$-re legyen

$$s \equiv_\Gamma t \iff \forall \varphi \in \Gamma(\mathcal{M} \models_s \varphi \iff \mathcal{M} \models_t \varphi)$$

$\equiv_\Gamma$ nyilván ekvivalencia-reláció W-n. $s \in W$-re jelölje $|s|_\Gamma$ az $s \equiv_\Gamma$ szerinti ekvivalencia-osztályát.

$\mathcal{M}$ egy Γ szerinti *filtráltja*

$$\mathcal{M} = \langle W_\Gamma, R_\Gamma, v_\Gamma \rangle$$

ahol $W_\Gamma = \{ |s|_\Gamma : s \in W \}$, $v_\Gamma(p) = \{ |s|_\Gamma : s \in v(p) \}$ ha $p \in \Gamma$ és tetszőleges máskor, R_Γ pedig olyan reláció W_Γ-n, ami teljesíti az alábbi két feltételt:

min: $sRt \implies |s|_\Gamma R_\Gamma |t|_\Gamma$
max: $|s|_\Gamma R_\Gamma |t|_\Gamma \implies \forall \varphi(\Diamond \varphi \in \Gamma \ \& \ \mathcal{M} \models_t \varphi \implies \mathcal{M} \models_s \Diamond \varphi)$

5.3. Feladat. A definícióban $\equiv_\Gamma$ valóban ekvivalencia-reláció, és v_Γ jóldefiniált a Γ-beli kijelentésváltozókra.

5.4. Feladat. A definícióban R_Γ pontosan akkor teljesíti a **max** feltételt ha

$$|s|_\Gamma R_\Gamma |t|_\Gamma \implies \forall \varphi(\Box \varphi \in \Gamma \ \& \ \mathcal{M} \models_s \Box \varphi \implies \mathcal{M} \models_t \varphi).$$

5.5. Feladat. Ha Γ véges, akkor $|W_\Gamma| \leq 2^{|\Gamma|}$.

5.6. Lemma (Filtrációs lemma)**.**

$$(\forall \varphi \in \Gamma)(\forall s \in W)[\mathcal{M} \models_s \varphi \iff \mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} \varphi]$$

Bizonyítás. Formulaindukcióval: $p \in \Gamma$-ra

$$\mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} p \iff |s|_\Gamma \in v_\Gamma(p) \iff s \in v(p) \iff \mathcal{M} \models_s p.$$

A kijelentéslogikai konnektívumokra triviális az öröklődés, pl. ha $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, akkor Γ részformulára való zártság és az indukciós feltevés miatt

$$\mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} \varphi \;\&\; \mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} \psi$$
$$\iff \mathcal{M} \models_s \varphi \;\&\; \mathcal{M} \models_s \psi \iff \mathcal{M} \models_s \varphi \wedge \psi.$$

Végül tegyük fel, hogy $\Diamond \varphi \in \Gamma$ és φ-re igaz az állítás. Akkor egyrészt

$$\mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} \Diamond \varphi \iff (\exists t)(|s|R_\Gamma|t| \;\&\; \mathcal{M}_\Gamma \models_{|t|_\Gamma} \varphi)$$
$$\iff (\exists t)(|s|R_\Gamma|t| \;\&\; \mathcal{M} \models_t \varphi) \overset{\mathbf{max}}{\Longrightarrow} \mathcal{M} \models_s \Diamond \varphi,$$

másrészt

$$\mathcal{M} \models_s \Diamond \varphi \iff (\exists t)(sRt \;\&\; \mathcal{M} \models_t \varphi) \overset{\mathbf{min}}{\Longrightarrow} (\exists t)(|s|R_\Gamma|t| \;\&\; \mathcal{M} \models_t \varphi)$$
$$\iff (\exists t)(|s|R_\Gamma|t| \;\&\; \mathcal{M}_\Gamma \models_{|t|_\Gamma} \varphi) \iff \mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|_\Gamma} \Diamond \varphi.$$

□

Azt még nem tudjuk, hogy minden $\Gamma = \mathsf{Sf}(\Gamma)$-ra van-e a filtráció feltételeit kielégítő R_Γ. A következő állítás megnyugtatóan rendezi ezt a kérdést.

5.7. Állítás. *Legyen $\mathcal{M}$, Γ mint 5.2-ben, és $s, t \in W$-re legyen*

$$|s|_\Gamma R^\sigma |t|_\Gamma \iff (\exists s' \in |s|_\Gamma)(\exists t' \in |t|_\Gamma) s'Rt'$$
$$|s|_\Gamma R^\lambda |t|_\Gamma \iff \forall \varphi(\Diamond \varphi \in \Gamma \;\&\; \mathcal{M} \models_t \varphi \implies \mathcal{M} \models_s \Diamond \varphi)$$

Akkor R^λ jóldefiniált, és

(i) *R^σ és R^λ filtrációk, és*
(ii) *R' pontosan akkor az, ha $R^\sigma \subseteq R' \subseteq R^\lambda$.*

Bizonyítás. (i) Az világos, hogy R^σ-ra igaz **min** és R^λ-ra igaz **max**.

R^σ-ra igaz **max**: Legyenek $s, t \in W$ és $\Diamond \varphi \in \Gamma = \mathsf{Sf}(\Gamma)$, és tegyük fel, hogy $|s|_\Gamma R^\sigma |t|$ és $\mathcal{M} \models_t \varphi$. Az első feltevés és R^σ definíciója miatt $s'Rt'$ valamilyen $s' \equiv_\Gamma s$ és $t' \equiv_\Gamma t$-re; Γ zártsága miatt $\varphi \in \Gamma$, tehát $\mathcal{M} \models_{t'} \varphi$, vagyis $\mathcal{M} \models_{s'} \Diamond \varphi$, és így $s' \equiv_\Gamma s$ miatt $\mathcal{M} \models_s \Diamond \varphi$.

R^λ-ra igaz **min**: Legyenek s, t, Γ mint mindig, és tegyük fel, hogy sRt. Akkor minden olyan φ-re, amire $\mathcal{M} \models_t \varphi$, $\mathcal{M} \models_s \Diamond \varphi$, tehát $|s|_\Gamma R^\lambda |t|_\Gamma$.

(ii) $R' \subseteq W_\Gamma \times W_\Gamma$-ra $R^\sigma \subseteq R'$ pontosan akkor ha R'-re teljesül a **min** (balról jobbra triviális, fordítva meg mert ha $|s|_\Gamma R^\sigma |t|_\Gamma$, akkor $s'Rt'$ valamilyen $s' \in |s|_\Gamma$ és $t' \in |t|_\Gamma$-ra, és így **min** miatt $|s|_\Gamma = |s'|_\Gamma R^\sigma |t'|_\Gamma = |t|_\Gamma$), és $R' \subseteq R^\lambda$ pontosan akkor ha R'-re teljesül a **max** (ennek mindkét iránya triviális). □

5.8. Feladat. $|s|_\Gamma R^\lambda |t|_\Gamma \iff \forall \varphi(\Box \varphi \in \Gamma \;\&\; \mathcal{M} \models_s \Box \varphi \implies \mathcal{M} \models_t \varphi)$

5.9. Tétel. K *teljes a véges frame-ek osztályára nézve.*

Bizonyítás. 4.28-ben láttuk, hogy K teljes az összes frame-ek osztályára nézve. Tehát elég annyit megmutatnunk, hogy minden $\varphi \in Form$-ra

$$F \models \varphi \iff F_\omega \models \varphi$$

ahol F az összes, F_ω pedig az összes véges frame osztálya. ($\Rightarrow$) triviális, úgyhogy nézzük a másik irányt. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \not\models \varphi$; akkor $\mathcal{M} \not\models_w \varphi$ valamilyen $\mathcal{M}$ modellre és annak w világára. Legyen $\Gamma = \mathsf{Sf}(\varphi)$, $\mathcal{M}_\Gamma$ pedig $\mathcal{M}$ egy tetszőleges, Γ szerinti filtráltja. Akkor 5.6 miatt $\mathcal{M}_\Gamma \not\models_{|w|_\Gamma} \varphi$, 5.5 miatt viszont $\mathcal{M}_\Gamma$ véges, tehát $F_\omega \not\models \varphi$. $\square$

5.10. Következmény. K *eldönthető.*

Bizonyítás. Azt eddig is tudtuk, hogy K tételei rekurzíve felsorolhatók; de ennek a formulahalmaznak a komplementere is, mert a véges modellek, és így (ügyes szervezéssel) a véges frame-eken nem érvényes formulák halmaza rekurzíve felsorolható; utóbbi viszont a tétel miatt épp a K-tételek halmazának komplementere. $\square$

Ha $\not\vdash_{\mathsf{K}} \varphi$, akkor 5.5 szerint van egy legfeljebb $2^{|\mathsf{Sf}(\varphi)|}$ elemű frame, amiben φ nem érvényes. Tehát φ levezethetőségét eldönthetjük úgy, hogy ellenőrizzük, érvényes-e minden legfeljebb $2^{|\mathsf{Sf}(\varphi)|}$ elemű frame-en.

5.11. Tétel. *S4 teljes a véges reflexív tranzitív frame-ek osztályára nézve.*

Bizonyítás. 4.31(ii) miatt, éppúgy mint 5.9 bizonyításában, elég azt belátnunk, hogy minden reflexív tranzitív frame-nek van reflexív tranzitív filtráltja minden $\Gamma = \mathsf{Sf}(\Gamma)$ szerint.

Először is, ha R reflexív, akkor R_Γ is az **min** miatt. R tranzitivitásából azonban nem következik R_Γ tranzitivitása (R^σ!). Azt állítjuk, hogy R ún. *tranzitív filtráltja*, amelyet a

$$|s|_\Gamma R^\tau |t|_\Gamma \iff \forall \varphi(\Box\varphi \in \Gamma \;\&\; \mathcal{M} \models_s \Box\varphi \implies \mathcal{M} \models_t \varphi \wedge \Box\varphi)$$

formula definiál, (jóldefiniált és) mindig tranzitív.

Legyen ui. $|s|_\Gamma R^\tau |t|_\Gamma R^\tau |w|_\Gamma$, és tegyük fel, hogy $\mathcal{M} \models_s \Box\varphi$ valamilyen $\Box\varphi \in \Gamma$-ra. Akkor $|s|_\Gamma R^\tau |t|_\Gamma$ miatt $\mathcal{M} \models_t \varphi \wedge \Box\varphi$, $|t|_\Gamma R^\tau |w|_\Gamma$ miatt tehát $\mathcal{M} \models_w \varphi \wedge \Box\varphi$.

Azt persze még meg kell mutatnunk, hogy R^τ valóban R filtráltja.

min: (Csak itt használjuk R tranzitivitását.) Ha sRt és $\mathcal{M} \models_s \Box\varphi$, akkor persze $\mathcal{M} \models_t \varphi$, de $\mathcal{M} \models_t \Box\varphi$ is, mert R tranzitivitása miatt t minden szomszédja s-nek is szomszédja.

max: 5.4-ből nyilvánvaló. $\square$

5.12. Feladat. Ha R reflexív, akkor

$$|s|_\Gamma R^\tau |t|_\Gamma \iff \forall \varphi(\Box\varphi \in \Gamma \;\&\; \mathcal{M} \models_s \Box\varphi \implies \mathcal{M} \models_t \Box\varphi)$$

5.13. Következmény. *S4 eldönthető.*

5.14. Tétel. *S5 eldönthető.*

Bizonyítás. Ismét elég azt bizonyítanunk, hogy minden ekvivalencia-relációnak van olyan filtráltja, ami maga is ekvivalencia-reláció. Legyen $\Gamma = \mathsf{Sf}(\Gamma)$, R (az $\mathcal{M}$ modell elérhetőségi relációja) ekvivalencia-reláció, R' pedig R^σ tranzitív lezártja, azaz $\cup_{n>0}(R^\sigma)^n$. Először belátjuk, hogy R' az R filtráltja.

min teljesül, mert $R^\sigma \subseteq R'$.

max: Tegyük fel, hogy $|s|_\Gamma R' |t|_\Gamma$ (azaz $|s|_\Gamma = |s_1|_\Gamma R^\sigma \ldots R^\sigma |s_n|_\Gamma = |t|_\Gamma$ valamilyen n-re és $s_1, \ldots, s_n$-re), $\Diamond\varphi \in \Gamma$ és $\mathcal{M} \models_t \varphi$. Akkor, mivel **max** igaz R^σ-ra, $\mathcal{M} \models_{s_{n-1}} \Diamond\varphi$;

másrészt R^σ definíciója miatt van olyan $s'_{n-2} \in |s_{n-2}|_\Gamma$ és $s'_{n-1} \in |s_{n-1}|_\Gamma$, hogy $s'_{n-2}Rs'_{n-1}$, következésképp $\mathcal{M} \models_{s'_{n-1}} \Diamond\varphi$, és ebből R tranzitivitása miatt $\mathcal{M} \models_{s'_{n-2}} \Diamond\varphi$, és így $\mathcal{M} \models_{s_{n-2}} \Diamond\varphi$ következik. Hasonlóan haladva n lépésben kiderül, hogy $\mathcal{M} \models_{s_1} \Diamond\varphi$, és így $\mathcal{M} \models_s \Diamond\varphi$.

Az triviális, hogy R' reflexív (**min** miatt reflexív reláció minden filtráltja az) és tranzitív. Azt kell még megmutatnunk, hogy szimmetrikus is. Ez viszont igaz, hiszen R^σ szimmetrikus mert R az:

$$|s|_\Gamma R^\sigma |t|_\Gamma \iff (\exists s' \in |s|_\Gamma)(\exists t' \in |t|_\Gamma)s'Rt'$$
$$\iff (\exists s' \in |s|_\Gamma)(\exists t' \in |t|_\Gamma)t'Rs' \implies |t|_\Gamma = |t'|_\Gamma R^\sigma |s'|_\Gamma |s|_\Gamma$$

és könnyű látni, hogy szimmetrikus reláció tranzitív lezártja is szimmetrikus. □

A következő tétel (amit 4.36-el érdemes összevetni) bizonyítása példa arra, hogy a filtrálást nem csak eldönthetőség (vagy általánosabban: véges frame tulajdonság) bizonyítására lehet használni.

5.15. Tétel. *$KW = \mathsf{K} \oplus \mathbf{W}$ ($\mathbf{W}$ definícióját ld. az 5. oldalon) helyes és teljes a véges tranzitív irreflexív frame-ek osztályára nézve.*

Bizonyítás. Helyességet tudjuk 3.4-ből; tehát azt kéne belátni, hogy ha $\varphi \notin KW$, akkor van olyan véges tranzitív irreflexív frame, amiben nem érvényes.

KW kanonikus frame-je nem lesz jó, egyrészt mert nem véges, de főként azért, mert van benne reflexív világ (4.37). A végességet elérhetjük filtrálással, de az irreflexivitást **min** miatt nem; ezért a kanonikus modell filtráltjának elérhetőségi relációját módosítanunk kell egy kicsit.

Legyen $\Gamma = \mathsf{Sf}(\varphi)$, $\mathcal{M}_\Gamma = \langle W_\Gamma, R_\Gamma, v \rangle$ pedig $\mathcal{M}^{KW}$ egy tranzitív filtráltja. ($\mathcal{F}^{KW}$ tranzitív, mert 4.49 miatt $\Box p \to \Box\Box p \in KW$; ezért aztán R_Γ is tranzitív (ld. 4.31(i)).) A reflexív világokat nem tudjuk úgy megszüntetni, hogy R_Γ-ból kivesszük az $\langle |s|, |s| \rangle$ párokat, mert akkor a tranzitivitás is sérülne. Ezért legyen inkább $R = R_\Gamma \setminus \{ \langle |s|, |t| \rangle : |t| R_\Gamma |t| \}$. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{M} = \langle W_\Gamma, R, v \rangle$ véges tranzitív, irreflexív modell, amiben nem igaz φ.

R irreflexív, mert $|s|R|s| \iff |s|R_\Gamma|s| \ \& \ \neg|s|R_\Gamma|s|$, és tranzitív, mert ha $|s|R|t|R|w|$, akkor $|s|R_\Gamma|t|R_\Gamma|w|$ és $\neg|w|R_\Gamma|w|$, amikből R_Γ tranzitivitása és R definíciója miatt $|s|R|w|$ következik.

$\varphi \notin KW$ miatt van olyan $w \in W^{KW}$ világ, amire $\mathcal{M}^{KW} \not\models_w \varphi$, és így 5.6 miatt $\mathcal{M}_\Gamma \not\models_{|w|} \varphi$. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{M} \not\models_{|w|} \varphi$. Ehhez elég a következőt belátni:

(1) $$\text{minden } s \in W^{KW} \text{ és } \psi \in \Gamma\text{-ra } \mathcal{M} \models_{|s|} \psi \iff \mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|} \psi$$

Ezt a Γ-beli formulák felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Mivel $\mathcal{M}_\Gamma$ és $\mathcal{M}$ csak az elérhetőségi relációban különböznek, csak a $\Diamond$-ra való öröklődés nem triviális. Tehát tegyük fel, hogy $\psi \in \Gamma$-ra igaz (1), és $\Diamond\psi \in \Gamma$.

Ha $\mathcal{M} \models_{|s|} \Diamond\psi$, akkor az indukciós feltevés miatt persze $\mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|} \Diamond\psi$, hiszen $R \subseteq R_\Gamma$. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{M}_\Gamma \models_{|s|} \Diamond\psi$; akkor 5.6 miatt $\mathcal{M}^{KW} \models_s \Diamond\psi$, $\mathbf{W}$ (azaz $\Diamond p \to \Diamond(p \land \neg\Diamond p)$) miatt tehát $\mathcal{M}^{KW} \models_s \Diamond(\psi \land \neg\Diamond\psi)$, vagyis van olyan t amire $sR^{KW}t \models \psi \land \neg\Diamond\psi$. $sR^{KW}t$ miatt $|s|R_\Gamma|t|$, amiből $|s|R|t|$ is következik, mert $\neg|t|R_\Gamma|t|$ **max** és $t \models \psi \land$

$\neg \Diamond \psi$ miatt. Ezzel be is láttuk (1)-et, mert $t \models \psi$, 5.6 miatt tehát $\mathcal{M}_\Gamma \models_{|t|} \psi$, az indukciós feltevés szerint tehát $\mathcal{M} \models_{|t|} \psi$ és így $\mathcal{M} \models_{|s|} \Diamond \psi$. $\square$

Milyen tulajdonságokat várunk el egy doboztól, ha azt akarjuk, hogy $\Box\varphi$ azt jelentse, hogy (valaki) „tudja, hogy φ". Ez ízlés kérdése, de a következő hármat szokás feltenni:

- $\Box\varphi \to \varphi$
- $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (pozitív introspekció)
- $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ (negatív introspekció)

Milyen frame-eken érvényesek ezek? Tudjuk, hogy külön-külön a háromnak a következő frame-tulajdonságok felelnek meg: reflexivitás, tranzitivitás, euklideszi tulajdonság. De ezek együtt pontosan azt mondják, hogy az elérhetőségi reláció ekvivalencia-reláció. Ugyanis:

A.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy R reflexív és tranzitív. Akkor R pontosan akkor szimmetrikus, ha euklideszi.*

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Ha rRs és rRt, akkor a szimmetria miatt $sRrRt$, és így a tranzitivitás miatt sRt.
($\Leftarrow$) A reflexivitás miatt sRs, így ha sRt, akkor az euklideszi tulajdonság miatt tRs. $\Box$

A továbbiakban azt, hogy az a ügynök tudja φ-t, $K_a\varphi$-vel (és nem mondjuk $\Box_a\varphi$-vel) fogjuk jelölni.

Mindenki tudja elérhetőségi relációja: $R_E = \cup R_i$; ui. (most feltéve, hogy összesen ketten vannak),

$$\begin{aligned} s \models E\varphi \iff s \models K_a\varphi \wedge K_b\varphi \iff \\ \forall t(sR_at \implies t \models \varphi) \quad \text{és} \quad \forall t(sR_bt \implies t \models \varphi) \\ \iff \forall t(s(R_a \cup R_b)t \implies t \models \varphi) \end{aligned}$$

Common knowledge: Legyen $E^0\varphi \equiv \varphi$ és $E^{k+1}\varphi \equiv E(E^k\varphi)$. Akkor E^k elérhetőségi relációja R_E^k, ahol $R_E^0 = \mathrm{Id}_W$ és $R_E^{k+1} = R_E \circ R_E^k$ (indukció k-ra), és az idea az, hogy $s \models C\varphi \iff s \models \{E^k\varphi : k \in \mathbb{N}\}$, amiből pont úgy, mint az előbb, következik, hogy $R_C = \cup_{k\in\mathbb{N}} R_E^k$. Ezt a relációt amúgy R_E reflexív-tranzitív lezártjának hívják és R_E^*-al szokás jelölni. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált frame-ekben érvényes a következő két formula:

(Mix) $$C\varphi \to \varphi \wedge EC\varphi$$

(Ind) $$C(\varphi \to E\varphi) \to (\varphi \to C\varphi)$$

Ezek a common knowledge axiómái, és amilyen könnyű belátni a helyességüket, olyan nehéz belátni azt, hogy teljesek is (ld. A.4!).

Distributed knowledge elérhetőségi relációja $R_D = \cap R_i$, csak erre nincs bizonyítás, mert azt nem lehet (?) a többi modalitás segítségével definiálni. De ennyit azért lehet mondani: ha az ügynökök kombinálják a tudásukat, akkor ki tudnak zárni minden olyan világot, amit valamelyikük kizár. Mellesleg ezzel a választással érvényes lesz a D két axiómája: $D_{\{i\}}\varphi \iff K_i\varphi$ ill. $D_G\varphi \implies D_{G'}\varphi$ ha $G \subseteq G'$.

A.2. Példa. Amál és Béla homlokán egy-egy természetes szám van, mégpedig egymást követők. Egy modellezési lehetőség: $W = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : |n-m| = 1\}$, $R_a = \{(s,t) \in W^2 :$

$s_2 = t_2\}$, $R_b = \{(s,t) \in W^2 : s_1 = t_1\}$, $v(a_i) = \{s \in W : s_1 = i\}$ (Amál homlokán i van), $v(b_i) = \{s \in W : s_2 = i\}$ (Béla homlokán i van).

Ki mit tud az $s = (3,2)$ világban?

- $s \models a_3 \wedge b_2$
- $s \models \mathsf{K}_a b_2 \wedge \mathsf{K}_b a_3$ (általában is: $\mathcal{M} \models b_i \to \mathsf{K}_a b_i$ és $\mathcal{M} \models a_i \to \mathsf{K}_b a_i$)
- $s \models \neg\mathsf{K}_a a_3 \wedge \neg\mathsf{K}_b b_2$
- $s \models \mathsf{K}_a(a_1 \vee a_3) \wedge \mathsf{K}_b(b_2 \vee b_4)$; de pl. az elsőt Béla nem tudja:
- $s \not\models \mathsf{K}_b\mathsf{K}_a(a_1 \vee a_3)$, mert $sR_b(3,4)R_a(5,4) \models \neg(a_1 \vee a_3)$; de
- $s \not\models \mathsf{K}_b\mathsf{K}_a(a_1 \vee a_3 \vee a_5)$.
- $s \models D(a_3 \vee b_2)$ mert $s(R_a \cap R_b)t \implies t = s$
- $s \models \mathsf{E}\neg a_5$, mert s $R_\mathsf{E} = R_a \cup R_b$-szomszédai: s, $(1,2)$, $(3,4)$; egyiküknek sem 5 az első koordinátája. De:
- $s \models \neg\mathsf{E}\mathsf{E}\neg a_5$, mert $sR_\mathsf{E}(3,4)R_\mathsf{E}(5,4) \models a_5$. Ez mutatja, hogy R_E nem tranzitív, azaz $\not\models \mathsf{E}\varphi \to \mathsf{E}\mathsf{E}\varphi$. (Persze, különben nem lenne szükség tranzitív lezártra.) Speciálisan:
- $s \not\models \mathsf{C}\neg a_5$. De
- $s \models \mathsf{C}\neg b_5$, mert akárhány lépést is teszünk s-ből R_E mentén, olyan világba jutunk, aminek páros a második koordinátája.

Teljességi tétel *common knowledge*-ra Legyen I véges, $\Lambda = S5^I \oplus \{E, Mix, Ind\}$, ahol $S5^I$ minden $i \in I$-re a K_i-kre kimondott $S5$-axiómákból áll, és

$$E\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} K_i\varphi \tag{E}$$

(azt már tudjuk, ld. kb. egy oldallal korábban, hogy egy frame-ben ez pontosan akkor érvényes, ha ott $R_E = \cup_{i \in I} R_i$ (ahol R_i a K_i elérhetőségi relációja)).

A $(W, R_i, R_E, R_C)_{i \in I}$ frame standard, ha R_i-k ekvivalencia-relációk, $R_E = \cup_{i \in I} R_i$ és $R_C = R_E^*$.

A.3. Állítás. *Tetszőleges Λ normális modális logikára, ha $E \in \Lambda$, akkor $R_E^\Lambda = \cup R_i^\Lambda$.*

Tehát a minket érdeklő logika kanonikus frame-je csak úgy lehet nem standard, hogy $R_C \neq R_E^*$. És úgy az is, ld. A.5!

Bizonyítás. Azt kellene megmutatni, hogy $\Sigma(\cup R_i^\Lambda)\Delta \iff (\forall\varphi)(E\varphi \in \Sigma \implies \varphi \in \Delta)$, mert ez utóbbi $\Sigma R_E^\Lambda \Delta$ definíciója.

($\Rightarrow$) Egyrészt $\Sigma(\cup R_i^\Lambda)\Delta$ miatt $\Sigma R_j^\Lambda \Delta$ valamilyen j-re; másrészt

$$E\varphi \in \Sigma \stackrel{E}{\Longrightarrow} \bigwedge_{i \in I} K_i\varphi \in \Sigma \implies (\forall i) K_i\varphi \in \Sigma,$$

speciálisan $K_j\varphi \in \Sigma$, és így $\varphi \in \Delta$.

($\Leftarrow$) Ha nem igaz, hogy $\Sigma(\cup R_i^\Lambda)\Delta$, akkor $(\forall i)(\exists\varphi_i)(K_i\varphi_i \in \Sigma \ \& \ \varphi_i \notin \Delta)$. Legyen $\psi = \bigvee_i \varphi_i$; akkor $\psi \notin \Delta$, mert $\vdash \neg\psi \leftrightarrow \bigwedge \neg\varphi_i$ és $\bigwedge \neg\varphi_i \in \Delta$. De $E\psi \in \Sigma$, és így $\neg\Sigma R_E^\Lambda \Delta$, mert $\vdash \varphi_i \to \psi$ miatt $\vdash K_i\varphi_i \to K_i\psi$, miközben $K_i\varphi_i \in \Sigma$ és így $K_i\psi \in \Sigma$ minden i-re; következésképp $\bigwedge_i K_i\psi \in \Sigma$, amiből (E) miatt $E\psi \in \Sigma$. □

A.4. Tétel. *Λ teljes a standard frame-ek osztályára nézve.*

Bizonyítás. Legyen
$$\mathcal{M}^\Lambda = (MC^\Lambda, R_i^\Lambda, R_E^\Lambda, R_C^\Lambda, v^\Lambda)$$
a kanonikus modell. Amiért a szokásos kanonikus modelles bizonyítás nem működik, az az, hogy $R_C^\Lambda \neq (R_E^\Lambda)^*$ (ezt később majd belátjuk), vagyis a kanonikus frame nem standard. Ezt a problémát filtrálással fogjuk megoldani.

Legyen $\Gamma = \mathsf{Sf}(\Gamma)$ véges, és zárjuk le „$E\varphi \in \Gamma \implies K_i\varphi \in \Gamma$” és „$C\varphi \in \Gamma \implies EC\varphi \in \Gamma$”-ra is; ettől még véges marad. Azt állítjuk, hogy
$$\mathcal{M} = (MC^\Lambda/{\equiv_\Gamma}, R_i, R_E, R_E^*, v)$$
ahol $v = v_\Gamma^\Lambda$, R_i az R_i^Λ egy olyan filtráltja, ami ekvivalencia-reláció (ld. 5.14 bizonyítását) és $R_E = \cup_{i \in I} R_i$, a kanonikus modell Γ szerinti filtráltja, azaz

(1) $$R_E \text{ az } R_E^\Lambda \text{ egy } \Gamma \text{ szerinti filtráltja}$$

(ez könnyű) és

(2) $$R_E^* \text{ az } R_C^\Lambda \text{ egy } \Gamma \text{ szerinti filtráltja}$$

(ez nehéz). Ha ezeket sikerül belátni, akkor kész is vagyunk, mert $\mathcal{M}$ frame-je standard.

> Emlékeztető:
>
> **(max)** $$|s|_\Gamma R_\Gamma |t|_\Gamma \implies \forall\varphi(\Box\varphi \in \Gamma \;\&\; \mathcal{M} \models_s \Box\varphi \implies \mathcal{M} \models_t \varphi)$$
>
> ami esetünkben, mivel a kanonikus modellt filtráljuk, így néz ki:
> $$|\Sigma|_\Gamma R_\Gamma |\Delta|_\Gamma \implies \forall\varphi(\Box\varphi \in \Gamma \cap \Sigma \implies \varphi \in \Delta).$$

(1) *bizonyítása.* Azt kell megmutatnunk, hogy $\cup R_i$ az R_E^Λ filtráltja. (Végig $|\Sigma|$-t írunk $|\Sigma|_\Gamma$ helyett.)

min
$$\Sigma R_E^\Lambda \Delta \overset{A.3}{\iff} \exists i.\Sigma R_i^\Lambda \Delta \overset{\textbf{min}\ R_i\text{-re}}{\implies} \exists i.|\Sigma| R_i |\Delta| \implies |\Sigma|(\cup R_i)|\Delta|$$
max Egyrészt ha $|\Sigma|(\cup R_i)|\Delta|$, akkor $|\Sigma| R_i |\Delta|$ valamilyen i-re; másrész ha $E\varphi \in \Gamma \cap \Sigma$, akkor $K_i\varphi \in \Gamma \cap \Sigma$ (itt használjuk Γ első speciális zártságát és (E)-t); tehát, mivel R_i-re igaz a **max**, $\varphi \in \Delta$.

(2) *bizonyítása.* **min**-hez kell:
$$\Sigma R_C^\Lambda \Delta \implies |\Sigma| R_E^* |\Delta|.$$
Először is,

(3) $$(\forall X \subseteq MC^\Lambda/{\equiv_\Gamma})(\exists \varphi_X \in \mathit{Form})(\forall \Sigma \in MC^\Lambda)[\varphi_X \in \Sigma \iff |\Sigma| \in X].$$

Legyen ui. $\Sigma \in MC^\Lambda$-ra
$$\varphi_\Sigma = \bigwedge(\Sigma \cap (\Gamma \cup \neg\Gamma))(= \bigwedge(\{\varphi \in \Gamma\colon \varphi \in \Sigma\} \cup \{\neg\varphi\colon \varphi \in \Gamma, \varphi \notin \Sigma\})).$$
Akkor $\varphi_\Sigma \in \Delta \iff |\Delta| = |\Sigma|$:

$(\Rightarrow)$ $$|\Delta| \neq |\Sigma| \implies \exists\sigma \in (\Gamma \cup \neg\Gamma) \cap (\Sigma \setminus \Delta) \implies \vdash \varphi_\Sigma \to \sigma \;\&\; \neg\sigma \in \Delta \implies \varphi_\Sigma \notin \Delta$$

és

($\Leftarrow$) elég, hogy $\varphi_\Sigma \in \Sigma$ (ami triviális, mert ilyenek konjunkciója), mert $\varphi_\Delta = \varphi_\Sigma$.

Következésképp $X \subseteq MC^\Lambda/\!\equiv_\Gamma$-ra, mondjuk $X = \{\,|\Sigma_1|,\ldots,|\Sigma_n|\,\}$-ra $\varphi_X = \bigvee_{i=1}^n \varphi_{\Sigma_i}$ jó lesz. Ezzel beláttuk (3)-at.

Tetszőleges $\Sigma \in MC^\Lambda$-ra (3)-at $|\Sigma|$ R_E^* szerinti rákövetkezőire alkalmazva kapjuk, hogy van olyan φ_Σ, amire

(4)
$$\varphi_\Sigma \in \Delta \iff |\Sigma| R_E^* |\Delta|$$

minden $\Delta \in MC^\Lambda$-ra. Azt akarjuk megmutatni, hogy

(5)
$$C(\varphi_\Sigma \to E\varphi_\Sigma) \in \Sigma.$$

Ehhez elég lenne, hogy minden $\Delta \in MC^\Lambda$-ra $\Sigma\mathcal{R}_C^\Lambda\Delta \implies \varphi_\Sigma \to E\varphi_\Sigma \in \Delta$, azaz $\Sigma\mathcal{R}_C^\Lambda\Delta \ni \varphi_\Sigma \implies E\varphi_\Sigma \in \Delta$. Node: mivel

$$E\varphi_\Sigma \in \Delta \iff (\forall \Delta' \in MC^\Lambda)(\Delta\mathcal{R}_E^\Lambda\Delta' \implies \varphi_\Sigma \in \Delta'),$$

és R_E-re (1) miatt igaz a **min**, $\Delta\mathcal{R}_E^\Lambda\Delta' \implies |\Delta|R_E|\Delta'|$; tehát elég, hogy $|\Delta|\mathcal{R}_E|\Delta'| \implies \varphi_\Sigma \in \Delta'$; ez viszont igaz, mert

$$\varphi_\Sigma \in \Delta \overset{(4)}{\implies} |\Sigma|R_E^*|\Delta|\mathcal{R}_E|\Delta'| \implies |\Sigma|R_E^*|\Delta'| \overset{(4)}{\implies} \varphi_\Sigma \in \Delta',$$

vagyis beláttuk (5)-öt. De akkor (Ind) miatt $\varphi_\Sigma \to C\varphi_\Sigma \in \Sigma$, továbbá $\varphi_\Sigma \in \Sigma$ R_E^* reflexivitása és (4) miatt. Ezért (az első implikációban R_C^Λ definícióját használva)

$$C\varphi_\Sigma \in \Sigma R_C^\Lambda \Delta \implies \varphi_\Sigma \in \Delta \overset{(4)}{\implies} |\Sigma|R_E^*|\Delta|,$$

amivel beláttuk **min**-t R_E^*-ra.

max-hoz

(6)
$$|\Sigma|R_E^*|\Delta| \implies \forall\varphi(C\varphi \in \Gamma\cap\Sigma \implies \varphi \in \Delta)$$

kellene. Ehhez először belátjuk indukcióval, hogy

(7)
$$\forall n |\Sigma|R_E^n|\Delta| \implies \forall\varphi(C\varphi \in \Gamma\cap\Sigma \implies C\varphi \in \Delta).$$

Ha $n = 0$, akkor $|\Sigma| = |\Delta|$ miatt igaz az állítás. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és $|\Sigma|R_E^{n+1}|\Delta|$, azaz $|\Sigma|R_E^n|\Delta'|R_E|\Delta|$ valamilyen $|\Delta'| \in MC^\Lambda$-re. Ha $C\varphi \in \Gamma\cap\Sigma$, akkor az indukciós feltevés miatt $C\varphi \in \Gamma\cap\Delta'$, amiből (Mix) és Γ E-re való zártsága miatt $EC\varphi \in \Gamma\cap\Delta'$; ebből viszont $|\Delta'|R_E|\Delta|$ és mert R_E-re (1) szerint igaz a **max**, következik, hogy $C\varphi \in \Delta$.

Akkor most (6) bizonyításához tegyük fel, hogy $|\Sigma|R_E^*|\Delta|$ és $C\varphi \in \Gamma\cap\Sigma$ valamilyen φ-re. Az előbbi miatt $|\Sigma|R_E^n|\Delta|$ valamilyen n-re, az utóbbi és (7) miatt tehát $C\varphi \in \Delta$, amiből (Mix) miatt $\varphi \in \Delta$ következik.

Miért következik mindebből teljesség? Mert ahhoz azt kellene látni, hogy minden Λ-konzisztens formula kielégíthető egy standard frame-en (ld. 4.18!). De ez igaz, mert ha $\varphi \in \Sigma \in MC^\Lambda$, akkor $\mathcal{M}^\Lambda \models_\Sigma \varphi$, és így ha Γ az $\mathsf{Sf}(\varphi)$-t tartalmazó olyan véges formulahalmaz, amelyre igaz, hogy $E\varphi \in \Gamma \implies K_i\varphi \in \Gamma$ és $C\varphi \in \Gamma \implies EC\varphi \in \Gamma$, akkor $\mathcal{M} \models_{|\Sigma|_\Gamma} \varphi$ áll $\mathcal{M}^\Lambda$ minden Γ-filtráltjában, így abban is, amiről megmutattuk, hogy standard.

□

A.5. Állítás. *Ha $|I| > 1$, akkor a Λ-kanonikus frame nem standard.*

Bizonyítás. $\Sigma_0 = \{\, E^n p\colon n \geq 0 \,\} \cup \{\, \neg Cp \,\}$ minden véges részhalmaza Λ-konzisztens 4.35 miatt. Tegyük fel ui. hogy N a legnagyobb index, amire $E^N p$ eleme ennek a véges részhalmaznak és $I \supsetneqq \{1\}$. Akkor legyen $W = \mathbb{N}$, R_1 a $\{\langle\, 2n, 2n+1 \,\rangle\colon n \in \mathbb{N}\}$, R_i $(1 \neq i \in I)$ pedig a $\{\langle\, 2n+1, 2n+2 \,\rangle\colon n \in \mathbb{N}\}$ reláció reflexív szimmetrikus lezártja. Akkor $R_E = \cup_{i\in I} R_i$ az $\{\langle\, n, n+1 \,\rangle\colon n \in \mathbb{N}\}$ reláció reflexív szimmetrikus lezártja, $R_C = R_E^*$ pedig $\mathbb{N}^2$, tehát ha $v(p) = \{\, 0, \ldots, N \,\}$, akkor $\langle W, R_i, R_E, R_C, v\rangle_{i\in I} \models_0 \neg Cp \wedge \bigwedge_{k=0}^{N} E^i p$.

Tehát létezik Σ_0-t tartalmazó $\Sigma \in MC^\Lambda$. $\neg Cp \in \Sigma$ miatt $(\exists \Delta \in MC^\Lambda)\Sigma R_C^\Lambda \Delta \ni \neg p$; de nem igaz, hogy $\Sigma (R_E^\Lambda)^* \Delta$, mert ha valamilyen n-re $\Sigma (R_E^\Lambda)^n \Delta$ állna, akkor ebből $E^n p \in \Sigma$ miatt $p \in \Delta$ következne. Tehát $R_C^\Lambda \not\subseteq (R_E^\Lambda)^*$. $\square$

B.1. Definíció. Az $F \subseteq \mathcal{P}(W)$ halmaz *véges metszet tulajdonságú* (fip) ha $(\forall n \in \omega)(\forall X_1, \ldots, X_n \in F) \cap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$. $F \subseteq \mathcal{P}(W)$ *filter* a W halmaz felett, ha

(i) $W \in F$
(ii) $X \subseteq Y \in F \implies X \in F$ minden $X \subseteq W$-re
(iii) $X, Y \in F \implies X \cap Y \in F$

Vagyis F zárt $\cap$-re, felfelé, és nemüres.

Az F filter *valódi* ha $\neq \mathcal{P}(W)$ ($\iff$ $\emptyset \notin$). Az F filter *ultrafilter* ha $(\forall X \subseteq W)(X \in F \iff -X \notin F)$ (ahol $-X := W \setminus X$). (Spec.: minden ultrafilter valódi filter.) Uf W jelöli a W feletti ultrafilterek halmazát.

B.2. Példák. $\{ X \subseteq \omega : -X \text{ véges} \}$ valódi filter; tetszőleges nemüres W halmazra és annak rögzített w elemére $\{ X \subseteq W : w \in X \}$ ultrafilter.

B.3. Állítás. *Ha $H \subseteq \mathcal{P}(W)$ fip, akkor kibővíthető valódi filterré.*

Bizonyítás. Legyen $F = \{ Z \subseteq W : (\exists n \in \omega)(\exists X_1, \ldots, X_n \in H) Z \supseteq \cap_{i=1}^n X_i \}$. Ez trv. zárt felfelé és metszetre, és valódi, mert H fip-sége miatt $\emptyset \notin$. □

B.4. Állítás. *Legyen F filter W felett. Ekkor F ultrafilter csakkor ha maximális valódi filter.*

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) F valódi, mert ultra. Maximális: Legyen $F \subset F^+$, F^+ filter W felett; akkor $X \in F^+ \setminus F$-re $-X \in F \subseteq F$ és így $\emptyset = X \cap -X \in F^+$, azaz F^+ nem valódi.
($\Leftarrow$) Tfh. $X \notin F$ valamilyen $X \subseteq W$-re. Kell: $-X \in F$. Ha nem, akkor legyen $F_1 = \{ Z \subseteq W : (\exists Y \in F \cup \{X\}) Z \supseteq Y \}$. Akkor $F_1 \supset F$, tehát ha belátjuk, hogy fip, akkor B.3 miatt kibővíthető egy F-et valóban tartalmazó valódi filterré, ami ellentmond F maximalitásának.

Legyen $Z_1, \ldots, Z_n \in F_1$. Akkor létezik $Y_1, \ldots, Y_k \in F$, hogy $Z_i \supseteq Y_i$ ($i = 1, \ldots, k$) és $Z_i \supseteq X$ ($i = k+1, \ldots, n$). $\cap_{i=1}^n Z_i \supseteq \cap_{i=1}^k Y_i \cap X \neq \emptyset$, különben $-X \supseteq \cap_{i=1}^k Y_i \in F$ és így $-X \in F$ lenne, ami ellentmond a feltevésünknek. □

B.5. Állítás. *Ha $H \subseteq \mathcal{P}(W)$ fip, akkor kibővíthető ultrafilterré.*

Bizonyítás. Emlékeztető: $\langle A, \leq \rangle$ részbenrendezés ha $\leq$ reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. $C \subseteq A$ lánc ha $\leq$ trichotóm C-n. Ha C lánc az $\langle A, \leq \rangle$ részbenrendezésben, akkor $k \in A$ felső korlátja C-nek iff $(\forall x \in C) x \leq k$. Zorn lemma: Ha az $\langle A, \leq \rangle$ nemüres részbenrendezés olyan, hogy benne minden láncnak van felső korlátja, akkor $\langle A, \leq \rangle$-nak van maximális eleme (azaz $m \in A$ úgy, hogy $m \leq x \in A \implies m = x$).

Most már jöhet a bizonyítás: H fip, tehát B.3 miatt

$$A = \{ F \supseteq H : F \text{ valódi filter } W \text{ felett} \}$$

nemüres. Az $\langle A, \subseteq \rangle$ részbenrendezésben minden láncnak van felső korlátja: Ha ui. $C \subseteq A$ lánc, akkor $\cup C \in A$ (miért?) és nyilván felső korlát. Zorn lemma miatt tehát A-nak van maximális eleme, ami B.4 miatt (H-t tartalmazó) ultrafilter. □