TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

SIMON ANDRÁS

1. Pontsorozatok

$\mathbb{R}^k$ (k-dimenziós euklideszi tér) az 1-2-3-dimenziós tér analógiájára. Elemek: $(x_1,\dots,x_k)$ ahol $x_i \in \mathbb{R}$. Műveletek: $+$, $-$, $\lambda\cdot$ (ezek koordinátánként mennek), $0=(0,\dots,0)$, és skalárszorzat: $(x_1, \dots, x_k)\cdot(y_1,\dots,y_k)=\sum_{i=1}^k x_i y_i$.

Távolság $\mathbb{R}^k$-n: $\mathrm{d}(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i-y_i)^2}$ (vagyis az $\overrightarrow{xy}$ vektor hossza).

Nincs: szorzás, rendezés.

A távolság három legfontosabb tulajdonsága:

(1) $\mathrm{d}(x,y)\geq 0$, és pontosan akkor 0, ha $x=y$
(2) $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$ (szimmetria)
(3) $\mathrm{d}(x,y)\leq \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Tetszőleges halmazon értelmes, a fenti tulajdonságokkal rendelkező kétváltozós függvényt távolságnak mondunk, és a halmazt a távolsággal együtt metrikus térnek nevezzük. Az $\mathbb{R}^k$-n fent definiált távolságot szokás euklideszi távolságnak nevezni.

1.1. Példák. További példák távolságra:

(1) Tetszőleges halmazon $d(x,x)=0$ és $x\neq y$-ra $d(x,y)=1$.
(2) x, $y\in\mathbb{R}^k$-ra $d(x,y)=\sum_{i=1}^k |x_i-y_i|$ távolság $\mathbb{R}^k$-n.
(3) x, $y\in\mathbb{R}^k$-ra $d(x,y)=\max\{|x_i-y_i|: 1\leq i\leq k\}$ távolság $\mathbb{R}^k$-n.

1.2. *Feladat.* Ezek valóban távolságok.

1.3. *Feladat.* Rajzoljuk le két dimenzióban a második és a harmadik példabeli távolsággal az origó középpontú egységsugarú kört!

1.4. Definíció. $a\in\mathbb{R}^k$, $0<\epsilon\in\mathbb{R}$-re $\mathrm{S}_\epsilon(a)=\{x\in\mathbb{R}^k:\ \mathrm{d}(a,x)<\epsilon\}$ és $\mathring{\mathrm{S}}_\epsilon(a)=\{x\in\mathbb{R}^k: 0<\mathrm{d}(a,x)<\epsilon\}$ a ϵ-sugarú (lukas) környezete.

1.5. Definíció. a_n $\mathbb{R}^k$-beli sorozat ($\mathbb{N}$-ből $\mathbb{R}^k$-ba képező függvény) konvergens és $a\in\mathbb{R}^k$-hoz tart ($\lim_{n\to\infty} a_n=a$, $a_n\to a$) ha $(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)\,\mathrm{d}(a,a_n)<\epsilon$ (vagyis $a_n\in\mathrm{S}_\epsilon(a)$). Mint eddig: a_n konvergens pontosan akkor, ha $(\exists a)\lim_{n\to\infty}a_n=a$, és divergens ha nem konvergens.

Viszont most nincs olyan, hogy „végtelenbe divergál”.

1.6. Definíció. $H\subseteq\mathbb{R}^k$ korlátos, ha a $\{\mathrm{d}(0,x): x\in H\}$ számhalmaz az. (Hf: $H\subseteq\mathbb{R}^k$ pontosan akkor korlátos, ha $\{\mathrm{d}(x,y): x,y\in H\}$ az.) Az a_n sorozat korlátos, ha az értékkészlete ($\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$) korlátos.

Milyen valós sorozatokra vonatkozó állítások lesznek igazak $\mathbb{R}^k$-beli sorozatokra? Röviden: minden, aminek értelme van.

Nincs értelme pl. ezeknek: konvergens sorozatok szorzata konvergens (mert nincs szorzat); monoton korlátos sorozat konvergens (nincs rendezés, tehát nincs monotonitás).

Viszont igazak lesznek pl. ezek:

1.7. Állítás. (1) *határérték egyértelmű*

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *pontosan akkor, ha a minden környezetén kívül csak véges sok tagja van* a_n*-nek*

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(a, a_n) = 0$

(4) *ha* a_n *konvergens, akkor korlátos is.*

Pl. az első bizonyítása: Tfh. $a_n \to a$ és $a_n \to b$, $a \neq b$. Legyen $\epsilon = \mathrm{d}(a,b)/2$ (> 0 a távolság 1. tulajdonsága miatt), és legyen $N = \max(N_a, N_b)$, ahol N_a, N_b olyan, hogy minden $n > N_a$-ra $a_n \in \mathrm{S}_\epsilon(a)$ és minden $n > N_b$-re $a_n \in \mathrm{S}_\epsilon(b)$. Akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt minden $n > N$-re $\mathrm{d}(a,b) \leq \mathrm{d}(a,a_n) + \mathrm{d}(a_n,b) < 2\epsilon = \mathrm{d}(a,b)$, ami ellentmondás.

$\mathbb{R}^k$*-beli halmazok és sorozatok mely tulajdonságai vezethetők vissza elemei vagy tagjai koordinátái halmazának vagy sorozatainak megfelelő tulajdonságaira?*

Pl.

1.8. Állítás. (1) $H \subseteq \mathbb{R}^k$ *pontosan akkor korlátos, ha minden* $i \in \{1,\dots,k\}$*-ra* $\{x_i : x \in H\}$ *korlátos. (Hf: és ez pontosan akkor áll fenn, ha* $\{x_i : x \in H, i \in \{1,\dots,k\}\}$ *korlátos.)*

(2) a_n *pontosan akkor konvergens, ha koordinátánként az. Sőt:*

$$a_n \to a \iff (\forall i \in \{1,\dots,k\}) a_{ni} \to a_i,$$

ahol a_{ni} *a sorozat n. elemének i. koordinátáját jelöli. (Az* a_{ni} *valós* sorozatot*, tehát azt, amelyiknek k. tagja* a_k *i. koordinátája,* a_n *i. koordinátasorozatának nevezzük.)*

Ezek kijönnek az alábbi két egyenlőtlenségből:

1.9. Állítás. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^k)(\forall j \in \{1,\dots,k\})$

$$|x_j - y_j| \leq \mathrm{d}(x,y) \leq \textstyle\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$$

Bizonyítás. Könnyű (négyzetre kell emelni mindhárom oldalt) és érdektelen. □

(2) bizonyítása: ($\Rightarrow$) Legyen $i \in \{1,\dots,k\}$, $\epsilon > 0$. $a_n \to a$ miatt $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\, \mathrm{d}(a,a_n) < \epsilon$ és ez az N jó lesz a_{ni}-hez is, mert 1.9 miatt $|a_{ni} - a_i| \leq \mathrm{d}(a,a_n)$.

($\Leftarrow$) Legyen $\epsilon > 0$; a koordinátasorozatok konvergenciája miatt $(\forall i \in \{1,\dots,k\})(\exists N_i \in \mathbb{N})(\forall n > N_i)|a_{ni} - a_i| < \epsilon/k$; de akkor az 1.9-beli második egyenlőtlenség miatt minden $n > \max\{N_1, \dots N_k\}$-ra $\mathrm{d}(a_n, a) \leq \sum_{i=1}^k |a_{ni} - a_i| < k \cdot \epsilon/k = \epsilon$.

1.10. Következmény. *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$*, akkor* $a_n \pm b_n$ *és* λa_n *is konvergens és* $a_n \pm b_n \to a \pm b$*,* $\lambda a_n \to \lambda a$*.*

Bizonyítás. Visszavezethető az egyváltozós esetre 1.8(2) és amiatt, hogy a műveletek koordinátánként mennek. Pl. az első így: $a_n \to a$ és $b_n \to b$ és 1.8(2) miatt minden $i \in \{1,\dots,k\}$-ra $a_{ni} \to a_i$ és $b_{ni} \to b_i$, tehát minden $i \in \{1,\dots,k\}$-ra $(a_n + b_n)_i = a_{ni} + b_{ni} \to a_i + b_i = (a+b)_i$, amiből megint 1.8(2) miatt $a_n + b_n \to a + b$. □

1.11. *Megjegyzés.* 1.9-ból és 1.8(2)-ből kijön a Cauchy-kritérium.

1.12. Tétel (Bolzano-Weierstrass)**.** *Minden korlátos* $\mathbb{R}^k$*-beli sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen a_n a korlátos sorozat. Tudjuk: a_n koordinátasorozatai (és így azok részsorozatai) is korlátosak, és elég megmutatni, hogy a_n-nek van olyan részsorozata, ami koordinátánként konvergens.

Az nem fog menni, hogy minden koordinátasorozatból kiválasztunk egy konvergens részsorozatot, és a_n azon tagjait hagyjuk meg, amiknek minden koordinátája a megfelelő koordinátasorozat részsorozatában van. (Hf: miért?) Ehelyett: kiválasztunk az első koordinátasorozatból egy konvergens részsorozatot, és a_n-nek vesszük azt a részsorozatát, amelynek első koordinátái az első koordinátasorozatból kiválasztott részsorozatban vannak. Így a_n egy olyan részsorozatat kapjuk (nevezzük ezt b_n-nek), aminek első koordinátasorozata konvergens. b_n második koordinátáinak sorozata korlátos, tehát van konvergens részsorozata; legyen c_n b_n azon részsorozata, amelynek második koordinátái ebben a részsorozatban vannak. c_n tehát a_n olyan részsorozata, aminek első két koordinátasorozata konvergens. Ha $k = 2$, akkor ezzel kész is vagyunk; ha $k > 2$, akkor a fentihez hasonló módon a maradék $k-2$ koordináta szerint is „szűrnünk” kell. □

Ez a bizonyítás csak véges dimenzióra működik, és ennek így is kell lennie, mert végtelen dimenzióra nem igaz a tétel.

2. Topológia

Az alábbi fogalmak minden metrikus téren (halmaz, és rajta egy távolság) értelmesek, de az állítások egy része nem lesz minden ilyenen igaz, a bizonyításukban használnunk kell $\mathbb{R}^k$ tulajdonságait.

2.1. Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{R}^k$.

(1) x belső pontja H-nak, ha van olyan $\epsilon > 0$, amire $S_\epsilon(x) \subseteq H$. (Speciel: ilyenkor $x \in H$.)
(2) x külső pontja H-nak, ha van olyan $\epsilon > 0$, amire $S_\epsilon(x) \cap H = \emptyset$. (Azaz ha belső pontja $\sim H$-nek (H komplementerének).) (Speciel: ilyenkor $x \notin H$.)
(3) x határpontja H-nak, ha sem nem belső, sem nem külső pontja H-nak. (Azaz ha x minden környezete metszi H-t és $\sim H$-t is.)

2.2. *Megjegyzés.* Határpontja lehet eleme is meg nem is egy halmaznak: pl. egy félig zárt intervallum végpontjai $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$-ben.

2.3. Következmény. *Ha $H \subseteq \mathbb{R}^k$, akkor minden $x \in \mathbb{R}^k$-ra a definícióbeli három tulajdonság közül pontosan egy áll fenn.*

Bizonyítás. Az utolsó pontosan akkor áll, ha az első kettő egyike sem. Tehát elég azt belátni, hogy az első kettő nem állhat fenn egyszerre. De ez igaz, mert az elsőből $x \in H$, a másodikból meg $x \notin H$ következik. □

2.4. *Megjegyzés.* Az, hogy x pl. belső pontja-e H-nak, függ attól is, hogy mi a tér (mert mások a környezetek). Pl. $(0,1)$ minden pontja belső pontja $(0,1)$-nek $\mathbb{R}^1$-ben, de határpontja $\mathbb{R}^2$-ben.

2.5. *Feladat.* (1) $\sim H$ belső pontjai H külső pontjai.
(2) $\sim H$ határpontjai H határpontjai.

2.6. Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{R}^k$.

(1) x torlódási pontja H-nak, ha minden $\epsilon > 0$-ra $H \cap \mathring{S}_\epsilon(x) \neq \emptyset$.

(2) x izolált pontja H-nak, ha $x \in H$, de nem torlódási pontja H-nak. (Azaz ha van olyan $\epsilon > 0$, amire $H \cap \mathrm{S}_\epsilon(x) = \{x\}$.)

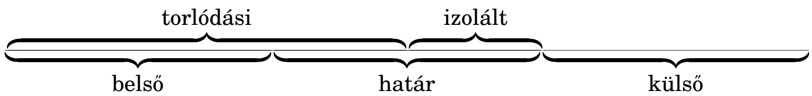
2.7. Példák. Az $\{1/n : n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a 0 az egyetlen torlódási pontja, tehát az összes pontja izolált pontja. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$-nek nincs torlódási pontja, tehát minden pontja izolált pontja.

2.8. *Feladat.* x torlódási pontja H-nak, ha minden $\epsilon > 0$-ra $H \cap \mathrm{S}_\epsilon(x)$ végtelen.

2.9. Állítás. *Legyen* $H \subseteq \mathbb{R}^k$.

(1) *ha H véges, akkor nincs torlódási pontja; következésképp*
(2) *ha H véges, akkor minden pontja izolált pontja*
(3) *ha x belső pontja, akkor torlódási pontja is H-nak*
(4) *ha x határpontja, akkor torlódási pontja vagy izolált pontja H-nak*
(5) *ha x izolált pontja, akkor határpontja is H-nak.*
(6) $\{x :$ *x belső vagy határpontja H-nak*$\} = \{x :$ *x torlódási vagy izolált pontja H-nak*$\}$ *(ld. ábra!)*

2.10. *Megjegyzés.* Torlódási pont lehet a határon is (pl. $\mathbb{R}$-ben egy intervallum végpontja) és lehet eleme vagy nem eleme a halmaznak.



Bizonyítás. (1) Ha $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$, akkor minden x-re $H \cap \mathring{\mathrm{S}}_\epsilon(x) = \emptyset$, ahol $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{d}(x, x_i) : 0 < i \le n, x \neq x_i\} > 0$.

(3) Ha x belső pontja H-nak, akkor $\mathrm{S}_\epsilon(x) \subseteq H$ valamilyen $\epsilon > 0$-ra. De akkor minden $\eta > 0$-ra

$$H \cap \mathring{\mathrm{S}}_\eta(x) \supseteq \mathrm{S}_\epsilon(x) \cap \mathring{\mathrm{S}}_\eta(x) = \mathring{\mathrm{S}}_{\min(\epsilon,\eta)}(x) \neq \emptyset.$$

(4) Ha $x \in H$, akkor definíció szerint torlódási vagy izolált pontja H-nak. Ha meg $x \notin H$, akkor minden $\epsilon > 0$-ra $H \cap \mathring{\mathrm{S}}_\epsilon(x) = H \cap \mathrm{S}_\epsilon(x) \neq \emptyset$, mert x határpontja H-nak.

(5) Ha x izolált pontja H-nak, akkor $x \in H$ miatt nem lehet külső pontja H-nak; de belső sem, mert akkor (3) miatt torlódási pontja lenne H-nak, ami ellentmondás.

(6) ($\subseteq$) (3) és (4) miatt.

($\supseteq$) (5) miatt csak annyi kell ehhez, hogy torlódási pont nem lehet külső pont, de ez közvetlenül következik a két fogalom definíciójából. □

2.11. *Feladat.* A fenti hat állítás közül melyekben használtuk, hogy euklideszi térben vagyunk?

2.12. *Feladat.* (1) Ha $x \notin H$, akkor x pontosan akkor határpontja H-nak, ha torlódási pontja H-nak.
(2) Ha $x \in H$, akkor x pontosan akkor határpontja H-nak, ha torlódási pontja $\sim H$-nak.

2.13. Tétel. *Legyen* $H \subseteq \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^k$. *a pontosan akkor torlódási pontja H-nak, ha van olyan H-beli* $a_n (\neq a)$ *sorozat, amelyre* $\lim a_n = a$.

Vagyis a akkor torlódási pontja H-nak, ha lehet nemtriviális módon tartani a-hoz egy H-beli sorozattal. Az $a_n \neq a$ kikötés elég ha valamilyen indextől kezdve teljesül (hiszen akkor az a_n sorozatnak van olyan részsorozata, aminek már minden tagjára teljesül).

Bizonyítás. (⇒) A feltevés miatt minden n-re $\exists a_n \in H \cap \mathring{S}_{1/n}(a)$ és ez a sorozat trv. a-hoz tart.

(⇐) Ha a_n a feltételbeli sorozat és $\epsilon > 0$, akkor $H \cap \mathring{S}_\epsilon(a) \neq \emptyset$, mert $a_m \in$ ha m nagyobb az ϵ-hoz tartozó küszöbindexnél. □

2.14. Definíció. $H \subseteq \mathbb{R}^k$ nyílt ($\mathbb{R}^k$-ban), ha H minden pontja belső pontja. Zárt, ha minden torlódási pontját tartalmazza.

2.15. *Feladat.* $S_\epsilon(x)$ és $\mathring{S}_\epsilon(x)$ mindig nyílt $\mathbb{R}^k$-ban; speciel nyílt intervallum mindig nyílt $\mathbb{R}$-ben. Zárt intervallum zárt $\mathbb{R}$-ben, mert ha $x \notin I$, akkor x-nek van I-től diszjunkt környezete, tehát nem lehet torlódási pontja I-nek; ugyanezért $[a,\infty)$ és $(-\infty,a]$ zárt $\mathbb{R}$-ben. $\emptyset$ és $\mathbb{R}^k$ nyílt is és zárt is $\mathbb{R}^k$-ban.

Minden véges halmaz zárt 2.9(1) miatt. A legtöbb halmaz se nem nyílt, se nem zárt.

Itt is fontos, hogy milyen térben nézzük: pl. $(0,1)$ nyílt $\mathbb{R}$-ben, de nem nyílt (nincs is belső pontja) $\mathbb{R}^2$-ben.

2.16. *Feladat.* Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^k$.

(1) H pontosan akkor nyílt (zárt) ($\mathbb{R}^k$-ban, de ezt a továbbiakban nem írjuk ki) ha $\sim H (= \mathbb{R}^k \setminus H)$ zárt (nyílt).
(2) H pontosan akkor nyílt, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza.
(3) H pontosan akkor zárt, ha minden határpontját tartalmazza.
(4) A nyílt halmazok családja zárt tetszőleges unióra és véges metszetre (azaz ha a H_i halmazok ($i \in I$) nyíltak, akkor $\cup_{i\in I} H_i$ is nyílt, és ha I véges, akkor $\cap_{i\in I} H_i$ is nyílt).
(5) A zárt halmazok családja zárt tetszőleges metszetre és véges unióra.
(6) H belső pontjainak halmaza nyílt.
(7) H külső pontjainak halmaza nyílt.
(8) H határpontjainak halmaza zárt.
(9) H torlódási pontjainak halmaza zárt.

(4)-ben és (5)-ben a „véges" kikötés nem hagyható el. Pl. $(0, 1+\frac{1}{n})$ nyílt minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra, de $\cap_{n\in\mathbb{N}^+}(0,1+\frac{1}{n}) = (0,1]$ nem.

2.17. Tétel. *H pontosan akkor zárt, ha minden konvergens H-beli sorozat határértéke H-ban van. („H-ból nem lehet kikonvergálni.")*

Bizonyítás. (⇒) Legyen a_n konvergens H-beli sorozat, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ha $a \notin H$, akkor 2.13 feltétele teljesül a sorozatra (mivel minden n-re $H \ni a_n \neq a \notin H$), tehát a H egy nem H-beli torlódási pontja, ami ellentmond H zártságának.

(⇐) 2.13 miatt H minden torlódási pontja egy H-beli sorozat határértéke, ami viszont a feltevés miatt H-beli. H tehát az összes torlódási pontját tartalmazza. □

2.18. Tétel (Cantor–axióma $\mathbb{R}^k$-ban)**.** *Ha $\mathbb{R}^k \supseteq H_0 \supseteq \ldots \supseteq H_n \supseteq \ldots$ és minden n-re $\emptyset \neq H_n$ korlátos és zárt, akkor $\cap_{n\in\mathbb{N}} H_n \neq \emptyset$.*

Mint $\mathbb{R}$-ben, sem a korlátosság, sem a zártság nem hagyható el. Korlátosság nem hagyható el: $H_n = [n,\infty)$ (vagy $H_n = [n,\infty) \cap \mathbb{N}$ — ezekről is könnyen látható, hogy zártak (nincs torlódási pontjuk)). Zártság nem hagyható el: $H_n = (0, 1/n)$.

Bizonyítás. Legyen $a_n \in H_n$ tetszőleges; az így kapott sorozat korlátos, mert $\subseteq H_0$, ezért a Bolzano-Weierstrass tétel miatt van konvergens, mondjuk b-hez tartó részsorozata; és ennek (mert már az eredeti sorozatnak is) minden n-re H_n véges sok kivételével az összes tagját, és így 2.17 miatt a határértékét is tartalmazza. Tehát $b \in \cap_{n\in\mathbb{N}} H_n$. □

2.19. Tétel (Borel-féle lefedési tétel)**.** *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^k$ zárt és korlátos, $H_i \subseteq \mathbb{R}^k$ ($i \in I$) nyílt és $K \subseteq \cup_{i\in I} H_i$, akkor van olyan véges $J \subseteq I$, amire $K \subseteq \cup_{i\in J} H_i$. Azaz: korlátos zárt halmaz minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

(Ezt használtuk A1-ben a Heine–tétel bizonyításában.)

Sem a korlátosság, sem a zártság nem hagyható el. Korlátosság: $\mathbb{R} \subseteq \cup_{z\in\mathbb{Z}}(z-1, z+1)$ (ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli), de ebből nem választható ki véges lefedés, mert ha J véges része $\mathbb{Z}$-nek, akkor $\cup_{z\in J}(z-1, z+1)$ korlátos, tehát nem tartalmazhatja részhalmazként $\mathbb{R}$-et, ami nem. Zártság: $(0,1) \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}^+}(0, 1-\frac{1}{n})$, de ebből nem választható ki véges lefedés, mert $1-\frac{1}{N} \notin \cup_{n<N}(0, 1-\frac{1}{n})$.

3. Többváltozós függvények

3.1. Definíció. f m-változós, valós értékű függvény, ha $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ valamilyen $H \subseteq \mathbb{R}^m$-re. f grafikonja: $\{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) : (x_1, \dots, x_m) \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

3.2. Példák. Valós számok összeadása: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ az x, y, z élhosszúságú téglatest térfogata.

3.3. Definíció. Az f kétváltozós függvény $c \in \mathbb{R}$-hez tartozó szintvonala: f grafikonjának és a $z = c$ sík metszetének vetülete a $z = 0$-síkra, azaz $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$.

A szintvonal persze nem biztos, hogy „vonal": pl. lehet $\emptyset$ (ha $c \notin \mathrm{Ran} f$), vagy az egész $z = 0$ sík (hf: mikor?).

3.4. Definíció. f m-változós, vektor értékű függvény, ha $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ valamilyen $H \subseteq \mathbb{R}^m$-re és $p > 1$-re.

3.5. Példák.
- Tükrözés a síkon az $y = x$ egyenesre: $f(x, y) = (y, x)$ ($m = p = 2$)
- Egyenes paraméteres egyenlete: ha r_0, $v \in \mathbb{R}^3$, akkor $t \mapsto r_0 + tv$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ függvény. Koordinátánként felírva: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$, ahol $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $v = (a, b, c)$.

Általában is, $\mathbb{R}^p$-be képező függvények „szétszedhetők" p db. valós értékű függvényre (a függvény *koordinátafüggvényeire*). (Sorozatoknál ezeket koordinátasorozatoknak hívtuk.) Ha $f : H \to \mathbb{R}^p$, $i \in \{1, \dots, p\}$, akkor f i. koordinátafüggvénye: $f_i : H \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = f(x)_i$ minden $x \in H$-ra. Tehát $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ minden $x \in H$-ra.

A fenti első példában $f_1(x, y) = y$, $f_2(x, y) = x$. A másodikban $f_1(t) = x_0 + at, \dots, f_3(t) = z_0 + ct$.

Műveletek többváltozós függvényeken

(1) Mint eddig is mindig: az értékkészleten értelmezett műveletek indukálnak egy műveletet az oda képező függvényeken (amit rendszerint ugyanúgy hívunk és jelölünk). Pl. ha $f : H_1 \to \mathbb{R}^p$, $g : H_2 \to \mathbb{R}^p$, akkor $f \pm g : H_1 \cap H_2 \to \mathbb{R}^p$, és $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ minden $x \in H_1 \cap H_2$-re. Hasonlóan: $cf : H_1 \to \mathbb{R}^p$, $(cf)(x) = cf(x)$ minden $x \in H_1$-re. Ha $p = 1$, akkor $f \cdot g$, f/g is értelmes (persze utóbbi nem feltétlenül az egész $H_1 \cap H_2$-n).

(2) Függvénykompozíció: ha $f : H \to \mathbb{R}^p$, $g : K \to \mathbb{R}^q$, ahol $K \subseteq \mathbb{R}^p$, akkor $g \circ f : H^- \to \mathbb{R}^q$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ minden $x \in H^-$-ra, ahol $H^- = \{x \in H : f(x) \in K\}$.

(3) Inverzfüggvény.

4. Határérték, folytonosság

Ahogy a sorozatoknál, a határérték (és a folytonosság) definíciója is ugyanaz, mint egyváltozóban, csak $|x-y|$ helyett $\mathrm{d}(x,y)$-t írunk.

4.1. Definíció. Legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}\, f$-nek.
$\lim_{x\to a} f(x) = b$, ha

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{\mathrm{S}}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}\, f)(f(x) \in \mathrm{S}_\epsilon(b)).$$

Ha f valós értékű, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, ha

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{\mathrm{S}}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}\, f)(f(x) > K).$$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$-t analóg módon definiáljuk.

4.2. *Megjegyzés.* Azért szükséges az „a torlódási pontja $\mathrm{Dom}\, f$-nek” megkötés, mert ha a nem az, akkor minden b-re $\lim_{x\to a} f(x) = b$ lenne, hiszen akkor volna olyan $\delta > 0$, amire $\mathring{\mathrm{S}}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}\, f = \emptyset$, és ezért erre a δ-ra igaz, hogy $(\forall x \in \mathring{\mathrm{S}}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}\, f)(f(x) \in \mathrm{S}_\epsilon(b))$, akármi is $\epsilon > 0$.

Példa végtelen határértékre: $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$. $\lim_{(1,1)} |f| = \infty = \lim_{(1,1)}(f \restriction \{(x,y) : x > y\}$.

4.3. *Feladat.* Definiáljuk $\lim_\infty f$-et ($\lim_{-\infty} f$-et) ha $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R}$ nem korlátos felülről (alulról).

4.4. Definíció. f folytonos $a \in \mathrm{Dom}\, f$-ben, ha a izolált pontja $\mathrm{Dom}\, f$-nek vagy $\lim_{x\to a} f = f(a)$. f folytonos egy halmazon, ha annak minden pontjában folytonos.

Ahogy egyváltozóban, úgy most is, az $a \in \mathrm{Dom}\, f$-beli folytonosság ekvivalens azzal, hogy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathrm{S}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}\, f)(f(x) \in \mathrm{S}_\epsilon(f(a))).$$

Könnyű látni (hf!), hogy a konstansfüggvények és az identitásfüggvények (hf: miért kell többesszám?) mindenütt folytonosak

4.5. *Feladat**. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pontosan akkor folytonos, ha $\mathbb{R}^m$ minden nyílt részhalmazának f szerinti ősképe nyílt $\mathbb{R}^n$-ben.

Vigyázat: nem lehet „változónként” számolni határértéket. Pl.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} \neq \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y}) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

(akkor már miért nem $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y}) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1$?). Valójában meg $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$, mert a függvény az x tengely mentén konstans 1, az y tengely mentén konstans -1.

4.6. Állítás. *Ha* $\mathrm{Ran}\, f \subseteq \mathbb{R}^p$ *és* f *koordinátafüggvényei* $f_1, \ldots, f_p$, *akkor* $\mathrm{Dom}\, f$ *minden* a *torlódási pontjára*

$$\exists \lim_a f \iff (\forall i \in \{1, \ldots, p\}) \exists \lim_a f_i$$

és ilyenkor $\lim_a f = (\lim_a f_1, \ldots, \lim_a f_p)$.

Vagyis a határérték i. koordinátája az i. koordinátafüggvény határértéke. Ezért mindig csak valós értékű függvények határértékét fogjuk számolni.

4.7. Következmény. *Vektorértékű függvény pontosan akkor folytonos egy pontban, ha ott minden koordinátafüggvénye folytonos. Speciálisan, az identitásfüggvények koordinátafüggvényei (az ún. vetítések, vagy projekciók) folytonosak.*

4.6 analóg 1.8(2)-vel, és következik is abból az átviteli elv segítségével, mert

$$\lim_a f = b \iff (\forall a_n \to a (a \notin \{a_n\} \subseteq H) \text{ sorozatra}) f(a_n) \to b$$
$$\iff (\forall i \in \{1, \ldots, p\})(\forall a_n \to a (a \notin \{a_n\} \subseteq H) \text{ sorozatra}) f_i(a_n) = (f(a_n))_i \to b_i$$
$$\iff (\forall i \in \{1, \ldots, p\}) \lim_a f_i = b_i$$

ahol az első és utolsó ekvivalencia az átviteli elv, a középső 1.8(2) miatt igaz.

4.8. Tétel (Átviteli elv)**.** *Ha $f : H \to \mathbb{R}^p$, a torlódási pontja H-nak (vagy $H \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos és $a = \infty$ ($a = -\infty$)) és $b \in \mathbb{R}^p$ (ha $p = 1$, akkor b lehet $\pm\infty$ is), akkor $\lim_a f = b$ pontosan akkor, ha minden H-beli a-hoz tartó a_n sorozatra, amire $a_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.*

Bizonyítás. Mint egyváltozóban. □

4.9. Következmény. *f pontosan akkor folytonos $a \in \operatorname{Dom} f$-ben, ha minden $\operatorname{Dom} f$-beli, a-hoz tartó a_n sorozatra $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.*

Bizonyítás. Ha a izolált pontja $\operatorname{Dom} f$-nek, akkor a baloldal definíció szerint igaz, a jobboldal meg azért, mert $\operatorname{Dom} f$-beli sorozat csak triviális módon tud a-ba tartani, azaz minden ilyen a_n sorozatra valamilyen indextől kezdve $a_n = a$ és így $f(a_n) = f(a)$.

Ha nem, azaz a torlódási pontja $\operatorname{Dom} f$-nek, akkor definíció szerint a baloldal pontosan akkor igaz, ha $\lim_a f = f(a)$, ami az átviteli elv miatt azzal ekvivalens, hogy minden $\operatorname{Dom} f$-beli a-hoz tartó a_n sorozatra, amire $a_n \neq a$ minden n-re, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$; ez viszont ekvivalens a (látszólag erősebb, mert több sorozatról beszélő) jobboldallal, mert az $a_n \neq a$ megkötésnek nincs szerepe, hiszen $a \in \operatorname{Dom} f$ és $f(a)$-hoz való konvergenciát nézünk. □

Az átviteli elvből (és persze a pontsorozatokra vonatkozó megfelelő tételekből, mint pl. 1.10) jön ki a határérték egyértelműsége, meg az is, hogy az alapműveletek és a határértékképzés felcserélhető.

4.10. Tétel. *A szokásos feltételek mellett (a lehet $\pm\infty$ is ha $\operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R}$) ha $\lim_a f = p$, $\lim_a g = q$, akkor $\lim_a f \pm g = p \pm q$, $\lim_a cf = cp$; ha f, g valós értékűek, akkor $\lim_a fg = pq$, és ha $q \neq 0$, akkor $\lim_a f/g = p/q$.*

4.11. Következmény. *Folytonos függvények összege és skalárszorosa is folytonos. Ha valós értékűek, akkor a szorzatuk is, és a nevező zérushelyeinek kivételével a hányadosuk is az.*

Következésképp a racionális törtfüggvények (polinomok hányadosai), mint pl. $\frac{x+y^2}{2+3x^2+y^3}$, a nevező zérushelyeinek kivételével folytonosak. Ehhez az is kell, hogy a vetítések ($\pi_i(x) = x_i$) folytonosak; de ez igaz 4.7 miatt. (Ott használjuk ezt, hogy a példabeli kétváltozós függvény argumentuma (x, y), amiből vetítéssel kapjuk meg x-et és y-t.)

4.12. Tétel. *(Összetett függvény határértéke) Ha $f : H \to \mathbb{R}^p$, $\lim_a f = b$, $g : K \to \mathbb{R}^q$, $K \subseteq \mathbb{R}^p$, $\lim_b g = c$, a torlódási pontja $\operatorname{Dom}(g \circ f)$-nek, és a-nak van olyan környezete, ahol f nem veszi fel b-t, akkor $\lim_a g \circ f = c$. (Ez igaz végtelenekben vett és végtelen határértékekre is, ha ezeknek van értelmük.)*

Vagyis a tétel pontosan úgy szól, mint a régi, valós függvényekre vonatkozó tétel, ami ennek persze speciális esete. Az extra feltétel („a-nak van olyan környezete...") ezért aztán ugyanúgy nem hagyható el, mint abban.[1]

4.13. Következmény. *Ha f folytonos a-ban és g folytonos $f(a)$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos a-ban. Vagyis: folytonos függvények kompozíciója folytonos.*

5. Kompakt halmazokon folytonos függvények

Mi marad meg a három, zárt intervallumon folytonos függvényekről szóló tételből (Weierstrass, Bolzano, Heine) most, hogy nincs „intervallum"?

Weierstrass

5.1. Tétel (Weierstrass)**.** *Ha f folytonos a K zárt, korlátos halmazon, akkor $f(K)$ (K f szerinti képe) zárt és korlátos.*

Vagyis az egyváltozós tétel feltételeiből a zártság és a korlátosság volt fontos, az „intervallumság" (összefüggőség) nem.

Bizonyítás. (I) $f(K)$ korlátos:

Tegyük fel, hogy nem. Akkor van egy $a_n \in K$ sorozat, hogy minden n-re $\mathrm{d}(0, f(a_n)) > n$. Mivel a_n korlátos, a Bolzano-Weierstrass tétel miatt van konvergens részsorozata (hívjuk ezt b_n-nek); legyen $b = \lim b_n$. $b \in K$, mert K-ból zártsága miatt nem lehet kikonvergálni (2.17). $b \in K$ miatt f folytonos b-ben, ezért 4.9 miatt $f(b_n) \to f(b)$, és így $f(b_n)$ konvergens, noha nem korlátos, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$n \le m < \mathrm{d}(0, f(a_m)) = \mathrm{d}(0, f(b_n)),$$

ahol $m \ge n$ a b_n indexe az eredeti sorozatban.

(II) $f(K)$ zárt:

2.17 miatt azt kell megmutatnunk, hogy nem lehet belőle kikonvergálni. Tegyük fel, hogy igen, azaz van olyan $f(K)$-beli konvergens y_n sorozat, amire $\lim y_n \notin f(K)$. Minden n-re legyen $a_n \in K$ y_n egy őse (azaz $f(a_n) = y_n$). Akkor a_n korlátos sorozat, a Bolzano-Weierstrass tétel miatt tehát van konvergens részsorozata (hívjuk ezt megint b_n-nek); mint az előző részben, $b = \lim b_n \in K$, tehát f folytonos b-ben, és így

$$f(K) \ni f(b) = \lim f(b_n) = \lim f(a_n) = \lim y_n \notin f(K)$$

(ahol az első egyenlőség f b-beli folytonossága és 4.9 miatt áll fenn, a második meg azért, mert $f(a_n) = y_n$ konvergens sorozat, aminek $f(b_n)$ részsorozata), ami ellentmondás. □

5.2. *Megjegyzés.* A Weierstrass–tételből következik, hogy ha f valós értékű, akkor zárt, korlátos halmazon felveszi a minimumát és a maximumát. Nézzük a maximumot! A tétel miatt $f(K)$ felülről korlátos, tehát van legkisebb felső korlátja, mondjuk s. Azt kell belátni, hogy $s \in f(K)$. De ha nem, akkor $f(K)$ zártsága miatt[2] s külső pontja $f(K)$-nak, vagyis van attól diszjunkt környezete, és abban minden s-nél kisebb szám is felső korlátja $f(K)$-nak, ami ellentmond annak, hogy s a legkisebb.

---

[1] Ez a példa mutatja: $f(x) = 0$, $g(y) = 1/|y|$ ha $y \ne 0$ és $g(0) = 0$, akkor, mivel $g \circ f$ a konstans 0 függvény, $\lim_0 g \circ f = 0 \ne \infty = \lim_{\lim_0 f} g$.

[2] 2.9(4) miatt nem lehet határpontja

Bolzano Egyváltozós példákból (pl.: az identitásfüggvény $[0,1]\cup[2,3]$-on) tudjuk, hogy a Bolzano-tétel feltételei közül nem hagyható el az, hogy a függvény egy *intervallumon* folytonos. Ha tehát többváltozós függvényekre is be akarjuk látni a tételt, meg kell találnunk az intervallum fogalmának erre alkalmas, magasabb dimenzióra való általánosítását. Így jutunk el az összefüggőség fogalmához, aminek csak egy speciális, könnyen kezelhető variánsát fogjuk definiálni.[3]

5.3. Definíció. $H \subseteq \mathbb{R}^k$ poligoniálisan összefüggő (p.ö.f.), ha H bármely két pontja összeköthető egy H-beli töröttvonallal. Azaz: ha minden p, $q \in H$-hoz vannak olyan $p_1, \dots, p_n$ pontok, hogy $p = p_1$, $p_n = q$, és minden $i \in \{1, \dots, n-1\}$-re és $t \in [0,1]$-re $p_i + t(p_{i+1} - p_i) = (1-t)p_i + tp_{i+1} \in H$.

5.4. Tétel (Bolzano–tétel valós értékű függvényekre)**.** *Ha f folytonos a p.ö.f. $H \subseteq \mathbb{R}^m$ halmazon, p, $q \in H$ és $f(p) < c < f(q)$, akkor $f(a) = c$ valamilyen $a \in H$-ra.*

Bizonyítás. p.ö.f.-ség miatt vannak olyan $p_1, \dots, p_n$ pontok, hogy $p = p_1$, $p_n = q$, és minden $i \in \{1, \dots, n-1\}$-re az i.-et az $i+1$.-kel összekötő szakasz része H-nak.

Ha $f(p_i) = c$ valamelyik $i \in \{1, \dots, n-1\}$-re, akkor készen vagyunk. Máskülönben viszont feltehetjük, hogy valamelyik $i \in \{1, \dots, n-1\}$-re $f(p_i) < c < f(p_{i+1})$ ($i = \max\{j : f(p_j) < c\}$ pl. ilyen). Legyen $g(t) = f((1-t)p_i + tp_{i+1})$; g folytonos, mert folytonos függvények kompozíciója: f-ről feltettük, hogy folytonos, a belső függvény ($(1-t)p_i + tp_{i+1} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$) meg azért az, mert a koordinátafüggvényei azok. De akkor $g : [0,1] \to \mathbb{R}$-re alkalmazható az egyváltozós Bolzano–tétel, azaz, mivel $g(0) = f(p_i) < c < f(p_{i+1}) = g(1)$, van olyan $t_0 \in [0,1]$, amire $g(t_0) = c$. Tehát $a = (1-t_0)p_i + t_0 p_{i+1} \in H$ (hiszen az egész $p_i p_{i+1}$ szakasz $\subseteq H$) és $f(a) = c$.

□

Heine

5.5. Definíció. f egyenletesen folytonos a $H \subseteq \operatorname{Dom} f$ halmazon, ha

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in H)(\forall x \in \mathrm{S}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom} f)(f(x) \in \mathrm{S}_\epsilon(f(a))).$$

Vagyis az egyenletes folytonosságot is pontosan úgy definiáljuk, mint egyváltozóban. És természetesen most is következik az egyenletes folytonosságból a folytonosság, de fordítva nem, amint azt a régi ellenpéldák mutatják. Ezért érdekes a Heine–tétel, ami azt mondja, hogy kompakt halmazokon igen.

5.6. Tétel (Heine)**.** *Ha f folytonos egy zárt, korlátos halmazon, akkor egyenletesen folytonos ott.*

Bizonyítás. 2.19 következménye. Ennél többet nem is kell tudnunk róla. □

6. Lineáris leképezések

6.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény lineáris leképezés, ha megtartja az összeadást és a skalárral való szorzást, azaz minden x, $y \in \mathbb{R}^n$-re és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $f(x+y) = f(x) + f(y)$ és $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Ezzel a fogalommal nemsokára egy kicsit általánosabb környezetben is találkozunk.

[3]Az általános fogalom definíciója így szól: H összefüggő, ha minden A, B nyílt halmazra $H \subseteq A \cup B$ és $A \cap B = \emptyset$-ból $H \subseteq A$ vagy $H \subseteq B$ következik.

6.2. Példák.
- konstans 0 függvény
- a többi konstans-függvény nem (miért? a következő állítás segíthet)
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identitásfüggvény
- $f(x,y) = (y,x)$

Az utolsó példaban szereplő függvény azért lineáris, mert

$$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2,y_1+y_2) = (y_1+y_2,x_1+x_2) = (y_1,x_1)+(y_2,x_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$

és

$$f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda y,\lambda x) = \lambda(y,x) = \lambda f(x,y)$$

Mindkét esetben az első és harmadik egyenlőségben az alapműveletek, a másodikban és a negyedikben pedig f definícióját használtuk.

6.3. Állítás. *Ha f lineáris leképezés, akkor $f(0) = 0$.*

Bizonyítás. $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$. □

Mivel minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor felírható $\sum_{j=1}^n x_j e_j$ alakban, ahol $e_j = (0,\dots,0,\overset{j}{1},0,\dots,0)$ a j. alapvektor, és mivel a felírásban csak összeadás és skalárral való szorzás szerepel, egy lineáris leképezést meghatároz az, hogy hova képezi az alapvektorokat, hiszen ha f lineáris leképezés, akkor az előbbiek miatt

$$(*) \qquad f(x_1,\dots,x_n) = f\left(\textstyle\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \textstyle\sum_{j=1}^n x_j f(e_j).$$

Vagyis az $\mathbb{R}^n$-ből képező lineáris leképezéseket meg lehet adni n db. adattal: az n db. alapvektor képeivel. Ha $m = 1$ (és először ezt az esetet nézzük), akkor n db. számmal, hiszen minden alapvektor képe egy szám. És ha ezt az n db. számot rendezett n-esként írjuk fel (legyen ez $v = (f(e_1),\dots,f(e_n))$), akkor tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $x = (x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ vektor képe $(*)$ szerint $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = xv$, vagyis v és x skaláris szorzata. Ezzel megkaptuk a következő állítás második (és érdekesebb) felét.

6.4. Állítás. *Minden $v \in \mathbb{R}^n$-re a v-vel való skaláris szorzás $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor f az $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ vektorral való skaláris szorzás.*

Bizonyítás. Az első felének belátása egyszerű számolás; mellesleg $n \le 3$-ra tanultuk (ha nem is ilyen néven) első félévben. □

6.5. *Megjegyzés.* Mi lesz az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés grafikonjának egyenlete? Tegyük fel, hogy $b = (b_1,b_2)$ az f-et reprezentáló vektor (vagyis az a vektor, amire $f(x,y) = b\cdot(x,y)$). Akkor $z = f(x,y) = b\cdot(x,y) = b_1x + b_2y$, átrendezve: $b_1x + b_2y - z = 0$, vagyis az origóra illeszkedő, $(b_1,b_2,-1)$ normálvektorú sík. És magasabb dimenziókban is: az $x \mapsto bx$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés grafikonja a $(b_1,\dots,b_n,-1)$ normálvektorú, origóra illeszkedő „hipersík".

Hogy lehet megadni egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést ha $m > 1$? Egyetlen változás van a fentiekhez képest: mivel az alapvektorok képei nem számok, hanem m-dimenziós vektorok, az f megadásához szükséges n db. adat nem n db. szám, hanem n db. m-dimenziós vektor, vagyis rendezett m-es. Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy lehet ezzel az n db. vektorral számolni, érdemes megpróbálni visszavezetni az $m > 1$ esetet az $m = 1$ esetre. Mégpedig oly módon, ahogy vektor értékű függvények tulajdonságait valós értékű függvények tulajdonságaira korábban is visszavezettük: a koordinátafüggvényeiken keresztül.

Először is, azt állítjuk, hogy

6.6. Állítás. *Lineáris leképezések kompozíciója is lineáris leképezés.*

Bizonyítás. Ha g, h lineáris, akkor

$$h(g(x+y)) = h(g(x)+g(y)) = h(g(x)) + h(g(y))$$

és

$$h(g(\lambda x)) = h(\lambda g(x)) = \lambda h(g(x)),$$

ahol mind a kétszer először g, aztán h linearitását használtuk. □

6.7. Következmény. *Lineáris leképezés koordinátafüggvényei is lineáris leképezések.*

Bizonyítás. Mivel f i. koordinátafüggvénye $f_i = \pi_i \circ f$, az előző állítás miatt ehhez elég azt tudni, hogy a vetítések ($\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i$) azok; ez viszont igaz az $\mathbb{R}^m$-beli műveletek definíciója miatt. □

6.8. *Feladat.* Az állítás megfordítása is igaz, azaz ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-nek mind az m koordinátafüggvénye lineáris, akkor f is az.

De akkor f_i a 6.4 állítás miatt az $(f_i(e_1), \dots, f_i(e_n))$ vektorral való skaláris szorzás, azaz minden $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$-re

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1(e_1), \dots, f_1(e_n)) \cdot x \\ \vdots \\ (f_m(e_1), \dots, f_m(e_n)) \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(e_1) & \dots & f_1(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(e_1) & \dots & f_m(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ahol az első egyenlőségben azt használjuk, hogy f_i az f i. koordinátafüggvénye, a másodikban 6.4-et, a harmadik meg a mátrix és vektor szorzatának most következő definíciója, tehát nem megérteni, hanem megtanulni kell:

6.9. Definíció. Az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$-es mátrix szorzata a $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ n-dimenziós oszlopvektorral az

$$Ab = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

m-dimenziós oszlopvektor, vagyis az, amelynek i. sora az A i. sora és b skaláris szorzata.

Vagyis f-et most egy $m \times n$-es mátrix-szal reprezentáltuk; és a fentiekkel összhangban a mátrix n db. oszlopvektora rendre az alapvektorok f szerinti képe, hiszen a j. oszlop

$$\begin{pmatrix} f_1(e_j) \\ f_2(e_j) \\ \vdots \\ f_m(e_j) \end{pmatrix} = f(e_j).$$

6.10. Állítás. *Minden A $m\times n$-es mátrixra az $\mathbb{R}^n$-beli vektorok szorzása A-val $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. Ha $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, akkor f egy $m\times n$-es mátrix-szal való szorzás, mégpedig azzal, amelyiknek az i. sora az f_i-t reprezentáló $(f_i(e_1),\dots,f_i(e_n))$ vektor, azaz amelyiknek a j. oszlopa $f(e_j)$.*

Bizonyítás. A második állítást most láttuk be. (Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert mind a két állítás azt mondja, hogy az i. sor j. eleme $f_i(e_j)$.) Az első meg azért igaz, mert az $x\mapsto \underline{\underline{A}}x$ leképezésnek mind az m koordinátafüggvénye az: az i. az $\underline{\underline{A}}$ i. sorával való skaláris szorzás. ☐

6.11. *Feladat.* Mi az $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ identitásfüggvény mátrixa?

6.12. Példa. A síkban a $\pi/2$ szöggel való elforgatás mátrixa $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, hiszen az első alapvektor képe $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, a másodiké $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; és valóban, pl. az $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vektor képe $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Mátrixszorzás Már tudjuk (6.10), hogy a lineáris leképezéseket mátrixok reprezentálják abban az értelemben, hogy a leképezés alkalmazása egy vektorra a leképezés mátrixának és e vektornak a szorzata. Mivel azt is tudjuk, hogy lineáris leképezések kompozíciója is lineáris leképezés, felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet kiszámolni a kompozíció mátrixát a két lineáris leképezés mátrixából.

6.13. Definíció. Azt a műveletet, ami az $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ és $B:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezések $\underline{\underline{A}}$ $m\times n$-es és $\underline{\underline{B}}$ $n\times p$-s mátrixaiból az $A\circ B:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ lineáris leképezés $m\times p$-s mátrixát előállítja, mátrixok szorzásának nevezzük, és $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ szorzatát $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}$-vel vagy egyszerűen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$-vel jelöljük.

6.10 utolsó állítása szerint egy lineáris leképezés mátrixának j. oszlopa a j. alapvektor képe. De akkor $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ j. oszlopa $(1\le j\le p)$

$$(A\circ B)(e_j)=A(B(e_j))=A(\underline{\underline{b_j}})=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{b_j}},$$

ahol $\underline{\underline{b_j}}$ a $\underline{\underline{B}}$ mátrix j. oszlopát (ami egy n-dimenziós oszlopvektor) jelöli. Az első egyenlőség a függvénykompozíció definíciója, a második 6.10 utolsó állításának alkalmazása B-re és e_j-re, a harmadik pedig 6.10 második állítása miatt igaz. Vagyis a következő állítást kaptuk (amit általában a mátrixszorzás definíciójaként szokás kimondani, és akkor tétel az, hogy mátrixok szorzata az általuk reprezentált lineáris leképezések kompozíciójának mátrixa):

6.14. Állítás. *Ha A $m\times n$-es és B $n\times p$-s mátrix, akkor AB az az $m\times p$-s mátrix, aminek j. oszlopa $(1\le j\le p)$ Ab_j, ahol b_j a B mátrix j. oszlopa.*

6.15. Következmény. *$1\le i\le m$-re és $1\le j\le p$-re az AB mátrix i. sorának j. eleme $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, ahol a_{ik} az A i. sorában és k. oszlopában, b_{kj} a B k. sorában és j. oszlopában álló szám. Vagyis $(AB)_{ij}$ A i. sorának és B j. oszlopának skalárszorzata.*

Bizonyítás. Az állítás miatt azt kell belátnunk, hogy ha b_j a B mátrix j. oszlopa, akkor az Ab_j m-dimenziós oszlopvektor i. koordinátája A i. sorának skalárszorzata b_j-vel. De hát mátrix és oszlopvektor szorzata éppen így volt definiálva. ☐

6.16. *Feladat.* A 2×2-es mátrixok szorzása nem kommutatív.

6.17. Példa. A síkban az origó körüli α szöggel való elforgatás mátrixa $\left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$, hiszen ez az a mátrix, aminek első oszlopa az első, a második oszlopa a második alapvektor α szögű elforgatottja. Ha tehát A az α, B a β szöggel való elforgatás, akkor $A\circ B$ az $\alpha+\beta$ szöggel való elforgatás, ezért a mátrixa egyrészt $\underline{\underline{A\circ B}} = \left(\begin{smallmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{smallmatrix}\right)$, másrészt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A\circ B}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

A két felírás első oszlopait összehasonlítva megkapjuk a cos-ra és sin-ra vonatkozó addíciós képleteket.

7. Derivált

Legyen $f: H\to\mathbb{R}^m$, $H\subseteq\mathbb{R}^n$, a belső pontja H-nak. Az a-beli derivált régi, egyváltozóban megszokott definícióját ($\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) nem használhatjuk módosítás nélkül, mert ebben osztás (ráadásul $\mathbb{R}^m$-belinek $\mathbb{R}^n$-belivel való osztása) szerepel. Ezen még könnyű segíteni, mert már egyváltozóban is,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-b(x-a)}{x-a}=0\\ \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-b(x-a)}{|x-a|}=0 \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-b(x-a)}{\mathrm{d}(x,a)}=0\end{aligned}$$

ahol a második ekvivalenciában azt használtuk, hogy

$$\lim\frac{f}{g}=0 \iff \lim\left|\frac{f}{g}\right|=0 \iff \lim\left|\frac{f}{|g|}\right|=0 \iff \lim\frac{f}{|g|}=0.$$

Ennek már majdnem van értelme többváltozós függvényekre is, csak még azt kellene eldönteni, hogy mi legyen b (a derivált), hiszen szám nem lehet, mert akkor a számlálóban $\mathbb{R}^n$-belit vonnánk ki $\mathbb{R}^m$-beliből.

Egyváltozóban láttuk a derivált következő tulajdonságát: $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+r(x)$, ahol $\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a}=0$, és meg is beszéltük, hogy ez mit jelent: azt, hogy $f'(a)(x-a)$ lineáris közelítése $f(x)-f(a)$-nak a egy környezetében. És ez az a tulajdonsága a deriváltnak, amit többváltozóban is meg akarunk tartani. Ez megoldja a fenti problémát is: b legyen egy $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineáris leképezés (azért $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, mert ilyen a függvény, amit a egy környezetében közelíteni akarunk vele), és $b(x-a)$ ennek a lineáris leképezésnek az alkalmazása $(x-a)$-ra. Vagy, ahogy az előző szakaszból tudjuk, b-t gondolhatjuk $m\times n$-es mátrixnak is, és akkor $b(x-a)$ e mátrix szorzata az $x-a$ vektorral.

7.1. Definíció. Az $f: H\to\mathbb{R}^m$ ($H\subseteq\mathbb{R}^n$) függvény deriválható H egy a belső pontjában, ha van olyan $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, amire

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-B(x-a)}{\mathrm{d}(x,a)}=0.$$

B-t ilyenkor f a-beli deriváltjának mondjuk, és $f'(a)$-val jelöljük.

Tehát a pontbeli derivált egy *függvény*, ami szokatlan gondolat lehet, de nem újdonság: egyváltozóban is az volt, csak ott ezt általában elfedte az a körülmény, hogy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvényeket meg lehet adni egy számmal (ld. előző szakasz!). Ahogyan sokszor most is el fogja fedni az, hogy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéseket, amint az előző szakaszban láttuk, meg lehet adni mátrixokkal.

7.2. Példák.
- A konstansfüggvények mindenütt deriválhatók, és a deriváltjuk mindenütt az azonosan 0 leképezés
- Legyen $f(x) = B(x) + c$, ahol $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $c \in \mathbb{R}^m$. Akkor f mindenütt deriválható, és deriválhatja mindenütt B, mert tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$-ben

$$\lim_{x\to a} \frac{(B(x)+c)-(B(a)+c)-B(x-a)}{\mathrm{d}(x,a)} = \lim_{x\to a} \frac{(B(x)+c)-(B(a)+c)-B(x)+B(a)}{\mathrm{d}(x,a)} = \lim_{x\to a} \frac{0}{\mathrm{d}(x,a)} = 0.$$

Ahogyan már egyváltozóban is: $(bx+c)' = b$.

7.3. Definíció. Ha az $f : H \to \mathbb{R}^m$ ($H \subseteq \mathbb{R}^n$) függvény deriválható H egy a belső pontjában, akkor az $f'(a)$-t (az előző szakaszbeli értelemben) reprezentáló $m \times n$-es mátrixot f a-beli Jacobi-mátrixának, és ha $m = 1$, akkor f a-beli gradiensvektorának, vagy egyszerűen gradiensének nevezzük. Utóbbit $\operatorname{grad} f(a)$-val vagy $\nabla f(a)$-val jelöljük.

Hogy lehet kiszámolni a Jacobi-mátrixot? Először is, elég ezt a kérdést valós értékű függvényekre megválaszolni, a következő miatt.

7.4. Állítás. *Az $f : H \to \mathbb{R}^m$ ($H \subseteq \mathbb{R}^n$) függvény pontosan akkor deriválható H egy a belső pontjában, ha f mind az m koordinátafüggvénye deriválható a-ban; és ilyenkor minden $i \in \{1,\dots,m\}$-re, az $f'(a)$ lineáris leképezés i. koordinátafüggvénye $f_i'(a)$. Következésképp f a-beli Jacobi-mátrixának i. sora* $\operatorname{grad} f_i(a)$.

Bizonyítás. Ha $B = f'(a)$, akkor 4.6 miatt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-B(x-a)}{\mathrm{d}(x,a)} = 0 \iff (\forall i \in \{1,\dots,m\}) \lim_{x\to a} \frac{f_i(x)-f_i(a)-B_i(x-a)}{\mathrm{d}(x,a)} = 0,$$

és ebből 6.7 és 6.8 miatt következik az első állítás. A második meg 6.10 miatt az elsőből, mert aszerint lineáris leképezés (most: B) mátrixának (most: f a-beli Jacobi-mátrixának) i. sora a B i. koordinátafüggvényét (B_i) reprezentáló vektor, azaz, mivel a fenti ekvivalencia jobboldala szerint $B_i = f_i'(a) = \operatorname{grad} f_i(a)$. □

Ezzel a deriválhatóság és a deriválás problémáját visszavezettük valós értékű függvények deriválhatóságának és gradiensük kiszámításának problémájára, úgyhogy foglalkozzunk most ezzel.

Legyen az f (az egyszerűség kedvéért most csak kétváltozós) valós értékű függvény deriválható az $a = (a_1, a_2)$ pontban, és legyen $b = \operatorname{grad} f(a)$. b koordinátáit szeretnénk kiszámolni. Tudjuk:

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)-(b_1,b_2)(x_1-a_1,x_2-a_2)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}} = 0,$$

ahol a baloldalon egy kétváltozós függvény határértéke van. Márpedig ha ez 0, akkor minden görbe mentén is az, speciel az $x_2 = a_2$ egyenes mentén is, azaz

$$0 = \lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1,a_2) - f(a_1,a_2) - b_1(x_1 - a_1)}{|x_1 - a_1|},$$

vagyis $b_1 = g'(a_1)$, ahol g az $x_1 \mapsto f(x_1,a_2)$ *egyváltozós* függvény (ld. e szakasz elején az egyváltozós függvények deriváltja definíciójának ekvivalens változatát!). Hasonlóan, az $x_1 = a_1$ egyenes mentén nézve a fenti határértéket, azt kapjuk, hogy

$$0 = \lim_{x_2 \to a_2} \frac{f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2) - b_2(x_2 - a_2)}{|x_2 - a_2|},$$

vagyis $b_2 = h'(a_2)$, ahol h az $x_2 \mapsto f(a_1,x_2)$ egyváltozós függvény. Ez a gondolatmenet akárhány változóra működik, és így a következőt kapjuk:

7.5. Állítás. *Ha az f n-változós, valós értékű függvény deriválható az a pontban, akkor a*

$$g(x_i) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

egyváltozós függvény deriválható az a_i helyen, és g a_i-beli deriváltja $\operatorname{grad} f(a)$ *i. koordinátája ($i \in \{1,\dots,n\}$).*

7.6. Következmény. *A derivált egyértelmű.*

Bizonyítás. Következik az állításból, mert az egyváltozós deriváltról tudjuk, hogy egyértelmű. □

7.7. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$, a belső pontja H-nak.

(1) f parciálisan deriválható az i. változója (vagy x_i) szerint a-ban, ha az

$$x_i \mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

egyváltozós függvény deriválható a_i-ben. Ilyenkor ezt a deriváltat f a-beli, az i. változó (vagy x_i) szerinti parciális deriváltjának hívjuk és $f_{x_i}(a)$-val vagy $f_i'(a)$-val vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_{x=a}$-val jelöljük.

(2) f parciálisan deriválható a-ban, ha minden változója szerint parciálisan deriválható a-ban.

(3) f parciálisan deriválható (az i. változója (vagy x_i) szerint) egy halmazon, ha annak minden elemében az.

(4) f i. változója (vagy x_i) szerinti parciális deriváltfüggvénye $f_{x_i} : H_i \to \mathbb{R}$, ahol $H_i = \{a \in H : f$ parciálisan deriválható x_i szerint a-ban$\}$ és minden $a \in H_i$-re $f_{x_i}(a)$ f a-beli, x_i szerinti parciális deriváltja.

Vigyázat: a deriválhatóságból következik a parciális deriválhatóság (ezt mondja a fenti állítás), de fordítva ez nem igaz.

7.8. Példa. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ folytonos és parciálisan deriválható az origóban, de nem deriválható ott.

Folytonos az origóban, mert $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\varphi\sin\varphi = 0 = f(0,0)$.

Léteznek a parciális deriváltak az origóban: $f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$ és szimmetria miatt ezért $f_y(0,0)$ is 0.

Nem deriválható az origóban: ha az lenne, akkor $\nabla f(0,0) = (0,0)$ miatt

$$0 = \lim_{(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(0,0)(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$$

ami nem igaz, mert $y = x$ mentén $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Csak annyi igaz (ezt mondja 7.5), és ezt használtuk is most a számolásban, hogy *ha f deriválható az a pontban, akkor* $\operatorname{grad} f(a)$ koordinátái az a-beli parciális deriváltak.

7.9. Definíció. f folytonosan deriválható az a pontban, ha parciálisan deriválható a egy környezetében, és a parciális deriváltfüggvényei folytonosak a-ban.

7.10. Tétel. *Ha f folytonosan deriválható a-ban, akkor deriválható a-ban.*

Ez nagyon praktikus elégséges feltétel, de csak elégséges, szükségesnek nem szükséges, amint azt a következő példa mutatja.

7.11. Példa. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{|x|} = 0$ és szimmetria miatt $f_y(0,0) = 0$.

Az origón kívül: $f_x(x,y) = x\big(2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)$ és szimmetria miatt $f_y(x,y) = y\big(2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)$.

f_x nem folytonos az origóban:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{r\to 0} \underbrace{2r\cos\varphi\sin\frac{1}{r}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{r\cos\varphi}{r}\cos\frac{1}{r}}_{=\cos\varphi\cos\frac{1}{r}\not\to 0} \not\to 0$$

Tehát nem folytonosan deriválható az origóban.

De deriválható ott, mert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)((x,y)-(0,0))}{\mathrm{d}((0,0),(x,y))} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Sőt, valójában mindenütt deriválható, mert a parciálisok folytonosak az origón kívül.

Szükséges feltételnek itt van a parciális deriváltak létezése, és (szokás szerint) a folytonosság:

7.12. Állítás. *Ha f deriválható a-ban, akkor folytonos is ott.*

Bizonyítás. Először is, azt állítjuk, hogy ha $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, akkor $\{|B(x)| : |x| \leq 1\}$ korlátos; 1.8(1) miatt elég ezt valós értékű lineáris leképezésekre belátni, és ha B ilyen, akkor ez igaz, mert ha mondjuk $b = (b_1, \ldots, b_n)$ a B-t kódoló vektor, és $|x| \leq 1$, akkor a 1.9-beli első egyenlőtlenség miatt minden i-re $|x_i| \leq 1$, és így

$$|B(x)| = |bx| = |\textstyle\sum_{i=1}^n b_i x_i| \leq \sum_{i=1}^n |b_i x_i| \leq \sum_{i=1}^n |b_i|$$

(ahol az első egyenlőtlenségben a háromszög-egyenlőtlenséget használtuk), azaz $\sum_{i=1}^{n}|b_i|$ felső korlátja $\{|B(x)| : |x| \leq 1\}$-nek.

Ebből következik, hogy minden B lineáris leképezésre $\lim_{x\to 0} B(x) = 0$ (vagyis B folytonos 0-ban), mert minden $x \neq 0$-ra $|B(x)| = |B(|x|x_0)| = |x||B(x_0)| \to 0$ ha $x \to 0$, ahol x_0 az x irányú egységvektor, mert egy korlátos és egy 0-hoz tartó szorzata.

Ebből viszont már könnyen következik az állítás: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-B(x-a)}{\mathrm{d}(x,a)} = 0$ miatt (a 0-hoz tartó $\mathrm{d}(x,a)$-val szorozva) $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) - B(x-a) = 0$, amiből $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} B(x-a) = 0$. $\square$

7.13. *Feladat.* A bizonyítás során láttuk, hogy minden $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés folytonos az origóban. Bizonyítsuk be ebből, hogy az ilyenek mindenütt folytonosak. (Persze ez következik az állításból is, hiszen tudjuk, hogy a lineáris leképezések deriválhatók.)

Láncszabály és alkalmazásai Már tudjuk, hogy a pontbeli derivált már egyváltozóban is csak azért volt egy szám, mert az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvényeket egy számmal való szorzással (egydimenziós vektorral való skaláris szorzással) lehet reprezentálni. Ennek fényében érdemes megvizsgálni a láncszabályt ($(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$). Legyen A az $x \mapsto f'(a)x$, B pedig az $x \mapsto g'(f(a))x$ lineáris függvény (azaz A az f a-beli, B a g $f(a)$-beli deriváltja); akkor $g \circ f$ a-beli deriváltja az

$$x \mapsto ((g \circ f)'(a))x = (g'(f(a))f'(a))x = g'(f(a))(f'(a)x) = g'(f(a))A(x) = B(A(x)) = (B \circ A)(x),$$

azaz a $B \circ A$ lineáris függvény. Vagyis a láncszabály már egyváltozóban is azt mondta, hogy g és f kompozíciójának a-beli deriváltja g $f(a)$-beli és f a-beli deriváltjának kompozíciója.

7.14. Tétel (Láncszabály)**.** *Ha $H \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : H \to \mathbb{R}^m$, a belső pontja H-nak, f deriválható a-ban, $g : K \to \mathbb{R}^p$, ahol $K \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(a)$ belső pontja K-nak és g deriválható $f(a)$-ban, akkor $h = g \circ f$ deriválható a-ban és $h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$, ami a Jacobi-mátrixokra nézve 6.13 szerint azt jelenti, hogy $\underline{\underline{h'(a)}} = \underline{\underline{g'(f(a))}} \cdot \underline{\underline{f'(a)}}$.*

7.15. Következmény. *Tegyük fel, hogy f, $g : H \to \mathbb{R}^m$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$, a belső pontja H-nak és f, g deriválható a-ban. Akkor*

(1) *$f + g$ deriválható a-ban, és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
(2) *ha $m = 1$, akkor fg deriválható a-ban, és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Bizonyítás. (1) 7.4, és mert a vektorösszeadás minden koordinátafüggvénye a valós összeadás, elég az állítást $m = 1$-re belátni. A $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény mindenütt deriválható és $\nabla + = (1,1)$ mindenütt, mert $\frac{\partial}{\partial x} x + y = 1$ és $\frac{\partial}{\partial y} x + y = 1$, tehát $+$ parciális deriváltfüggvényei folytonosak. A feltevés és 7.4 miatt $\binom{f}{g} : H \to \mathbb{R}^2$ deriválható a-ban. A láncszabály szerint tehát $f + g = + \circ \binom{f}{g} : H \to \mathbb{R}$ is deriválható a-ban, és

$$\nabla(f+g)(a) = (1,1)\binom{f}{g}'(a) = (1,1)\begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla g(a) \end{pmatrix} = (1,1)\begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \cdots f_{x_n}(a) \\ g_{x_1}(a) \cdots g_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$
$$= (f_{x_1}(a) + g_{x_1}(a), \cdots, f_{x_n}(a) + g_{x_n}(a)) = \nabla f(a) + \nabla g(a).$$

(2) Az előzőhöz hasonlóan; a különbség annyi, hogy a szorzás parciális deriváltjai $\frac{\partial}{\partial x}xy = y$ és $\frac{\partial}{\partial y}xy = x$, tehát a szorzás gradiense $\nabla \cdot (x,y) = (y,x)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re. Következésképp

$$\begin{aligned}\nabla(fg)(a) &= (y,x)\big|_{(f(a),g(a))} \binom{f}{g}'(a) = (g(a),f(a))\begin{pmatrix}\nabla f(a)\\ \nabla g(a)\end{pmatrix} = (g(a),f(a))\begin{pmatrix}f_{x_1}(a)\cdots f_{x_n}(a)\\ g_{x_1}(a)\cdots g_{x_n}(a)\end{pmatrix}\\ &= (g(a)f_{x_1}(a)+f(a)g_{x_1}(a),\cdots,g(a)f_{x_n}(a)+f(a)g_{x_n}(a)) = g(a)\nabla f(a)+f(a)\nabla g(a).\end{aligned}$$

□

7.16. *Feladat.* Az állítás feltételei mellett cf is deriválható a-ban minden $c \in \mathbb{R}$-re, és $(cf)'(a) = cf'(a)$.

A fenti első állítás és eszerint a pontbeli deriválás is lineáris operátor, ha nem is euklideszi térből euklideszi térbe képez. Majd később látni fogjuk, hogy ez nem probléma.

7.17. *Feladat.* Ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy lineáris operátoroknak feltétlenül euklideszi terekből/be kell képezniük, akkor lineáris operátorok a következők is: a lim konvergens sorozatokon; a deriválás a $(0,1)$-en deriválható függvényeken; az $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ függvény $[0,1]$-en integrálható valós függvényeken.

Az ezekhez hasonló lineáris operátorokra majd még visszatérünk lineáris algebrában; most nézzük a láncszabály további alkalmazásait!

7.18. Állítás (Lagrange középértéktétel valós értékű függvényekre)**.** *Ha $f : H \to \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}^n$) folytonos H-n és deriválható H belső pontjaiban, a, $b \in H$ és az $\overline{ab}$ nyílt szakasz (azaz $\{a+t(b-a) : t \in (0,1)\}$) minden pontja belső pontja H-nak, akkor van olyan $c \in \overline{ab}$, amire $f(b)-f(a) = \nabla f(c)(b-a)$.*

$\nabla f(c)(b-a)$ itt persze $\nabla f(c)$ és $b-a$ skaláris szorzatát jelenti.

Bizonyítás. Legyen $g : [0,1] \to H$, $g(t) = a+t(b-a)$; akkor g egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés ($t \mapsto t(b-a)$) eltoltja, tehát deriválható, és azt is tudjuk, hogy a deriváltja ez a lineáris leképezés, azaz a Jacobi-mátrixa $b-a = \begin{pmatrix} b_1-a_1\\ \vdots\\ b_n-a_n\end{pmatrix}$. De akkor a $h = f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény a láncszabály miatt deriválható $(0,1)$-en és a deriváltja minden $t \in (0,1)$-ben

$$(*) \qquad h'(t) = f'(g(t))g'(t) = f'(g(t))(b-a).$$

Mivel h deriválható $(0,1)$-en, és folytonos $[0,1]$-en (hiszen 7.12 szerint ilyenek kompozíciója), alkalmazható rá az egyváltozós Lagrange–tétel, ami szerint valamilyen $t_0 \in (0,1)$-re $h'(t_0) = \frac{h(1)-h(0)}{1-0} = f(g(1)) - f(g(0)) = f(b)-f(a)$. De akkor $c = g(t_0) \in \overline{ab}$ jó lesz, mert $(*)$ miatt így $f(b)-f(a) = h'(t_0) = f'(g(t_0))(b-a) = f'(c)(b-a)$. □

Vektor értékű függvényekre már nem igaz a Lagrange–tétel: pl. a $[0,2\pi]$-n folytonos, $(0,2\pi)$-n deriválható $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ függvényre $f(2\pi)-f(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\pi\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-2\pi\sin t\\ 2\pi\cos t\\ 2\pi\end{pmatrix} = 2\pi f'(t)$ semmilyen $t \in (0,2\pi)$-re.

7.19. Következmény. *Ha $f : H \to \mathbb{R}^m$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt és p.ö.f, f deriválható H-n és* $(\forall x \in H)f'(x) = 0$ *(vagyis a mindenkit 0-ba küldő lineáris leképezés), akkor f konstans H-n.*

Bizonyítás. $(\forall x \in H) f'(x) = 0$-ból következik, hogy f minden koordinátafüggvényének is 0 a deriváltja; és persze elég ezekről megmutatni, hogy mind konstansfüggvények. Vagyis feltehetjük, hogy f valós értékű.

H poligoniális összefüggősége miatt elég belátni, hogy ha $\overline{ab} \subseteq H$, akkor $f(a) = f(b)$, de ez igaz Lagrange miatt, hiszen lesz olyan $c \in \overline{ab}$, amire $f(b) - f(a) = \nabla f(c)(b-a) = 0(b-a) = 0$. □

7.20. Definíció. Tegyük fel, hogy $f : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$, a H egy belső pontja, és $e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor (azaz $\sum_{i=1}^n e_i^2 = 1^2 = 1$, ahol e_i most *nem* az i. alapvektort jelöli). f a-beli e irányú iránymenti deriváltja $f_e(a) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)}{t}$.

Pl. ha $n = 2$, akkor a $z = f(x, y)$ felület és az a-ra illeszkedő, a z-tengellyel és az e-vel párhuzamos sík metszésvonala egy egyváltozós függvény $(f(a + te))$ grafikonja. $f_e(a)$ ennek a függvénynek a 0-beli deriváltja.Vagyis pont olyan, mint a parciális deriváltak (hf: ha e_i az i. alapvektor, akkor $f_{e_i}(a) = f_{x_i}(a)$), csak nem feltétlenül valamelyik alapvektor irányában.

7.21. Állítás. *Tegyük fel, hogy $f : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ deriválható H egy a belső pontjában, és $e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor. Akkor f-nek van a-beli e irányú iránymenti deriváltja, és $f_e(a) = e\nabla f(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $g(t)$ a $t \mapsto a + te : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ leképezés; először azt akarjuk belátni, hogy a $h = f \circ g : D \to \mathbb{R}$ függvényre (ahol $D \subseteq \mathbb{R}$ H g szerinti ősképe) a 0-ban alkalmazható a láncszabály. Feltettük, hogy $g(0) = a$ belső pontja H-nak és f deriválható ott, és az előbbi (a belső pontja H-nak) miatt (meg mert g folytonos) 0 belső pontja D-nek; g deriválható 0-ban (és a deriváltja mindenütt te, tehát a Jacobi-mátrixa e), mert a te lineáris leképezés eltoltja.

Tehát alkalmazható a láncszabály 0-ban, és aszerint $h'(0) = f'(g(0))g'(0) = \nabla f(a)e$, miközben, ahogy azt az iránymenti derivált definíciója után megbeszéltük, $h'(0) = f_e(a)$. □

Ezzel nem csak receptet kaptunk $f_e(a)$ kiszámolására (abban az estben, ha f deriválható a-ban), de az is kiderült, hogy mi a gradiens geometriai jelentése, hiszen tudjuk, hogy $\nabla f(a)e$ a $\nabla f(a)$ vektor e egységvektorra vetett merőleges vetületének előjeles hossza. Vagyis az a-beli e irányú iránymenti derivált akkor a legnagyobb (mégpedig $|\nabla f(a)|$), amikor e egyirányú $\nabla f(a)$-val, és akkor a legkisebb $(-|\nabla f(a)|)$ amikor ellentétes irányú vele, és végül akkor 0, ha merőleges $\nabla f(a)$-ra.

Többszöri deriválhatóság Ha $f : H \to \mathbb{R}$, ahol $H \subseteq \mathbb{R}^n$, akkor 7.7 utolsó pontja szerint f_{x_i} (ahol $1 \le i \le n$) is egy n-változós valós függvény, vagyis (ahogyan egyváltozóban is felmerül, hogy deriválható-e a deriváltfüggvény), feltehető a kérdés, hogy létezik-e a j. $(1 \le j \le n)$ parciális deriváltja $H_i = \operatorname{Dom} f_{x_i} \subseteq H$ egy a belső pontjában. Ha igen, akkor ezt a parciális deriváltat $f_{x_i x_j}(a)$-val vagy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\big|_{x=a}$-val jelöljük, és a megfelelő parciális deriváltfüggvényeket f másodrendű parciális deriváltfüggvényeinek, az ő parciális deriváltfüggvényeit f harmadrendű parciális deriváltfüggvényeinek nevezzük, és így tovább.

A parciális deriválások sorrendje nem mindegy, amint azt a következő példa mutatja.

7.22. Példa. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Akkor

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,y)}^{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y = 0 \\ -y & \text{ha } y \neq 0 \end{cases}$$

miatt

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1,$$

és hasonlóan, $f_{yx}(0,0) = 1$ (hf). Mellesleg $f_{xx}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0)$ (hf).

7.23. *Feladat.* Ha $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, akkor az origón kívül mindenütt $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2} = 0$, ahol $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}$ persze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$-et jelenti.

De mindjárt (7.24) adunk egy elégséges feltételt arra, hogy ez ne történhessen meg.

7.24. Tétel (Young)**.** *Ha az f valós értékű függvény k-adrendű parciális deriváltjai léteznek a egy környezetében és folytonosak a-ban, akkor az egymástól csak a deriválások sorrendjében eltérő k-adrendű parciális deriváltjai megegyeznek a-ban.*

7.25. *Megjegyzés.* A Young–tétel valójában ennél kicsit többet mond, de nekünk csak ennyire lesz szükségünk belőle.

A fenti példában f_{xy} és f_{yx} mindenütt léteznek, de az origóban nem folytonosak, ezért különbözhetnek.

Szélsőérték-keresés

7.26. Definíció. Az $f : H \to \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}^n$) függvénynek lokális maximuma (minimuma) van $a \in H$-ban, ha abszolút maximuma (minimuma) van a egy környezetében, azaz ha a-nak van olyan $S \subseteq H$ környezete, hogy $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$) minden $x \in S$-re. f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van a-ban.

Vagyis pontosan úgy, mint egyváltozóban.

7.27. Állítás. *Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor minden a-ban létező parciális és iránymenti deriváltja* 0.

Bizonyítás. Persze, hiszen a megfelelő egyváltozós függvényeknek is lokális szélsőértékük van. □

De ez természetesen csak szükséges feltétel, amint azt a régi ellenpéldáink mutatják. Ezeket lehet „többváltozósítani” is: pl. $f(x,y) = x^3$ mindkét parciális deriváltja 0 az y-tengelyen, miközben sehol sincs lokális szélsőértéke. Egy „igazi” kétváltozós példa az $f(x,y) = xy$, aminek mindkét parciális deriváltja 0 az origóban, noha nincs ott szélsőértéke, mert az origó minden környezetében felvesz negatív és pozitív számot is.

Egyváltozósban elégséges feltétel volt a-beli lokális maximumra (minimumra), hogy $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$ ($f''(a) > 0$). Ennek többváltozós megfelelője a következő:

7.28. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : H \to \mathbb{R}$, a belső pontja $H \subseteq \mathbb{R}^n$-nek, a-nak van olyan környezete ahol a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, és $\nabla f(a) = 0$.*

Ha

$$f_{x_1x_1}(a), \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad , \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{vmatrix}$$

mindegyike pozitív, akkor f-nek a-ban lokális minimuma van; ha pedig váltakozó előjelűek, és $f_{x_1x_1} < 0$, akkor lokális maximuma.

7.29. *Megjegyzés.* A tételbeli számsorozat k. eleme a $g : x \mapsto \operatorname{grad} f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)) : S \to \mathbb{R}^n$ függvény (ahol $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a egy olyan környezete ahol a másodrendű parciális deriváltak folytonosak) a-beli Jacobi-mátrixának k. „sarokdeterminánsa"; speciálisan az utolsó elem a Jacobi-mátrix determinánsa (g a-beli Jacobi-determinánsa).

Érdemes megnézni, hogy mit mond a tétel kétváltozós függvényekre, mert ott még valamivel több is igaz:

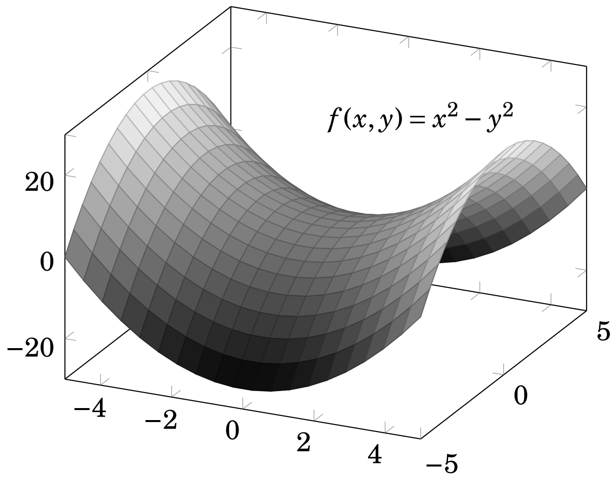
7.30. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : H \to \mathbb{R}$, a belső pontja $H \subseteq \mathbb{R}^2$-nek, a-nak van olyan környezete ahol a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, és $\nabla f(a) = 0$.*

Ha $D(a) = f_{xx}(a) f_{yy}(a) - f_{xy}^2(a) \left(= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \right) > 0$, akkor

- *ha $f_{xx}(a) > 0$, akkor a lokális minimumhely*
- *ha $f_{xx}(a) < 0$, akkor a lokális maximumhely.*

(Ez eddig szóról szóra a tétel $n = 2$-re, kivéve, hogy használtuk a Young–tételt, de ez nem lényeges különbség. Az majd most jön.) Ha $D(a) < 0$, akkor a nem szélsőértékhely. (Az ilyet nyeregpontnak hívják.)

7.31. Példa. $f(x, y) = x^2 - y^2$-nek nyeregpontja van az origóban. Ezt érdemes végigszámolni, de onnan is lehet látni, hogy f-nek az x-tengely mentén lokális minimuma, az y-tengely mentén meg lokális maximuma van 0-ban.



Inverzfüggvény–tétel A következő egyváltozós állítást szeretnénk $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényekre általánosítani:

7.32. Állítás. *Ha f deriválható az I intervallumon, a deriváltfüggvénye folytonos I egy a belső pontjában és $f'(a) \neq 0$, akkor a-nak van olyan környezete, ahol f invertálható.*

Ha pedig invertálható, akkor A1-ből tudjuk, hogy az inverze is deriválható, és $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Bizonyítás. f' a-beli folytonossága miatt a-nak van olyan $S \subseteq I$ környezete, amin $f' > 0$ vagy $f' < 0$. De akkor f szigorúan monoton S-en, tehát invertálható ott. $\square$

Ha meg akarjuk érteni, hogy mi a jelentősége $f'(a) \neq 0$-nak (márpedig ez elkerülhetetlen, ha többváltozós függvényekre akarjuk általánosítani az állítást), azt érdemes megnéznünk, hogy mit jelent ez a feltétel az a-beli deriváltra mint lineáris leképezésre nézve. És hát (egyebek mellett, persze) azt, hogy a lineáris leképezés invertálható (nagyon könnyű hf: $x \mapsto cx$ pontosan akkor invertálható, ha $c \neq 0$). A derivált kiszámítására vonatkozó rész pedig azt, hogy az inverz deriváltja a derivált inverze, hiszen $c \neq 0$-ra $x \mapsto cx$ inverze az $x \mapsto \frac{1}{c}x$ lineáris leképezés. Vagyis ha f folytonosan deriválható, akkor invertálható minden olyan pont egy környezetében, ahol a deriváltja az, és az inverz deriváltja a derivált inverze. Ez az, ami $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényekre is igaz.

7.33. Tétel (Inverzfüggvény–tétel)**.** *$f : H \to \mathbb{R}^n$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, f folytonosan deriválható H-n és az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható (vagy, ami ezzel ekvivalens, a f a-beli Jacobi-mátrixának determinánsa (a Jacobi-determináns) nem 0). Akkor a-nak van olyan $S \subseteq H$ környezete, ahol f invertálható, és az inverz is folytonosan deriválható, és $(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$.*

Valami azért elvész a magasabb dimenzióba való átmenet során: egyváltozóban igaz, hogy ha f folytonosan deriválható I-n és f' sehol sem 0 I-n, akkor f invertálható I-n (persze, hiszen f' egész I-n pozitív vagy egész I-n negatív, és így f szigorúan monoton I-n). De többváltozóban már csak a „lokális invertálhatóság” biztos, amint azt a következő példa mutatja.

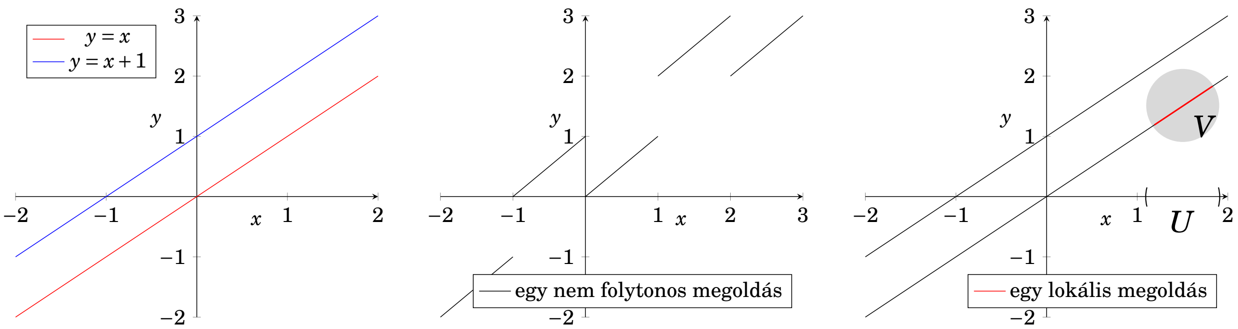
7.34. Példa. Legyen $f_1(x,y) = e^x \cos y$, $f_2(x,y) = e^x \sin y$. Akkor $f = (f_1, f_2)$ (az az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény, amelynek f_1 és f_2 a két koordinátafüggvénye), folytonosan deriválható mindenütt, és a Jacobi-determinánsa mindenhol pozitív:

$$\begin{vmatrix} f_{1x}(x,y) & f_{1y}(x,y) \\ f_{2x}(x,y) & f_{2y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x} > 0$$

de nem invertálható, mert $f(0,0) = (1,0) = f(0,2\pi)$.

Implicitfüggvény–tétel Adott $g : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^2$ függvény; vajon létezik-e olyan $f : K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}$ függvény, amire $g(x, f(x)) = 0$ minden $x \in K$-ra? Vagyis: ki lehet-e fejezni $g(x,y) = 0$-ból y-t x segítségével? $g(x,y) = 0$ lehet például valami geometriai alakzat (kör, elipszis, sík) implicit egyenlete; lehet-e ebből explicit egyenletet csinálni? Ennek a kérdésnek speciális esete az inverzfüggvény létezésének problémája is: $g(x,y)$ ott $x - f(y)$.

7.35. Példa. $g(x,y) = (y-x)(y-(x+1))$-nek hány „megoldása” van? $f(x) = x$ és $f(x) = x+1$ persze jók, de még végtelen sok megoldás van (ld. pl. a középső ábrát!). De folytonos megoldás $\mathbb{R}$-en csak ez a kettő, és minden „jó” ($g(x,y) = 0$-t kielégítő) ponton csak egy.

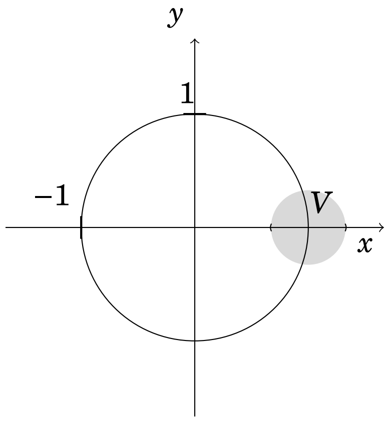


Ezek a valamelyik jó ponton átmenő folytonos megoldások az érdekesek. Tehát a kérdés pontosabban így szól:

7.36. Definíció. Adott g (mint fent) és tegyük fel, hogy $g(a,b) = 0$; ha vannak olyan $V \subseteq \operatorname{Dom} g$ nyílt és $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazok, amikre $(a,b) \in V$, $a \in U$, $(\forall x \in U)(\exists! y)((x,y) \in V \;\&\; g(x,y) = 0)$, és ha az az $f : U \to \mathbb{R}$ függvény, ami minden $x \in U$-hoz ezt az egyetlen y-t rendeli (speciálisan: $f(a) = b$) folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f folytonos lokális megoldása $g(x, y) = 0$-nak (a, b)-ben.

A fenti példában minden jó ponthoz van folytonos lokális megoldás: V-t olyan kicsire kell választani, hogy diszjunkt legyen a másik egyenestől; mint a jobboldali ábrán (V a körlap, U az x-tengelyen látható nyílt intervallum).

7.37. Példa. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$



Minden jó, azaz az origó középpontú egységsugarú körön lévő (a, b) pontban van folytonos lokális megoldás, mégpedig $\sqrt{1-x^2}$ vagy $-\sqrt{1-x^2}$, attól függően, hogy $b > 0$ vagy $b < 0$, kivéve $(\pm 1, 0)$-ban, mert ezek minden környezetében van olyan x, amihez két y is jó (ha $|x| < 1$), és olyan is, amihez egy sem (ha $|x| > 1$).

Az első esetben tehát van y_1 és y_2, hogy $g(x, y_1) = 0 = g(x, y_2)$, amiből, ha g parciálisan deriválható y szerint, a Rolle–tétel miatt $g_y(x, c) = 0$ következik valamilyen $c \in (y_1, y_2)$-re. Az implicitfüggvény–tétel azt mondja ki, hogy elég ezt (azaz a $g_y = 0$) lehetőséget kizárni.

7.38. Tétel (Implicitfüggvény–tétel két változóra)**.** *Legyen $g : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható, $g(a, b) = 0$. Ha $g_y(a, b) \neq 0$, akkor $g(x, y) = 0$-nak van folytonos lokális megoldása (a, b)-ben. Sőt, ha f ez a megoldás, akkor f deriválható a-ban, és $f'(a) = \frac{-g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$.*

Az utolsó példában $g_x(x, y) = 2x$, $g_y(x, y) = 2y$, tehát $(a, b) \neq (\pm 1, 0)$-ban, ha $g(a, b) = 0$, akkor $\frac{-g_x(a,b)}{g_y(a,b)} = -\frac{a}{b}$. És valóban, ha például $b > 0$, akkor $f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, tehát $f'(a) = \frac{-a}{f(a)} = -\frac{a}{b}$.

Magasabb dimenziókban a definíció és a tétel így alakul:

7.39. Definíció. Adott $g : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$, és tegyük fel, hogy $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$; ha vannak olyan $V \subseteq \operatorname{Dom} g$ nyílt és $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ nyílt halmazok, amikre $(a_1, \ldots, a_n) \in V$, $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in U$, $(\forall (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U)(\exists! x_n)((x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in V \ \& \ g(x_1, \ldots, x_n) = 0)$, és ha az az $f : U \to \mathbb{R}$ függvény, ami minden $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$-hoz ezt az egyetlen x_n-t rendeli (speciálisan: $f(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$) folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f folytonos lokális megoldása $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$-nak a-ban.

7.40. Tétel (Implicitfüggvény–tétel)**.** *Legyen $g : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható, $g(a) = g(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Ha $g_{x_n}(a) \neq 0$, akkor $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$-nak van folytonos lokális megoldása a-ben. Sőt, ha az $n-1$-változós f ez a megoldás, akkor f deriválható $(a_1, \ldots, a_{n-1})$-ben, és minden $i \in \{1, \ldots, n-1\}$-re $f_{x_i}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \frac{-g_{x_i}(a)}{g_{x_n}(a)}$.*

Természetesen semmi jelentősége annak, hogy történetesen most is az utolsó változót fejeztük ki a többi segítségével. Lehetne épp így bármely másikat (de akkor persze a folytonos lokális megoldást is ennek megfelelően kellene definiálni).

7.41. Példa. $0 = g(x, y, z) = \sin\frac{x}{y^2} + e^{xz} - z^2 + \operatorname{sh}(xz)$ egyértelműen meghatároz $P = (0, 1, 1)$ egy környezetében egy deriválható, x, y-ban kétváltozós függvényt. Mik ennek a parciális deriváltjai a $(0, 1)$ pontban?

M.o.: $g(0,1,1) = 0 + e^0 - 1^2 + \operatorname{sh} 0 = 0$, tehát P tényleg jó pont. g folytonosan deriválható P egy környezetében (mert csak az $y = 0$ síkon nem). $g_z(x,y,z) = xe^{xz} - 2z + x\operatorname{ch}(xz) \rightsquigarrow g_z(0,1,1) = -2 \neq 0$, tehát van f lokális folytonos megoldás. f parciálisai:

$$g_x(x,y,z) = \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y^2} + ze^{xz} + z\operatorname{ch}(xz) \rightsquigarrow g_x(0,1,1) = 1+1+1 = 3 \rightsquigarrow f_x(P) = -\frac{g_x(P)}{g_z(P)} = \frac{3}{2}$$

és

$$g_y(x,y,z) = \frac{-2}{y^3}\cos\frac{x}{y^2} \rightsquigarrow g_y(P) = -2 \rightsquigarrow f_y(P) = -\frac{g_y(P)}{g_z(P)} = 1.$$

8. Integrál

Hasonló lesz az egyváltozós integráláshoz: vesszük a halmaz (ahol integrálunk) felosztásait, az egyváltozós esethez hasonló módon definiáljuk a felosztásokhoz tartozó alsó és felső összeget, és a függvény integrálható, ha az alsó összegek supremuma (alsó integrál) egyenlő a felső összegek infimumával (felső integrál).

Szintén az egyváltozós esethez hasonlóan: csakis korlátos (és valós értékű) függvényeket fogunk korlátos halmazokon integrálni. A definíciókat és tételeket általában 2 vagy legfeljebb 3-dimenzióban mondjuk ki, és legfeljebb néha jelezzük, hogy miként lehet magasabb dimenzióra kiterjeszteni. Ezzel nem veszítünk sokat, mert már kétváltozóban megjelenik minden nehézség.

Egyelőre nem akármilyen korlátos halmazokon fogunk integrálni, csak tengelypárhuzamos téglalapokon: $[a,b]\times[c,d] = \{(x,y)\colon a \le x \le b, c \le y \le d\}$. (A tengelypárhuzamos téglalap k-dimenziós megfelelője az $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_k,b_k] = \{(x_1,\dots,x_k)\colon (\forall i \in \{1,\dots,k\}) a_i \le x_i \le b_i\}$ k-tégla.)

8.1. Definíció. $V = [a,b]\times[c,d]$ egy Φ felosztása: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Erre a felosztásra legyen $V_{ij} = [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$, és

$$s_\Phi(f) = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\inf_{V_{ij}} f) t(V_{ij}) \qquad \text{ill.} \qquad S_\Phi(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sup_{V_{ij}} f) t(V_{ij})$$

a Φ felosztáshoz tartozó alsó és felső összeg, ahol $t(V_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1})$ a V_{ij} téglalap területe.

8.2. Definíció. f alsó integrálja V-n: $\underline{\iint}_V f = \sup\{s_\Phi(f)\colon \Phi \text{ a } V \text{ egy felosztása}\}$, felső integrálja $\overline{\iint}_V f = \inf\{S_\Phi(f)\colon \Phi \text{ a } V \text{ egy felosztása}\}$. f integrálható V-n (jelölés: $f \in \mathscr{R}(V)$) ha $\underline{\iint}_V f = \overline{\iint}_V f$. Ilyenkor az integrál $\iint_V f$ ez a közös érték.

Az alsó és felső integrálok f és V korlátossága miatt mindig léteznek (ha $m \le f(x) \le M$ V-n, akkor minden Φ felosztásra $mt(V) \le s_\Phi(f) \le S_\Phi(f) \le Mt(V)$); és $\underline{\iint}_V f \le \overline{\iint}_V f$. Ez utóbbi következik az alábbi állítás (1) pontjából.

8.3. Definíció. A Ψ felosztás finomabb, mint a Φ felosztás, ha Ψ a Φ összes osztópontját tartalmazza.

8.4. Állítás. *Legyen f és g korlátos a V tengelypárhuzamos téglalapon, és Φ, Ψ a V felosztásai.*

(1) *Ha Ψ finomabb mint Φ, akkor $s_\Phi(f) \le s_\Psi(f) \le S_\Psi(f) \le S_\Phi(f)$. (Ebből már következik, hogy bármely Φ és Ψ felosztásokra $s_\Phi(f) \le S_\Psi(f)$, mert a $\Phi \cup \Psi$ felosztás mindkettőnél finomabb, és ezért $s_\Phi(f) \le s_{\Phi\cup\Psi}(f) \le S_{\Phi\cup\Psi}(f) \le S_\Psi(f)$.)*

(2) *$f \in \mathscr{R}(V) \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \Phi$ felosztás$)(S_\Phi(f) - s_\Phi(f) < \epsilon)$*
(3) *$\mathscr{R}(V)$ zárt összeadásra, szorzásra és skalárral való szorzásra; és az integrálás lineáris operátor, azaz $\iint_V (f+g) = \iint_V f + \iint_V g$ és $\iint_V cf = c\iint_V f$. (Szorzat integráljáról már egyváltozóban sem tudtunk hasonlót mondani.)*
(4) *Ha V a V_1 és V_2 tengelypárhuzamos téglalapok uniója és az utóbbiaknak nincs közös belső pontjuk, akkor $\mathscr{R}(V) = \mathscr{R}(V_1) \cap \mathscr{R}(V_2)$ (vagyis f pontosan akkor integrálható V-n, ha integrálható V_1-en és V_2-n), és $\iint_V f = \iint_{V_1} f + \iint_{V_2} f$, vagyis $\iint$ additív halmazfüggvény.*
(5) *Ha $f,\ g \in \mathscr{R}(V)$ és $f(x,y) \le g(x,y)$ minden $(x,y) \in V$-re, akkor $\iint_V f \le \iint_V g$ ($\iint_V$ monoton).*
(6) *Ha $f \in \mathscr{R}(V)$, akkor $|f| \in \mathscr{R}(V)$ és $|\iint_V f| \le \iint_V |f|$. (Speciálisan: ha $|f| \le M$, akkor $|\iint_V f| \le Mt(V)$, mert $\iint_V M = Mt(V)$, amint azt rövidesen látni fogjuk.)*

Bizonyítás. Pontosan úgy, mint egyváltozóban. De nem kell tudni. □

8.5. Tétel. *Ha f folytonos a V tengelypárhuzamos téglalapon, akkor $f \in \mathscr{R}(V)$.*

Nemsokára látni fogjuk, hogy ennél több is igaz. De azt is, hogy nem minden korlátos halmazon integrálható minden folytonos függvény.

Bizonyítás. A Heine–tételből (5.6) és 8.4(2)-ből következik, pontosan úgy, mint egyváltozóban. V zárt és korlátos, tehát f egyenletesen folytonos ott. Tehát ha $\epsilon > 0$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon/t(V)$ minden, egymástól δ-nál közelebbi $(x,y),(x',y') \in V$-re. Legyen Φ olyan felosztása V-nek, amiben bármely két szomszédos osztópont távolsága mindkét dimenzióban $< \delta/2$; akkor minden V_{ij}-ben bármely két pont távolsága kisebb, mint az átló hossza, azaz $\delta/\sqrt{2} < \delta$. De akkor

$$S_\Phi(f) - s_\Phi(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{(\sup_{V_{ij}} f - \inf_{V_{ij}} f)}_{<\epsilon/t(V)} t(V_{ij}) \le \frac{\epsilon}{t(V)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t(V_{ij}) = \frac{\epsilon}{t(V)} t(V)$$

aholis $\sup_{V_{ij}} f - \inf_{V_{ij}} < \epsilon/t(V)$ azért igaz, mert a Weierstrass–tétel (5.1) miatt f felveszi $\sup_{V_{ij}} f$-et és $\inf_{V_{ij}} f$-et V_{ij}-n. □

8.6. Példák. (1) (Konstansfüggvény integrálja) Ha $f(x) = k$ V-n, akkor minden Φ felosztásra $s_\Phi(f) = S_\Phi(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m kt(V_{ij}) = k\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t(V_{ij}) = kt(V)$. Tehát $f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$ és $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f = k(b-a)(d-c)$.

(2) (Dirichlet) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x,\ y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$. $f \notin \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$, mert minden alsó összeg 0 és minden felső összeg 1, tehát $\epsilon = 1$-re nem teljesül 8.4(2).

(3) Integrálható-e $[0,1]\times[0,1]$-en az $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 1 \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$ függvény? Minden alsó összeg 0, tehát $\underline{\iint}_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$, vagyis ha f integrálható, akkor $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$. Az integrálhatósághoz viszont 8.4(2) miatt elég minden $\epsilon > 0$-hoz olyan Φ felosztást találni, amire $S_\Phi(f) < \epsilon$. De ez könnyű, mert

$$S_\Phi(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sup_{V_{ij}} f) t(V_{ij}) = \sum_{j=1}^m 1t(V_{nj})$$
$$= \sum_{j=1}^m (x_n - x_{n-1})(y_j - y_{j-1}) = (x_n - x_{n-1}) \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) = x_n - x_{n-1}$$

azaz elég olyan felosztást venni, amiben az x-tengelyen a két utolsó osztópont távolsága $< \epsilon$.

Tehát $f \in \mathscr{R}([0,1]\times[0,1])$ és $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

(4) Integrálható-e $[0,1]\times[0,1]$-en a $g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x=1 \text{ és } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$ függvény? Az alsó összegek megint mind nullák, a felsőkre pedig igaz, hogy $S_\Phi(g) \le S_\Phi(f)$, ahol f az előző példabeli függvény, és így g-re is igaz, hogy $(\forall \epsilon > 0)(\exists \Phi \text{ felosztás}) S_\Phi(g) < \epsilon$. Tehát $g \in \mathscr{R}([0,1]\times[0,1])$ és $\iint_{[0,1]\times[0,1]} g = 0$.

No de hogy lehet kiszámolni? Jó lenne valahogy visszavezetni az egyváltozós integrálok kiszámítására, mert arra vannak eszközeink (Newton-Leibniz tétel).

8.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])$, és minden $x_0 \in [a,b]$-re létezik $\int_c^d f(x_0,y)\,dy$ (azaz $f(x_0,y) \in \mathscr{R}([c,d])$). Akkor $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\,dy)\,dx$ (beleértve, hogy a külső integrál létezni fog).*

Vegyük észre, hogy $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)\,dy)\,dx$-nek van értelme: egy közönséges egyváltozós függvény, mégpedig az $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ (ami a második feltevés miatt értelmes $[a,b]$-n) határozott integrálja.

8.8. *Megjegyzések.*
- A zárójeleket általában elhagyjuk, tehát $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$-et írunk, de azt nem szabad elfelejtenünk, hogy mindig „belülről kifelé” megyünk.
- Persze a tétel a változók szerepét felcserélve is igaz: ha minden $y_0 \in [c,d]$-re létezik $\int_a^b f(x,y_0)\,dx$, akkor $\iint_{[a,b]\times[c,d]} = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\,dx)\,dy$
- Abból, hogy $f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])$, nem következik, hogy léteznek a belső integrálok; sőt, az is lehet, hogy az egyik irányban igen, a másikban nem. A fenti utolsó példa (mindenütt 0, de $x=1$-en az egyváltozós Dirichlet) példa erre, hiszen láttuk, hogy $\mathscr{R}([0,1]\times[0,1])$-beli, és az is igaz, hogy $f(x,y_0) \in \mathscr{R}([0,1])$ minden $y_0 \in [0,1]$-re, de $f(1,y) \notin \mathscr{R}([0,1])$.
- Abból, hogy létezik $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ és $\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$ (beleértve, hogy a belső integrálok is léteznek), még nem következik, hogy $f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])$, de erre nem könnyű ellenpéldát csinálni.

8.9. Példa. $f(x,y) = x\sin\pi y$ folytonos, és ezért integrálható $V = [0,1]\times[0,1]$-en, és

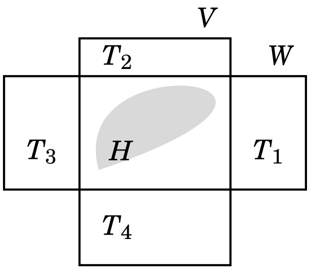
$$\iint_V f = \int_0^1 (\int_0^1 x\sin\pi y\,dy)\,dx = \int_0^1 x(\underbrace{\int_0^1 \sin\pi y\,dy}_{\frac{1}{\pi}[-\cos\pi y]_0^1 = \frac{2}{\pi}})\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

Integrálás tetszőleges korlátos halmazokon Most kiterjesztjük az integrálhatóság fogalmát tengelypárhuzamos téglalapokról tetszőleges korlátos halmazokra.

8.10. Definíció. Ha a valós értékű f korlátos a $H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor $\iint_H f = \iint_V f^*$ (beleértve, hogy $f \in \mathscr{R}(H) \iff f^* \in \mathscr{R}(V)$), ahol $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{ha } (x,y) \in H \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$, és V egy H-t tartalmazó tengelypárhuzamos téglalap.

8.11. Állítás. *Ez a definíció jó (nem függ V választásától)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden olyan, mint a definícióban, és még W is egy H-t tartalmazó tengelypárhuzamos téglalap.



Azt kéne belátni, hogy $\iint_W f^* = \iint_V f^*$, beleértve, hogy ezek ugyanakkor léteznek. Az ötlet az, hogy $(V \cup W) \setminus (V \cap W)$-t (az oldalaiktól eltekintve diszjunkt) tengelypárhuzamos téglalapokra bontjuk; ezeken 0 az integrál, így 8.4(4) miatt $\iint_W f^* = \iint_{V\cap W} f^* = \iint_V f^*$.
Pl. az ábrán látható szituációban:

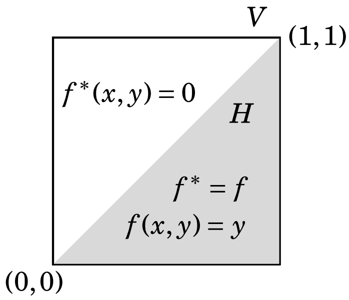
$$\begin{aligned}\iint_W f^* &= \iint_{T_1} f^* + \iint_{V\cap W} f^* + \iint_{T_3} f^* \\ &= \iint_{V\cap W} f^* = \iint_{T_2} f^* + \iint_{V\cap W} f^* + \iint_{T_4} f^* = \iint_V f^*.\end{aligned}$$

□

8.12. Következmény. *Tengelypárhuzamos téglalapokra a régi és az új definíció megegyeznek.*

Bizonyítás. Ha H tengelypárhuzamos téglalap, akkor a definícióbeli V-nek választhatjuk H-t. □

8.13. Példa. Legyen $H = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$, $f(x,y) = y$. Akkor



$$\begin{aligned}\iint_H f = \iint_V f^* &= \int_0^1 \int_0^1 f^*(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^x y\,dy}_{[y^2/2]_0^x} + \int_x^1 0\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}[x^3]_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

ahol $V = [0,1] \times [0,1]$, és a második egyenlőség 8.7 és azért igaz, mert, amint azt majd később (8.20 után) látni fogjuk, $f^* \in \mathscr{R}(V)$. Hf: számítsuk ki ugyanezt fordítva (az integrálások sorrendjének felcserélésével)!

8.14. Példa (arra, hogy folytonos függvény nem feltétlenül integrálható)**.** Legyen $f(x,y) = 1$ $H = ([0,1]\cap\mathbb{Q}) \times ([0,1]\cap\mathbb{Q})$-n. Akkor f folytonos H-n (hiszen konstans!), de $f \notin \mathscr{R}(H)$, mert már láttuk (8.6 második példája), hogy $f^* \notin \mathscr{R}([0,1]\times[0,1])$.

De nincs itt ellentmondás: a megfelelő tétel (8.5) tengelypárhuzamos téglalapokon való integrálhatóságról szólt.

8.4 érdekes részei erre az újfajta integrálra is állnak, és a 4.-et még könnyebb is kimondani:

8.15. Állítás. *Legyen f korlátos a $H \subseteq R^2$-en.*

(3) *$\mathscr{R}(H)$ zárt összeadásra, szorzásra és skalárral való szorzásra; és az integrálás lineáris operátor, azaz $\iint_H (f+g) = \iint_H f + \iint_H g$ és $\iint_H cf = c\iint_H f$.*
(4) *Ha $H = H_1 \cup H_2$ és az utóbbiaknak nincs közös belső pontjuk, akkor $\mathscr{R}(H) = \mathscr{R}(H_1) \cap \mathscr{R}(H_2)$, és $\iint_H f = \iint_{H_1} f + \iint_{H_2} f$, vagyis $\iint$ additív halmazfüggvény.*
(5) *Ha $f, g \in \mathscr{R}(H)$ és $f(x,y) \le g(x,y)$ minden $(x,y) \in H$-ra, akkor $\iint_H f \le \iint_H g$ ($\iint_H$ monoton).*
(6) *Ha $f \in \mathscr{R}(H)$, akkor $|f| \in \mathscr{R}(H)$ és $|\iint_H f| \le \iint_H |f|$.*

Jordan-mérték A tetszőleges korlátos halmazon való integrállal hozzájutottunk egy olyan eszközhöz, aminek segítségével precízen definiálni lehet a terület és térfogat fogalmát.

A következő definíció azt rögzíti, hogy mit várunk el egy olyan függvénytől, ami korlátos halmazok területét (vagy térfogatát) adja meg. (Amit most csinálunk, az analóg azzal, amit első előadáson a távolsággal tettünk: megfogalmazunk néhány tulajdonságot, amit feltétlenül elvárunk tőle, aztán definiálunk egy konkrét ilyet, ami teljesíti ezeket az elvárásokat.)

8.16. Definíció. A t függvény mérték, ha

(1) $\mathbb{R}^n$ bizonyos részhalmazaihoz rendel nemnegatív valós számokat
(2) ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_1, H_2 \in \operatorname{Dom} t$ (ezt úgy mondjuk, hogy H_1 és H_2 mérhető), akkor $\mathrm{t}(H_1) \le \mathrm{t}(H_2)$ (monotonitás)
(3) ha $H_1, \ldots, H_m \subseteq \mathbb{R}^n$ mérhetők, és a belső pontjaik halmaza páronként diszjunkt (tehát nincs köztük két halmaz aminek lenne közös belső pontja), akkor az uniójuk is mérhető, és $\mathrm{t}(H_1 \cup \ldots \cup H_m) = \sum_{i=1}^m \mathrm{t}(H_i)$ (additivitás)
(4) $\mathrm{t}([a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ (azaz pl. $\mathrm{t}([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$, vagyis a téglalap szokásos területe).

És akkor most jöhet egy konkrét mérték.

8.17. Definíció (Jordan–mérték)**.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos. H Jordan–mérhető, ha $1 \in \mathscr{R}(H)$ (azaz ha $\exists \iint_H 1$). Ilyenkor H Jordan–mértéke $\mathrm{J}(H) = \iint_H 1$. H nullmértékű, ha $\mathrm{J}(H) = 0$.

A Jordan–mérték valóban mérték. Pl. a 3. tulajdonság 8.15(4) miatt igaz.

Mostantól fogva: mérték alatt Jordan–mértéket értünk (mert mértékről általában, és másfajta mértékről nem lesz szó).

8.18. Példa. (nem mérhető halmazra) $([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ nem mérhető, ld. 8.14.

Mire jó a mérték? Pl. meg tudjuk fogalmazni 8.5 egy nem csak tengelypárhuzamos téglalapokon használható változatát.

8.19. Tétel. *Ha f korlátos a H mérhető halmazon és f H-beli szakadási pontjainak halmaza nullmértékű (ezt úgy szokás mondani, hogy f a H halmazon „majdnem mindenütt" folytonos), akkor $f \in \mathscr{R}(H)$.*

Persze ahhoz, hogy ez igazán használható legyen, kellene valami kritérium arra, hogy egy halmaz nullmértékű. A következő tétel ad egy ilyet.

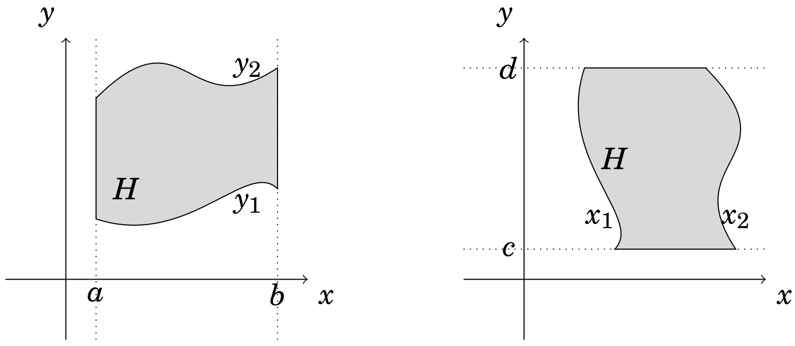
8.20. Tétel. *Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor a grafikonja ($\{(x, f(x)) \colon x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$) nullmértékű.*

Eszerint a 8.13-beli f^* tényleg $\mathscr{R}([0,1] \times [0,1])$-beli, mert egy mérhető halmazon ($[0,1] \times [0,1]$-en) egy folytonos függvény (az identitásfüggvény $[0,1]$-en) grafikonjára esik az összes szakadási pontja.

Integrálás normáltartományokon Általában a sík vagy tér olyan részhalmazain kell integrálni, amit (síkban 1, térben 2-változós) folytonos függvények grafikonjai határolnak.

8.21. Definíció. $H = \{(x,y) \colon x \in [a,b], y \in [y_1(x), y_2(x)]\}$ x-re nézve normáltartomány, ha y_1 és y_2 folytonos valós függvények $[a,b]$-n, és $y_1(x) \le y_2(x)$ minden $x \in [a,b]$-re.

Hasonlóan: $H = \{(x,y) \colon y \in [c,d], x \in [x_1(y), x_2(y)]\}$ y-ra nézve normáltartomány, ha x_1 és x_2 folytonos valós függvények $[c,d]$-n, és $x_1(y) \le x_2(y)$ minden $y \in [c,d]$-re.



x és y szerinti normáltartomány

Normáltartomány mindig zárt és mérhető (speciálisan: korlátos). (A mérhetőség 8.20 és 8.19 következménye, mert ha H normáltartomány, akkor az $f(x) = 1$ ha $x \in H$ és $f(x) = 0$ ha $x \notin H$ függvény (vagyis 1^*) csak két folytonos függvény grafikonján, azaz egy nullmértékű halmazon szakad.) 8.19 miatt ezért normáltartományon a majdnem mindenütt folytonos függvények integrálhatóak.

A normáltartományokon való integrálást könnyű visszavezetni egyváltozós függvények integrálására a következő tétel miatt:

8.22. Tétel. *Ha f majdnem mindenütt folytonos a $H = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [y_1(x), y_2(x)]\}$ normáltartományon, akkor $f \in \mathscr{R}(H)$ és $\iint_H f = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$.*

Hasonlóan: Ha f majdnem mindenütt folytonos a $H = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [x_1(y), x_2(y)]\}$ normáltartományon, akkor $f \in \mathscr{R}(H)$ és $\iint_H f = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$.

Speciálisan, ha H x és y szerint is normáltartomány a fenti paraméterekkel, akkor

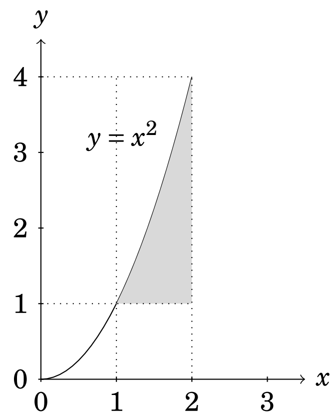
$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Most már van értelme annak az állításnak, hogy nemnegatív egyváltozós valós függvény integrálja a függvénygörbe alatti terület. És, legalábbis folytonos függvényekre, igaz is:

8.23. Következmény. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, f nemnegatív $[a, b]$-n, akkor $H = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ mérhető, és $t(H) = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Bizonyítás. A tételt H-ra és a konstans 1 függvényre alkalmazva (vagy a tételt megelőző megfontolásokból) kapjuk, hogy H mérhető és hogy $t(H) = \iint_H 1 = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1\, dy\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. □

8.24. Példa. $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3} - x)\, dx\, dy =?$ Probléma: $\sin(\frac{x^3}{3} - x)$-nek nincs elemi primitívfüggvénye, tehát ez hiába egy y szerinti normáltartományon (H) való integrálás ($c = 1$, $d = 4$, $x_1(y) = \sqrt{y}$, $x_2(y) = 2$).



Szerencsére H x szerinti normáltartomány is: $a = 1$, $b = 2$, $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^2$. Tehát

$$\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\tfrac{x^3}{3} - x)\,dx\,dy = \iint_H \sin(\tfrac{x^3}{3} - x)\,dx\,dy$$
$$= \int_1^2\int_1^{x^2} \sin(\tfrac{x^3}{3} - x)\,dy\,dx$$

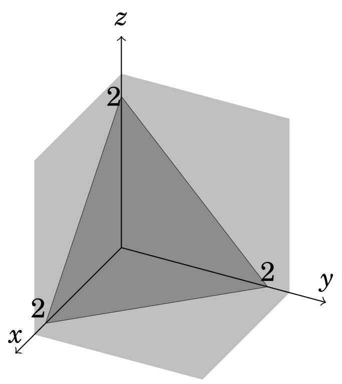
amit viszont ki is lehet számolni:

$$\int_1^2\int_1^{x^2} \sin(\tfrac{x^3}{3} - x)\,dy\,dx = \int_1^2 (x^2 - 1)\sin(\tfrac{x^3}{3} - x)\,dx$$
$$= -\cos(\tfrac{x^3}{3} - x)\Big|_1^2 = -\cos\tfrac{2}{3} + \cos\tfrac{-2}{3} = 0.$$

8.25. Definíció. $H = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in K, z \in [z_1(x,y), z_2(x,y)]\}$ xy-ra nézve normáltartomány, ha $K \subseteq \mathbb{R}^2$ egy x vagy y szerinti normáltartomány, z_1 és z_2 folytonos valós függvények K-n, és $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ minden $(x,y) \in K$-ra. (Hasonlóan definiáljuk az xz-re vagy yz-re nézve normáltartományokat is.)

8.26. Tétel. *Ha f folytonos a $H = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in K, z \in [z_1(x,y), z_2(x,y)]\}$ normáltartományon, akkor $f \in \mathscr{R}(H)$ és $\iiint_H f = \iint_K \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$. Tehát ha például K az $\{(x,y)\colon x \in [a,b], y \in [y_1(x), y_2(x)]\}$ normáltartomány, akkor $\iiint_H f = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$.*

8.27. Példa. Az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (vagyis a koordinátasíkok) és az $x + y + z = 2$ sík által bezárt korlátos térrész térfogata $\iiint_H 1$, ahol $H = \{(x,y,z)\colon x \in [0,2], y \in [0, 2 - x], z \in [0, 2 - x - y]\}$.



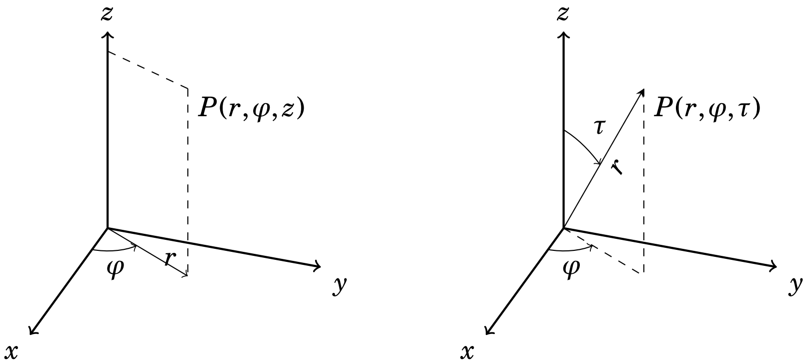
Azaz most $H = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in K, z \in [0, 2 - x - y]\}$ xy szerinti normáltartomány, ahol K az $\{(x,y)\colon x \in [0,2], y \in [0, 2 - x]\}$ x szerinti normáltartomány. Tehát

$$\iiint_H 1 = \int_0^2\int_0^{2-x} \underbrace{\int_0^{2-x-y} 1\,dz}_{2-x-y}\,dy\,dx = \int_0^2 \underbrace{\int_0^{2-x} 2 - x - y\,dy}_{(2-x)y - y^2/2\big|_0^{2-x}}\,dx$$
$$= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{2}\,dx = -\frac{1}{6}(2-x)^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

8.28. *Feladat.* Mi a térfogata annak a háromszög alapú hasábnak, melynek alapja a $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(2,1,0)$ háromszög, az oldallapjai merőlegesek az xy-síkra, és felülről az xy függvény grafikonja határolja? (4/3)

Integráltranszformáció Többváltozós integráloknál a helyettesítéses integrálást integráltranszformációnak hívják, és általában nem azért alkalmazzuk, hogy az integrandus, hanem hogy a halmaz, amin integrálunk, egyszerűsödjön.

8.29. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{R}(H)$, W mérhető, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt és tartalmazza W-t és W határpontjait is; $(x,y)\colon G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható G-n, injektív W belső pontjain, és $(x,y)(W) = H$. Akkor $\iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_W f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$, ahol $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ (x,y) Jacobi-mátrixa, azaz $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ determinánsának abszolútértéke.*



Henger és gömbi koordinátarendszer

3-változóban hasonló a helyzet, csak ott $(x,y,z):G(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$, és a Jacobi-determináns $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. Egyváltozóban is ez volt a helyettesítéses integrál, csak ott a Jacobi-determináns maga a derivált.

Van néhány standard integráltranszformáció, azokat kell alkalmazni; ez azért is jó, mert ezekre tudható, hogy a tétel feltételeinek nagyrésze teljesül, és a Jacobi-determinánsokat is csak egyszer kell kiszámolni.

Áttérés polárkoordinátákra $x(r,\varphi)=r\cos\varphi$, $y(r,\varphi)=r\sin\varphi$ $(r>0,\ \varphi\in[0,2\pi])$, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi&-r\sin\varphi\\ \sin\varphi&r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$ (ezt jegyezzük meg, nem kell mindig kiszámolni).

8.30. Példa. $\iint_{x^2+y^2\le R^2}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=?$ Most $H=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le R^2\}$, $W=\{(r,\varphi)\colon 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi\}$, vagyis téglalapon kell majd integrálni (ez a jó ebben). A feltételek állnak, mert (x,y) injektív W belsejében, G-nek meg választhatjuk $\mathbb{R}^2$-et. Tehát

$$\iint_{x^2+y^2\le R^2}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint_W e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi=\int_0^R\int_0^{2\pi}e^{-r^2}r\,d\varphi\,dr$$
$$=\int_0^R 2\pi e^{-r^2}r\,dr=2\pi\big[-\tfrac12 e^{-r^2}\big]_0^R=\pi(1-e^{-R^2}).$$

Áttérés hengerkoordinátákra Hengerkoordináta-rendszer:

$$x(r,\varphi,z)=r\cos\varphi\qquad y(r,\varphi,z)=r\sin\varphi\qquad z(r,\varphi,z)=z\quad(r>0,\ \varphi\in[0,2\pi])$$

tehát $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\varphi&-r\sin\varphi&0\\ \sin\varphi&r\cos\varphi&0\\ 0&0&1\end{vmatrix}=r.$

8.31. Példa. R sugarú, m magasságú henger térfogata $\iiint_H 1$, ahol $H=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2\le 1, 0\le z\le m\}$, $W=\{(r,\varphi,z)\colon 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le z\le m\}$, vagyis téglatesten kell integrálni:

$$\iiint_H 1\,dx\,dy\,dz=\iiint_W r\,dr\,d\varphi\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^R\underbrace{\int_0^m r\,dz}_{mr}\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^R mr\,dr\,d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}m[r^2/2]_0^R\,d\varphi=\int_0^{2\pi}mR^2/2\,d\varphi=\pi mR^2.$$

Áttérés gömbi koordinátarendszerre

$$x(r,\varphi,\tau) = r\cos\varphi\sin\tau \quad y(r,\varphi,\tau) = r\sin\varphi\sin\tau \quad z(r,\varphi,\tau) = r\cos\tau \quad (r>0,\ \varphi\in[0,2\pi], \tau\in[0,\pi])$$

ezért $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\tau)}$ determinánsa

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\tau & -r\sin\varphi\sin\tau & r\cos\varphi\cos\tau \\ \sin\varphi\sin\tau & r\cos\varphi\sin\tau & r\sin\varphi\cos\tau \\ \cos\tau & 0 & -r\sin\tau \end{vmatrix}$$
$$= \cos\tau(-r^2\sin^2\varphi\sin\tau\cos\tau - r^2\cos^2\varphi\sin\tau\cos\tau) - r\sin\tau(r\cos^2\varphi\sin^2\tau + r\sin^2\varphi\sin^2\tau)$$
$$= -r^2\cos^2\tau\sin\tau - r^2\sin^3\tau = -r^2\sin\tau$$

tehát, mivel $\tau\in[0,\pi]$, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\tau)}\right| = r^2\sin\tau$.

8.32. Példa. R sugarú gömb térfogata: $\iiint_H 1$, ahol $H = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$, $W = \{(r,\varphi,\tau)\colon 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\tau\le\pi\}$, vagyis megint téglatesten kell integrálni:

$$\iiint_H 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_W r^2\sin\tau\,dr\,d\varphi\,d\tau = \int_0^R\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi r^2\sin\tau\,d\tau}_{r^2[-\cos\tau]_0^\pi}\,d\varphi\,dr$$
$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} 2r^2\,d\varphi\,dr = \int_0^R 4r^2\pi\,dr = 4\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4}{3}R^3.$$