

Baktériumtenyészet

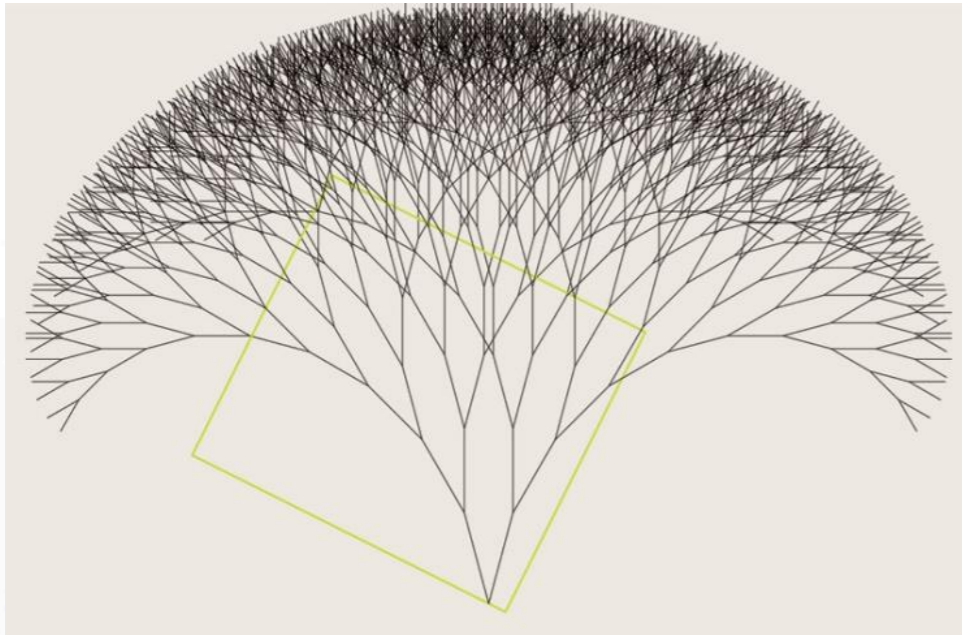
Gresits Iván (JBLL92)

Szőllősi Tibor (VTIJUQ)

Gál Tibor (J7JXBV)

Bojtos I. Péter (AAC4CK)

Probléma felvetése



- Baktérium szaporodik: X valószínűségi változó szerint létrehoz utódot, majd meghal. Kérdések:
- Várhatóan mekkora az n . generációban a populáció? Mekkora valószínűséggel hal ki a populáció?
- (Megj: Eredetileg családnevek fennmaradását vizsgálták)

Formalizálás

- X_m^n faev. és $m, n \in \mathbb{N}$. kétszeresen végtelen sorozat: az n . generáció m . baktériumának a „gyerekeinek” a száma.
- Az $n+1$. generációban a baktériumok száma:

$$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + X_2^{(n+1)} + \dots + X_{Z_n}^{(n+1)}; Z_0 = 1$$

Momentum generáló függvény

$$f(\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Theta^k \cdot \mathbb{P}(X = k); \mathbb{P}(X = 0) > 0$$

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\mathbb{E}(X) = f(1)' = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$f_n(\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^{Z_n})$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \Theta^k \cdot \mathbb{P}(Z_n = k)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\Theta^{X_1^1 + X_2^1 + \dots + X_{Z_n}^1} \mid Z_1 = k \right) \cdot \mathbb{P}(Z_1 = k) = f_n(f(\Theta)) \Rightarrow$$

$$f_n(\Theta) = f \circ f \circ \dots \circ f \} n - \text{szer}$$

Miért is?

$$f_2(\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^{Z_2}) = \mathbb{E}\left(\Theta^{X_1^1 + X_2^1 + \dots + X_{Z_1}^1}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Theta^{X_1^1 + X_2^1 + \dots + X_{Z_1}^1} \mid Z_1 = k\right) \cdot \mathbb{P}(Z_1 = k) = f(f(\Theta))$$

És így tovább...

$$\Rightarrow f_n'^{(1)} = \mathbb{E}(Z_n)$$

az n. generáció várható értéke

A kihalás valószínűsége

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

$$f_n(0) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0^k \cdot \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \pi_n$$

és persze: $\pi_{n+1} = f(\pi_n)$

Állítás: π_n konvergens, és a határértéke:

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_m = 0 \text{ valamely } m - \text{re}) = \uparrow \lim \pi_n$$

$$\Rightarrow \pi = f(\pi)$$

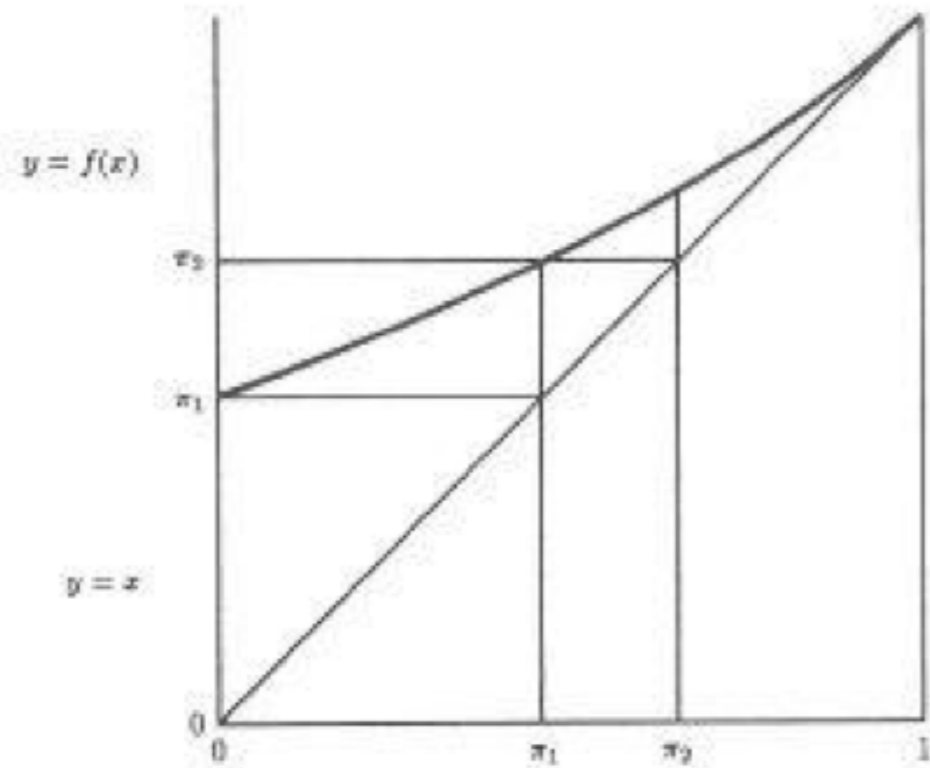
egyenletet kell megoldani.

Két eset

f $[0, 1]$ -en analitikus, nem csökkenő, konvex,

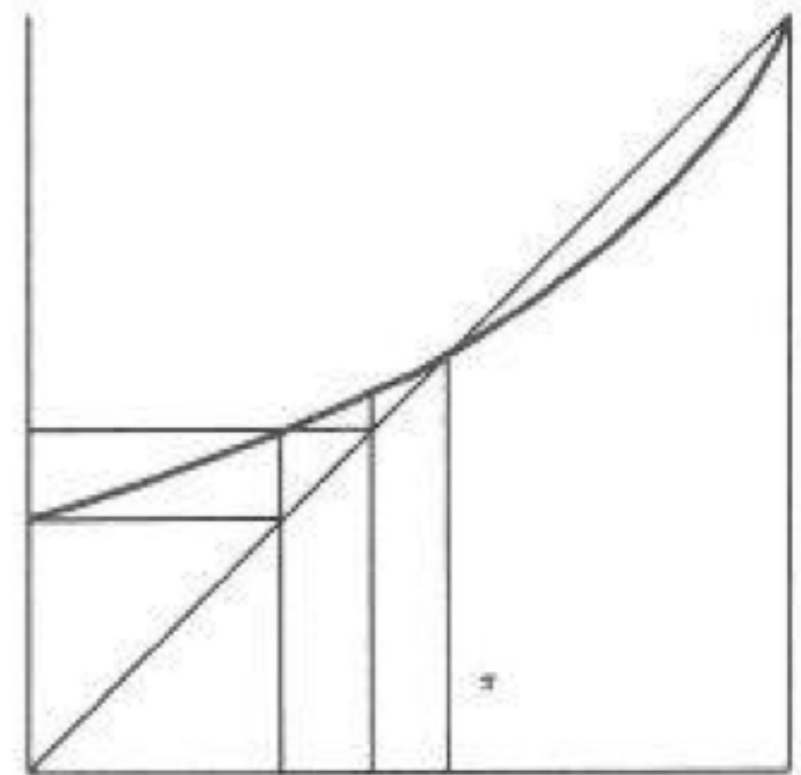
$$f(0) > 0; f(1) = 1; f'(1) = \mu$$

1.eset



$$\mu < 1 \Rightarrow \pi = 1$$

2.eset



$$\mu > 1 \Rightarrow \pi \in [0, 1]$$

A martingál

$\mathbb{E}(M_{n+1} | Z_0, Z_1, \dots, Z_n) = M_n$ $\{M_n\}$ martingál a Z folyamatra

egyébként: $\mathbb{E}(M_{n+1} | M_0, M_1, \dots, M_n) = M_n$ is igaz.

$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ az elágazó folyamatra

itt: $\mathbb{E}(M_n) = 1 \forall n$ -re is igaz.

Martingál konvergencia tétele

$M_n \geq 0 \forall n \Rightarrow \exists M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ (m.b)

esetünkben: $\frac{Z_n}{\mu^n} \rightarrow \infty$ ha $n \rightarrow \infty$ (m.b), ez gyakorlatilag az exponenciális növekedés megfogalmazása

vegyük észre $\mu > 1$ -re lesz $M_\infty > 0$ pozitív valószínűséggel.

Z hogyan viselkedik M_∞ függvényében

tipp: $\mathbb{E}(M_n)=1 \quad \forall n \Rightarrow \mathbb{E}(M_\infty)=1$ de!!!

$\mu \leq 1$ -re $\Rightarrow \exists N: n > N \Rightarrow M_n = 0 \Rightarrow M_\infty = 0$ (m.b)

így: $0 = \mathbb{E}(M_\infty) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n)$

Fatou-lemma: $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad Y_n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n)$

Csak bizonyos esetekben igaz, hogy $\mathbb{E}(\lim(.)) = \lim(\mathbb{E}(.))$

belátható: $\mathbb{E}(M_\infty)=1 \Leftrightarrow \mu > 1$ és $\mathbb{E}(X \cdot \log X) < \infty$

ugyanakkor $\mu > 1$ és $\mathbb{E}(X \cdot \log X) = \infty$ esetén $M_\infty = 0$ (m.b) annak ellenére, hogy a folyamat, nem biztos, hogy kihál

M_∞ eloszlása

$$M_n \rightarrow M_\infty \text{ (m.b)} \Rightarrow \lambda > 0: e^{-\lambda M_n} \rightarrow e^{-\lambda M_\infty} \text{ (m.b)}$$

$$M_n \geq 0 \Rightarrow e^{-\lambda M_n} \leq 1 \Rightarrow \mathbb{E}(e^{-\lambda M_\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-\lambda M_n}) \quad \text{korlátos konvergencia tétel}$$

$$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n} \text{ és } \mathbb{E}(\Theta^{Z_n}) = f_n(\Theta) \Rightarrow \mathbb{E}(e^{-\lambda M_n}) = f_n(e^{-\lambda/\mu^n})$$

M_∞ eloszlása

bármilyen Y nem-negatív változóra az eloszlást egyértelműen meghatározza:

$$\lambda \in (0, \infty) \quad \lambda \mapsto \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})$$

$$\text{Legyen } L(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda M_\infty})$$

$$\text{mivel } f_{n+1} = f \circ f_n$$

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda M_{n+1}}) = f_{n+1}(e^{-\lambda \mu / \mu^{n+1}}) = f\left(f_n(e^{-\lambda / \mu^n})\right) = f\left(\mathbb{E}(e^{-\lambda M_n})\right)$$

$n \rightarrow \infty$ korlátos konvergencia konvergencia tétel + $L(\lambda)$ folytonos

$$L(\lambda \mu) = f(L(\lambda)) \text{ függvényegyenlet melyből } L(\lambda) \text{ meghatározható}$$

Egy alkalmazás

- Abrakadabra, avagy az idő pénz:
- Időegységenként leüt egy majom egy billentyűt véletlenszerűen az írógépen.
- Várhatóan mikor jön ki az, hogy abrakadabra?

Egy alkalmazás

- Minden ütés előtt jön egy fogadó, és fogad 1\$ -ral, hogy az A lesz.
- Ha nyer, kap Q \$-t, és ezt felteszi arra, hogy a következő B-lesz, sít.
- Ha veszít, akkor kiesik.
- Jelölje U_n a leütött betűt n -kor, M_n az n -kori kifizetéseket és $X_n = M_n - n$.
- Állítás: az X_n sorozat martingál

Egy alkalmazás

$$M_{n+1} = H_1(U_{n+1}) + \sum_{j=1}^n S_{n,j} H_{n+2-j}(U_{n+1}), \text{ ahol:}$$

$H_k(L) = Q$, ha a k -adik betű L , egyébként meg 0 ,

$S_{n,j}$ = az a nyeremény, amit n -kor fizetnek ki annak, aki j -kor jött

Egy alkalmazás

$$\begin{aligned} EM_{n+1} &= 1 + \sum_{j=1}^n S_{n,j} EH_{n+2-j}(U_{n+1}) = \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n S_{n,j} = 1 + M_n \end{aligned}$$

Tehát X martingál

Egy alkalmazás

Legyen T az az idő, amikor először kijön az ABRAKADABRA

Ekkor $M_T = Q^{11} + Q^4 + Q$ és $EX_T = 0$, és mivel $X_T = M_T - T$

$$0 = E(M_T - T) = EM_T - ET$$

de EM_T nyilván $Q^{11} + Q^4 + Q$

így

$$ET = Q^{11} + Q^4 + Q$$

Köszönjük a megtisztelő figyelmet

mmzombczgyzuywaeppzbnuvjascwmlcnokizpwnixypeaezslumijwyfcgicmme
abkkukhqltzkvyusvmzjcqclgnbbicbklvxfityjaocpecqntulwjomvltaxedurvyadrbge
:osusxqhhfycynyktiaaolemeec lurhbenbwwzvafkcaxrggosadadevpptvboyugtclr
tnnzbfwmzkkdwtbfqmqsfbysjcefbinnmyhwakmqslwgsbfyxzyrybwlyamrcoc
sfabsqdecgkrajbsnbzhkcwasahdwargojwnguivyjttoepzpsyozvpodanogsuhia
eldihcjdtltzabracadabrajkvmrqeewlsktbtbgmocyfqcnehwbcljyvocqedttzuihc
sokclpbkdfmifdhjekcuqrqqgaqwpwxmrfaxzocpnbjdgcbdxmuidjurkkweqzzkjpxw
dptseikczosoyvzkgtluxqecjhqoorqyoqrgwxfiztdqykljavqqsfuutrdwrqicemlgshjr
nuvmmmuugiiexfocfyswttzkcxvufazbfcwrzfcawqzjxfsnwksircphgjwhqmufpve
mwzbzknuiyuinfnqkmyvfaqqeherfbqoamjuxgggrgfqfmlmjyhkvnpcqbcufpflircpkr
naqrsixjqugurpldndmtjtzgslyakplxfdafmsutbtltousbexuauptebbozybgpugxbpa
:bidjxurmtwpyabgwhegijbnlxprwkpgksvuagvcuutogkrgknmlnpxycrryspxniyc
dxakpwkpsxsocescuzsdlxqecnexmwkhscmgxzepuqzchxldajhcatdyicvannekly
orygiowruktuihzyeocroxszytzcqcfafsfjdqscasslnltkyqvejaxdmhichoklzpvmixy
ezsidhmjwyfcgfcmlayavzabkkukhqltzkvyusvmzjcqclgnbbicbklvxfityjaocpecqnt
omvltaxedurvyadrbgereqmtosusxqhhfycynyktiaaolemeec lurhbenbwwzvafkcax
sadadevpptvboyugtclnbedvlttnnzbfwmzkkdwtbfqmqsfbysjcefbinnmyhwakmqsl