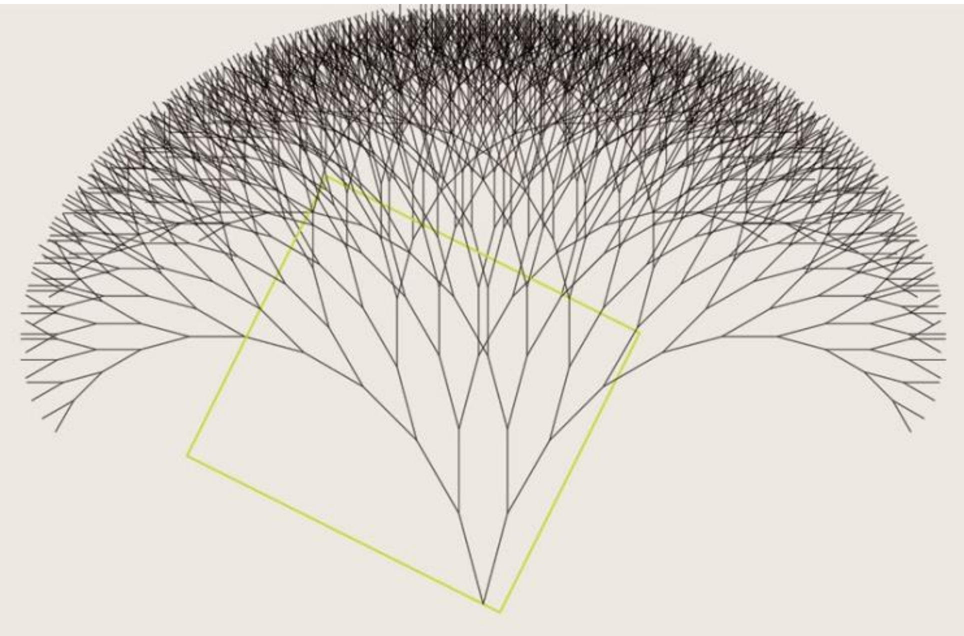
Baktériumtenyészet

Gresits Iván (JBLL92)
Szőllősi Tibor (VTIJUQ)
Gál Tibor (J7JXBV)
Bojtos I. Péter (AAC4CK)

Probléma felvetése



- Baktérium szaporodik: X valószínűségi változó szerint létrehoz utódot, majd meghal. Kérdések:
- Várhatóan mekkora az n. generációban a populáció? Mekkora valószínűséggel hal ki a populáció?
- (Megj: Eredetileg családnevek fennmaradását vizsgálták)

Formalizálás

- X_m^n faev. és m,n $\in$ N. kétszeresen végtelen sorozat: az n. generáció m. baktériumának a „gyerekeinek" a száma.
- Az n+1. generációban a baktériumok száma:

$$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + X_2^{(n+1)} + \cdots + X_{Z_n}^{(n+1)};\ Z_0 = 1$$

Momentum generáló függvény

$$f(\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \Theta^{\mathrm{k}} \cdot \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k})\,;\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) > 0$$

$$f\colon [0,1] \to [0,1]$$

$$\mathbb{E}(X) = f(1)' = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{k} \cdot \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k})$$

$$\begin{aligned} f_n(\Theta) &= \mathbb{E}(\Theta^{Z_n}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \Theta^{\mathrm{k}} \cdot \mathbb{P}(\mathrm{Z_n} = \mathrm{k}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Theta^{X_1^1 + X_2^1 + \cdots + X_{Z_n}^1} | \mathrm{Z_1} = \mathrm{k}\right) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{Z_1} = \mathrm{k}) = \mathrm{f_n}\big(\mathrm{f}(\Theta)\big) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_n(\Theta) = f \circ f \circ \ldots \circ f\}\, n - szer$$

Miért is?

$$f_2(\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^{Z_2}) = \mathbb{E}\left(\Theta^{X_1^1+X_2^1+\cdots+X_{Z_n}^1}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\Theta^{X_1^1+X_2^1+\cdots+X_{Z_n}^1} | \mathrm{Z}_1 = \mathrm{k}\right) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{Z}_1 = \mathrm{k}) = \mathrm{f}\big(\mathrm{f}(\Theta)\big)$$

És így tovább…

$$\Rightarrow f_n'^{(1)} = \mathbb{E}(Z_n)$$

az n. generáció várható értéke

A kihalás valószínűsége

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

$$f_n(0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 0^k \cdot \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \pi_n$$

és persze: $\pi_{n+1} = f(\pi_n)$

Állítás: π_n konvergens, és a határértéke:

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_m = 0 \text{ valamely } m - \text{re}) =\uparrow \lim \pi_n$$

$$\Rightarrow \pi = f(\pi)$$

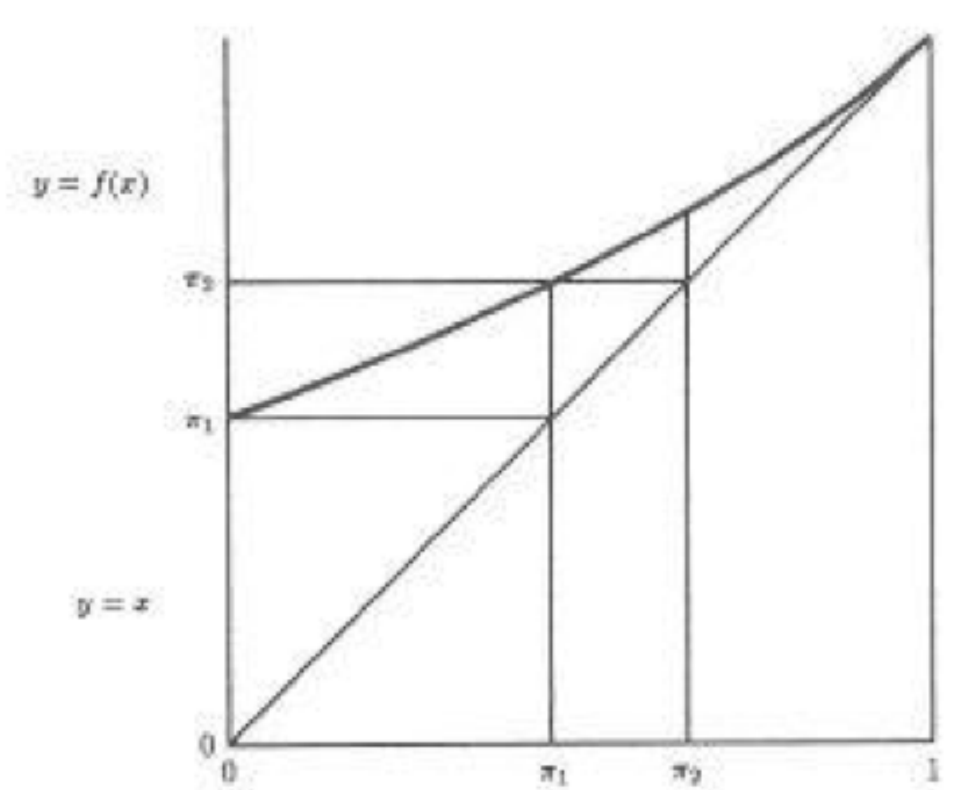
egyenletet kell megoldani.

Két eset

f [0,1]-en analitikus, nem csökkenő, konvex,

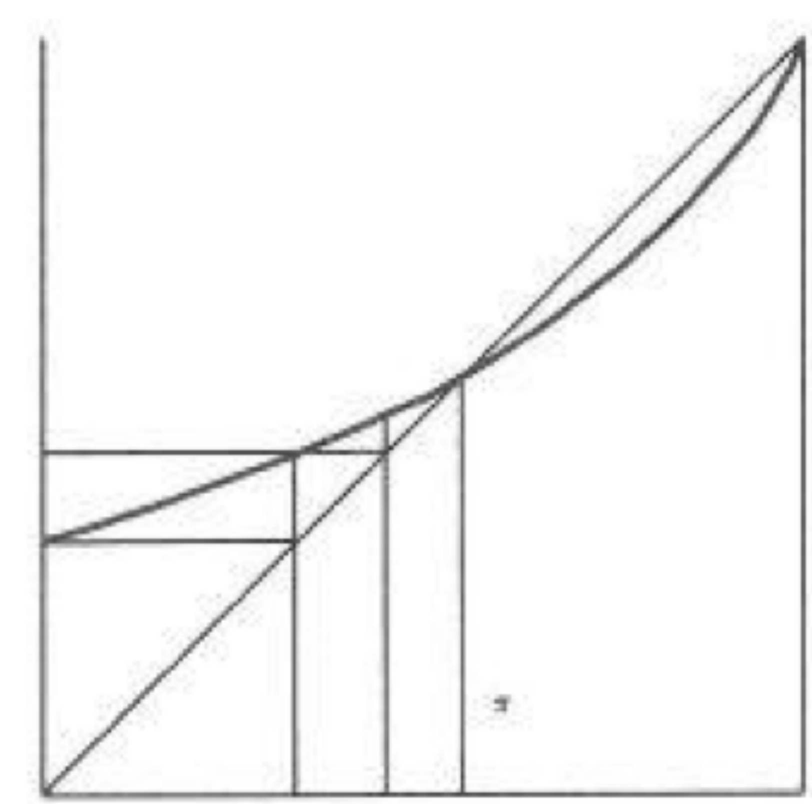
$$f(0) > 0; f(1) = 1; f'(1) = \mu$$

1.eset



$\mu < 1 \Rightarrow \pi = 1$

2.eset



$\mu > 1 \Rightarrow \pi \in [0,1]$

A martingál

$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathrm{Z}_0, \mathrm{Z}_1 \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n}) = M_n$ $\{M_n\}$ martingál a Z folyamatra

egyébként: $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1 \dots, \mathrm{M}_\mathrm{n}) = M_n$ is igaz.

$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ az elágazó folyamatra

itt: $\mathbb{E}(M_n) = 1$ $\forall n$-re is igaz.

Martingál konvergencia tétele

$M_n \geq 0 \forall n \Longrightarrow \exists M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$ (m.b)

esetünkben: $\frac{Z_n}{\mu^n} \to \infty \; ha \; n \to \infty$ (m.b), ez gyakorlatilag az exponenciális növekedés megfogalmazása

vegyük észre $\mu > 1$-re lesz $M_\infty > 0$ pozitív valószínűséggel.

Z hogyan viselkedik M_∞ függvényében

tipp: $\mathbb{E}(M_n)$=1 $\forall n \Longrightarrow \mathbb{E}(M_\infty)$=1 de!!!

$\mu \leq$ 1-re $\Longrightarrow \exists N: n > N\ M_n = 0 \ \Longrightarrow M_\infty = 0$ (m.b)

így: $0 = \mathbb{E}(M_\infty) \neq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n)$

Fatou-lemma: $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \ Y_n \geq 0 \ \Longrightarrow \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} inf Y_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} inf\, \mathbb{E}(Y_n)$

Csak bizonyos esetekben igaz, hogy $\mathbb{E}\big(lim(.)\big) = lim\big(\mathbb{E}(.)\big)$

belátható: $\mathbb{E}(M_\infty)$=1 $\Leftrightarrow \mu > 1$ és $\mathbb{E}(X \cdot logX) < \infty$

ugyanakkor $\mu > 1$ és $\mathbb{E}(X \cdot logX) = \infty$ esetén $M_\infty = 0$ (m.b) annak ellenére, hogy a folyamat, nem biztos, hogy kihal

M_∞ eloszlása

$M_n \to M_\infty$ (m.b) $\Rightarrow \lambda > 0$: $e^{-\lambda M_n} \to e^{-\lambda M_\infty}$ (m.b)

$M_n \geq 0 \Rightarrow e^{-\lambda M_n} \leq 1 \Rightarrow \mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_n}\right)$ korlátos konvergencia tétel

$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ és $\mathbb{E}(\Theta^{Z_n}) = f_n(\Theta) \Rightarrow \mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_n}\right) = f_n\left(e^{-\lambda/\mu^n}\right)$

M_∞ eloszlása

bármilyen Y nem-negatív változóra az eloszlást egyértelműen meghatározza:

$\lambda \in (0, \infty) \quad \lambda \mapsto \mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y}\right)$

Legyen $L(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_\infty}\right)$

mivel $f_{n+1} = f \circ f_n$

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_{n+1}}\right) = f_{n+1}\left(e^{-\lambda\mu/\mu^{n+1}}\right) = f\left(f_n\left(e^{-\lambda/\mu^n}\right)\right) = f\left(\mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_n}\right)\right)$$

$n \to \infty$ korlátos konvergencia konvergencia tétel + $L(\lambda)$ folytonos

$L(\lambda\mu) = f\left(L(\lambda)\right)$ függvényegyenlet melyből $L(\lambda)$ meghatározható

Egy alkalmazás

- Abrakadabra, avagy az idő pénz:
  - Időegységenként leüt egy majom egy billentyűt véletlenszerűen az írógépen.
  - Várhatóan mikor jön ki az, hogy abrakadabra?

Egy alkalmazás

- Minden ütés előtt jön egy fogadó, és fogad 1$ -ral, hogy az A lesz.
- Ha nyer, kap Q$-t, és ezt felteszi arra, hogy a következő B-lesz, sít.
- Ha veszít, akkor kiesik.
- Jelölje U_n a leütött betűt n-kor, M_n az n-kori kifizetéseket és $X_n = M_n - n$.
- Állítás: az X_n sorozat martingál

Egy alkalmazás

$$M_{n+1} = H_1(U_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} S_{n,j} H_{n+2-j}(U_{n+1})\text{, ahol:}$$

$H_k(L)=Q$, ha a k-adik betű L, egyébként meg 0,

$S_{n,j}$=az a nyeremény, amit n-kor fizetnek ki annak, aki j-kor jött

Egy alkalmazás

$$EM_{n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} S_{n,j} EH_{n+2-j}(U_{n+1}) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} S_{n,j} = 1 + M_n$$

Tehát X martingál

Egy alkalmazás

Legyen T az az idő, amikor először kijön az ABRAKADABRA

Ekkor $M_T = Q^{11}+Q^4+Q$ $EX_T=0$, és mivel $X_T=M_T-T$

$$0=E(M_T-T)= EM_T-ET$$

de EM_T nyilván $Q^{11}+Q^4+Q$

így

$$ET= Q^{11}+Q^4+Q$$

Köszönjük a megtisztelő figyelmet