Lagrange és Hamilton mechanika

Hülber Tímea, Márton Attila, Molnár András

2010. október 17.

Tartalom

Variációszámítás

Görbék terén értelmezett funkcionál szélsőértékének keresésére.

Görbe: $\gamma = \{(t, \underline{x}) : \underline{x} = \underline{x}(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$.
Görbe variációja: $\gamma' = \{(t, \underline{x}) : \underline{x} = \underline{x}(t) + \underline{h}(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$.

Például: Egy görbe hossza $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$.

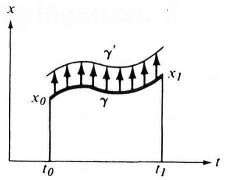


Figure: görbe variálása

Differenciálhatóság

Def Φ *differenciálható*, ha $\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma)=F+R$ alakban írható, ahol

- F lineárisan függ h-tól,
- $R(h,\gamma)=O(h^2)$.

Például:
$\gamma=\{(t,x):x=x(t),t_0\leq t\leq t_1\}$ és $\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}L(x,\dot{x},t)dt$
Ekkor $\Phi(\gamma)$ differenciálható és

$$F(h)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]hdt+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h\right]_{t_0}^{t_1}$$

Szélsőérték

Def $\Phi(\gamma)$ differenciálható funkcionál *szélsőértéke*: olyan γ-nál, amire $F(h) = 0$ $\forall$h.

Tétel $x(t_0) = x_0$ és $x(t_1) = x_1$. $\gamma : x = x(t)$ görbére a $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ funkcionálnak szélsőértéke van $\Leftrightarrow$ ha

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Például: görbehossz szélsőértéke, ha γ egy egyenes.

$$L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Euler-Lagrange egyenlet

Def $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ funkcionálhoz tartozó *Euler-Lagrange egyenlet*:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Tétel Azon görbék közül, melyek átmennek a (t_0, x_0) és (t_1, x_1) pontokon a $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ funkcionál az esetén veszi fel a szélsőértékét, mely kielégíti az Euler-Lagrange egyenletet.

Legkisebb hatás elve

Tétel Newtoni rendszer mozgásegyenlete:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{\underline{r}}_i) + \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_i} = 0 \quad i = 1 \dots n$$

A hozzá tartozó funkcionál:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

ahol L=T-U, T a rendszer kinetikus és U a potenciális energiája.
Bizonyítás

$$U = U(\underline{r}), \quad T = \sum m_i \dot{r}_i^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = m_i \dot{\underline{r}}_i \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}_i}$$

Legkisebb hatás elve

Következmény $(q_1, \ldots, q_{3n})$ az n tömegpontot tartalmazó rendszer konfigurációs térbeli koordinátái. $\underline{q}$ fejlődése az Euler-Lagrange egyenlet alapján történik, ahol L=T-U.

Definíciók

- *Hatás*: $\int_{t_0}^{t_1} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)dt$
- *Lagrange függvény*: $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = T - U$
- *Általánosított koordináták*: $\dot{q}_i$
- *Általánosított impulzusok*: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$
- *Általánosított erők*: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = K_i$
- *Lagrange egyenlet*: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

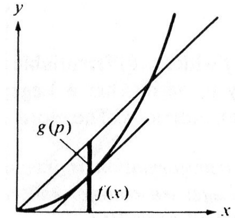
Definíció

Legyen $y = f(x)$ konvex függvény (f"(x)>0).

$x = x(p)$ pontban van a függvény a legtávolabb az $y = px$ egyenestől.
Vagyis $F(p, x) = px - f(x)$ függvény maximumhelye $x = x(p)$.

Definíció
f(x) *Legendre transzformált*ja:
$g(p) = F(p, x(p))$

Következmény
$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x(p)} = 0 \Rightarrow f'(x)|_{x(p)} = p.$



Hamilton és Lagrange egyenletek ekvivalenciája

Tétel A Lagrange egyenletrendszer ekvivalens egy 2n egyenletből álló elsőfokú egyenletrendszerrel.

$$\dot{\underline{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}}, \qquad \dot{\underline{q}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}, \qquad ahol \qquad H(\underline{p}, \underline{q}, t) = \underline{p\dot{q}} - L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t).$$

Bizonyítás

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} d\underline{p} + \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} d\underline{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{\underline{q}} d\underline{p} - \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} d\underline{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Tétel Legyen $L = T - U$, $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, ahol $a_{ij} = a_{ij}(\underline{q}, t)$ és $U = U(\underline{q})$. Ekkor $H = T + U$ a teljes energia.

Noether tétel

Jelölés. M sima sokaság. $L : TM \to \mathbb{R}$ folytonos funkcionál, $h : M \to M$ folytonos, $h_* : TM \to TM$ indukált leképezés.

Definíció. Egy Lagrange rendszer (M,L) invariáns a h-ra, ha bármely $\mathbf{v} \in TM$ vektorra: $L(h_*\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$

Példa

$M = \{(x_1, x_2, x_3\}$ és $L = (m/2)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_2, x_3)$, ekkor a rendszer invariáns a $h : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + s, x_2, x_3)$ eltolással szemben, azonban x_2 és x_3 irányra ez nem igaz

Noether tétel

Tétel. Noether tétel: ha (M,L) invariáns a $h^s : M \to M$ $(s \in \mathbb{R})$ egyparaméteres diffeomorfizmus csoportra, akkor létezik első integrálja: $I : TM \to \mathbb{R}$. Lokális koordinátákkal:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{dh^s(\mathbf{q})}{ds} \Big|_{s=0}$$

Megjegyzés: $I = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}} \, \mathbf{q}'$ koordinátarendszer-független

Noether tétel

$\mathbf{q}(t)$ megoldás $\to \Phi(s,t) = h^s\mathbf{q}(t)$ megoldás:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\Phi, \dot{\Phi})\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\Phi, \dot{\Phi})$$

$$0 = \frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\Phi}'$$

$$0 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\mathbf{q}' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}'\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\mathbf{q}'\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I$$

Példa: nem kölcsönható tömegpontok

Lagrange-fv:

$$L = \sum m_i \frac{\dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} - U(\mathbf{x})$$

i. tkp. koordintája $\mathbf{x}_i = x_{i1}\mathbf{e}_1 + x_{i2}\mathbf{e}_2 + x_{i3}\mathbf{e}_3$. Kényszer: $f_j(x) = 0$

Tfh. $h^s : \mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_i + s\mathbf{e}_1$ eltolás minden i-re lehetséges, tehát a kényszerek megengedik a rendszer $\mathbf{e_1}$ mentén történő mozgását , a potenciális energia megváltozása nélkül. Noether: a rendszerünk tkp mozgásának vetülete $\mathbf{e_1}$-re egyenletes.

$$\frac{d}{ds}(h^s \mathbf{x}_i)|_{s=0} = \mathbf{e}_1$$

$$I = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \mathbf{e}_1 = \sum m_i \dot{x}_i$$

Szimplektikus sokaság

Szimplektikus sokaság

(M, Ω) pár, M: differenciálható sokaság, Ω: nem elfajuló zárt 2-forma.

Állítás. $\dim M = 2n$
Ha $\Omega = A_{ij} dx_i \wedge dx_j$, akkor

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{\dim M} \det(A)$$

Állítás. Ω segítségével $TM_p \equiv TM_p^*$
Injekció: $X \in TM_p$ esetén $\bar{X}(Y) := \Omega(X, Y)$, Ω nem elfajuló
Véges dimenzió: $dim TM_p = dim TM_p^*$, izomorfizmus.
Jelölés. Ha $\bar{X} = \omega$ akkor $\bar{\omega} := X$. Azaz $\omega(Y) = \bar{X}(Y) = \Omega(X, Y) = \Omega(\bar{\omega}, Y)$.

Hamilton mező

Hamilton mező

X, ha $\exists H$: $X = \overline{\mathrm{d}H}$. H: Hamilton-függvény.

Definíció. f első integrál, ha $Xf = 0$.
Állítás. H első integrál.
$X(f) = \mathrm{d}f(X) = \Omega(\overline{\mathrm{d}f}, \overline{\mathrm{d}H}) = 0$, ha $f = H$.
Legyen $\sigma_t(p)$ a $\overline{\mathrm{d}H}$ által indukált fázisfolyam: $\dot{\sigma}_t(p) = \overline{\mathrm{d}H}$. Ekkor

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f(\sigma_t(p_0))}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}f(\dot{\sigma}_t) = \mathrm{d}f(\overline{\mathrm{d}H}) = \Omega(\overline{\mathrm{d}f}, \overline{\mathrm{d}H})$$

Példa

Legyenek (q^i, p_i) koordinátázás M páros dimenziós sokaságon, $\Omega = 2\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i = \mathrm{d}q^i \otimes \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}p_i \otimes \mathrm{d}q^i$.

Állítás. Ω zárt.

$$\mathrm{d}\Omega = 2\mathrm{d}^2 q^i \wedge \mathrm{d}p_i - 2\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}^2 p_i = 0$$

Legyen $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_j \frac{\partial}{\partial p_j}$, $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta_j \frac{\partial}{\partial p_j}$, ekkor

$$\Omega(X, Y) = (\mathrm{d}q^i \otimes \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}p_i \otimes \mathrm{d}q^i)(X, Y) = \xi^i \eta_i - \xi_i \eta^i$$

Azaz $\overline{X} = -\xi_j \mathrm{d}q^j + \xi^i \mathrm{d}p_i$.

Ha X hamiltoni, akkor $X = \overline{\mathrm{d}H} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial p_j}$

Ha γ integrál görbe, akkor

$$\frac{\mathrm{d}q^i(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{\mathrm{d}p_j(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$$

Hamilton és Lagrange

M sokaság, $TM^* = \cup_p TM_p^*$ ko-érintőnyaláb (sokaság!) koordinátázható:

$$\omega = p_i \mathrm{d}(q^i)_q \to (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$$

Természetes projekció: $\pi : T^*M \to M : \omega \mapsto q$,
indukált leképzés: $\pi_* : T_\omega(T^*M) \to T_q M$
Kanonikus 1-forma: $\theta_\omega(X_\omega) = \omega(\pi_* X_\omega)$

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i$$

Ekkor $\Omega = -2\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$ szimplektikus struktúra.

Hamilton és Lagrange

M Riemann sokaság, L lagrange függvény, g_{ij} metrikus tenzor.

$$\dot{p}_i = g_{ij}\ddot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^j}$$

Ekkor $\mathrm{d}H$ számolható természetes szimplektika mellett:

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}p_i = -\dot{p}_i\mathrm{d}q^i + \dot{q}^i\mathrm{d}p_i =$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \mathrm{d}(\dot{q}^i p_i) - p_i\mathrm{d}\dot{q}^i =$$

$$\mathrm{d}(\dot{q}^i p_i) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{d}\dot{q}^i\right) = \mathrm{d}\left(\dot{q}^i p_i - L\right)$$