Hausdorff dimenzió, önhasonló halmazok, fraktálok

Csépány Gergely, Holló László, Matulik Gábor, Szijártó Rita

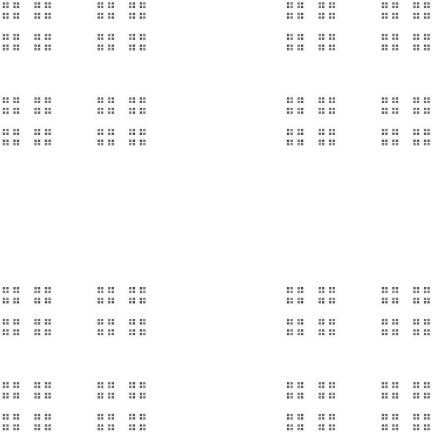
2010. október 22.

Mi az a fraktál?

Például a Cantor halmaz:

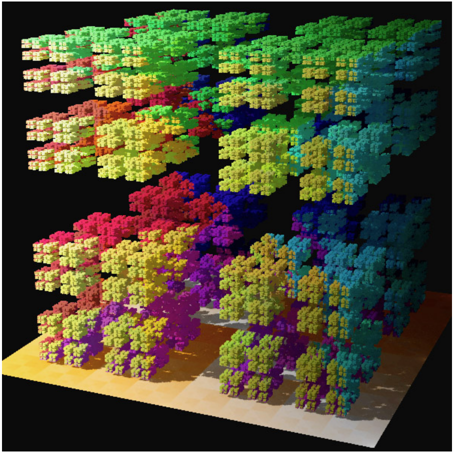
Mi az a fraktál?

Például a két dimenziós Cantor halmaz:



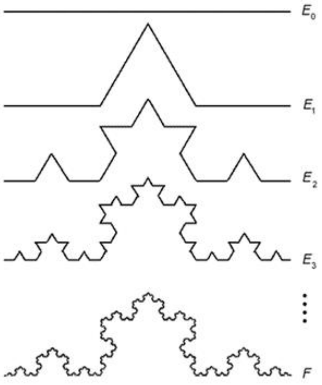
Mi az a fraktál?

Például a három dimenziós Cantor halmaz:



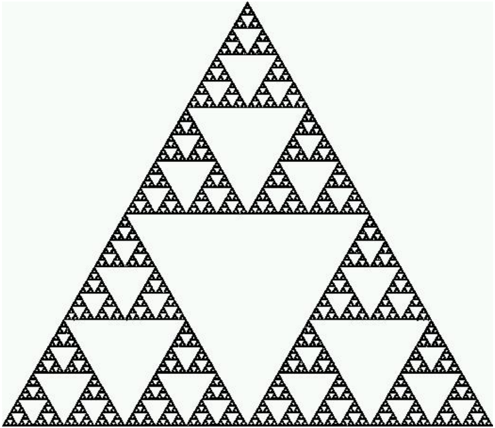
Mi az a fraktál?

Például a Koch-görbe



Mi az a fraktál?

Például a Sierpinski-háromszög



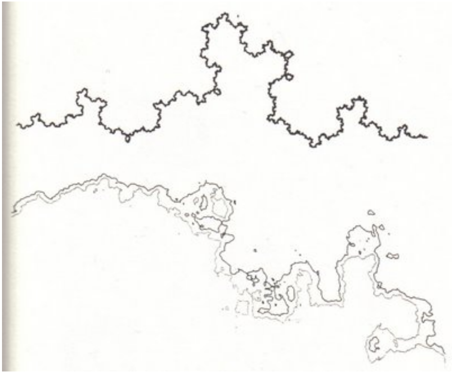
Mi az a fraktál?

Tulajdonságok:

- Önhasonló
- Tetszőlegesen kis skálán is 'finom' a szerkezete
- Gyakran rekurzióval kapható meg
- Klasszikus geometriai módszerekkel nem igazán írható le

Önhasonlóság?

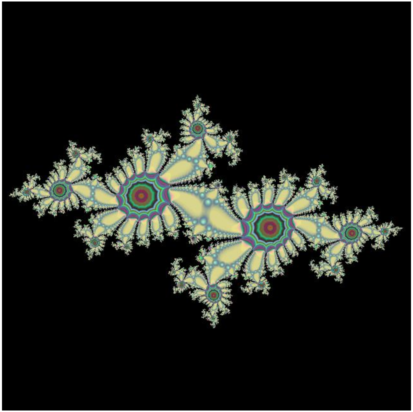
A random Koch-görbe nem fraktál?



Az, pedig csak statisztikailag önhasonló.

Önhasonlóság?

A Julia-halmazok nem fraktál?



Az, pedig csak közelítőleg önhasonló.

Mi az a fraktál?

Nincs rá teljesen jó definíció. Minden definíció alól találtak kivételt, amit tulajdonságai alapján fraktálnak kellene tekinteni.

Mandelbrot definíciója szerint a fraktál egy olyan halmaz aminek Hausdorff-dimenziója nagyobb a topológiai dimenziójánál.

Egy X topologikus tér topológiai dimenziója az a legkisebb n szám, hogy X tetszőleges nyílt fedésének van olyan finomítása, hogy X egyetlen pontját se tartalmazza $n + 1$-nél több nyílt halmaz.

Mi az a fraktál?

Általában azokat a halmazokat tekintjük fraktáloknak amik:

- Tetszőlegesen kis skálán is 'finom' a szerkezete
- Túl szabálytalan ahhoz hogy globálisan vagy lokálisan leírható legyen klasszikus geometriai eszközökkel
- Önhasonló (akár statisztikailag, vagy közelítően)
- A 'fraktál dimenziója' nagyobb a topológiai dimenziójánál
- Egyszerűen, gyakran rekurzívan definiált

Miért érdekes egy fraktál?

Sok természetes objektum mutat fraktálszerű szerkezetet

A felhők rojtozata:

Miért érdekes egy fraktál?

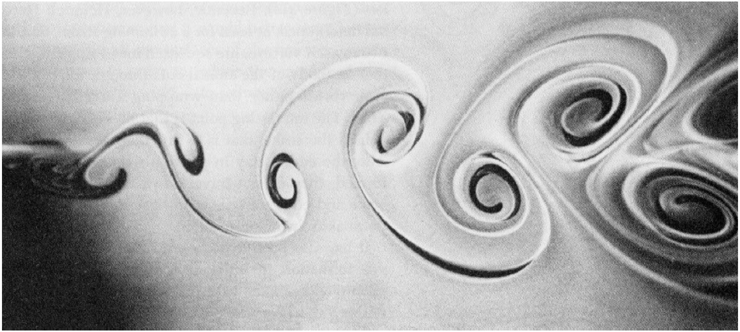
Sok természetes objektum mutat fraktálszerű szerkezetet

A partvidékek:

Miért érdekes egy fraktál?

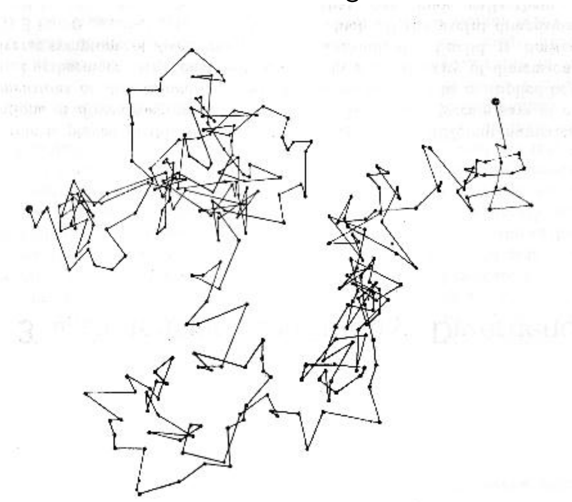
Sok természetes objektum mutat fraktálszerű szerkezetet

Turbulens áramvonalak:



Sok természetes objektum mutat fraktálszerű szerkezetet

A Brown-mozgás:



Dimenzió

Többféle definíció létezik a 'fraktál-dimenzióra', és a különböző definíciók alapján számolt dimenziók különbözhetnek!

Mi a Hausdorff- és a box-dimenzióról beszélünk ma.

Hausdorff-mérték

Az $\{U_i\}$ megszámlálható halmazrendszert az F halmaz δ-fedésének hívjuk, ha $0 \leq |U_i| < \delta$ és

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

Ekkor definiáljuk

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ egy } \delta \text{ -fedése } F\text{-nek} \right\}.$$

Ekkor létezik a $\delta \to 0$ határérték és a

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

limeszt az F halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékének nevezzük. Megmutatható, hogy ez valóban mérték.

Hausdorff-mérték tulajdonságai

Ha F az $\mathbb{R}^n$ egy Borel-részhalmaza, akkor

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} vol^n(F)$$

ahol c_n az n-dimenziós egységgömb térfogata.

Legyen S az a hasonlósági transzformáció, ami λ-szorosára változtatja a lineáris méreteket. Ekkor

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

Állítás Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ és $f : F \to \mathbb{R}^m$ leképezés, ami teljesíti a

Hölder-feltételt, azaz

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^{\alpha}$$

egy $c > 0$ és $\alpha > 0$ számra, akkor minden s esetén

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

A Hausdorff-mérték invariáns az izometriákra.

Hausdorff-dimenzió

Ha $\{U_i\}$ egy δ-fedése F-nek, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

így $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Ha vesszük a $\delta \to 0$ limeszt, akkor ha $\mathcal{H}^s(f) < \infty$ esetén $\mathcal{H}^t(F) = 0$ minden $t > s$ esetén. Tehát egyértelműen létezik olyan s ahol $\mathcal{H}^s(F)$ végtelenről 0-ra ugrik. Így

$$dim_H F = inf \{s : \mathcal{H}^s(f) = 0\}$$

az F halmaz Hausdorff-dimenziója.

Hausdorff-dimenzió

A Hausdorff-dimenzió tulajdonságai:

- *monotonitás* Ha $E \subset F$ akkor $dim_H E \leq dim_H F$
- *megszámlálható stabilitás* Ha $\{F_i\}$ egy megszámlálható halmazrendszer, akkor $dim_H \cup_i F_i = \sup dim_H F_i$
- *megszámlálható halmazok* Ha F megszámlálható, akkor $dim_H F = 0$
- *nyílt halmazok* Ha $F \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, akkor $dim_H F = n$
- *sima halmazok* Ha F egy m-dimenziós sima részsokaság, akkor $dim_H F = m$

Állítás

1. Ha $f : F \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-transzformáció, akkor $dim_H f(F) \leq dim_H(F)$,
2. Ha $f : F \to \mathbb{R}^m$ bi-Lipschitz-transzformáció, akkor $dim_H f(F) = dim_H(F)$.

Hausdorff-dimenzió számítása

A Cantor-halmaz dimenziója

Jelölje F a Cantor-halmazt, és legyen $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ és $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Ekkor $F = F_L \cup F_R$, így

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)$$

amiből adódik, hogy

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Alternatív dimenzió-fogalmak

Alapgondolat: Minden δ-ra megmérjük valahogyan F nagyságát úgy, hogy a δ-nál kisebb részletek irregularitását nem vesszük figyelembe, és végül vesszük a $\delta \to 0$ határátmenetet. Ekkor, ha $M_\delta(F)$ az F halmaz δ-val mért mérete, akkor általában

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}.$$

Ekkor s-t az F 'dimenziójának', c-t pedig az F halmaz s-dimenziós hosszának nevezzük. Logaritmust vonva és átrendezve kapjuk, hogy

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Előnyei - hátrányai

A nagy előnye egy ilyen dimenziófogalomnak, hogy kísérletileg könnyen számolható.

Hátránya viszont, hogy $M_\delta(F)$ gyakran nem egzaktul exponenciális, így a határérték sem létezik, legfeljebb $\limsup M_\delta(F)$ és $\liminf M_\delta(F)$.
Továbbá általában nem igaz a megszámlálható stabilitás ezekben a dimenzió-fogalmakban, és megszámlálható halmazoknak is lehet pozitív mértékük.

Box-dimenzió

Legyen F egy korlátos és zárt halmaz. Vegyük $\mathbb{R}^n$ egy δ-rácsozatát, azaz osszuk fel a teret kockákra:

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$$

Jelölje $N_\delta(F)$ azon kockák számát, amiket F metsz. Ekkor definiáljuk az alsó és felsö box-dimenziót

$$\underline{dim}_B F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$
$$\overline{dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

És ha a kettő megegyezik akkor definiáljuk F box-dimenzióját

$$dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Box-dimenzió

Ekvivalens dimenzió-fogalmat kapunk, ha a fenti N_δ helyett a következők egyikét vesszük:

1. N_δ az F-et lefedő legkevesebb δ sugarú zárt gömbök száma,
2. N_δ az F-et lefedő legkevesebb δ-kockák száma,
3. N_δ az F-et lefedő legkevesebb maximum δ átmérőjű halmazok száma,
4. N_δ az legtöbb δ sugarú diszjunkt gömb, aminek középpontja F-ben van.

Hausdorff- és box-dimenzió

Állítás Ha $F \subset \mathbb{R}^n$, akkor

$$dim_H F \leq \underline{dim}_B F \leq \overline{dim}_B F$$

A box-dimenzió esetén $N_\delta(F) \sim \delta^{-s}$ elegendően kis δ esetén, így

$$\begin{array}{rcl} N_\delta(F)\delta^s \to \infty & \text{ha} & s < dim_B F \\ N_\delta(F)\delta^s \to 0 & \text{ha} & s > dim_B F \end{array}$$

Tehát

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{\sum_i \delta^s : U_i \text{ véges } \delta\text{-fedése } F\text{-nek}\right\}$$

Hausdorff- és box-dimenzó

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{\sum_i \delta^s : \ \{U_i\} \text{ véges } \delta\text{-fedése } F\text{-nek}\right\}$$

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^s : \ \{U_i\} \ \delta\text{-fedése } F\text{-nek}\right\}$$

Ekkor a Hausdorff-mérték valóba mérték lesz, viszont a $\nu(F) = \limsup_{\delta\to 0} N_\delta \delta^s$ nem lesz mérték $\mathbb{R}^n$ részhalmazain.

Box-dimenzió számítása

A Cantor-halmaz konstrukciójának k-dik lépése legyen E_k, ami 2^k darab 3^{-k} nagyságú intervallumból áll. Így, ha $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$, akkor $N_\delta \leq 2^k$. Így

$$\overline{dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Viszont $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ esetén minden δ hosszúságú intervallum legfeljebb egyetlen E_k-beli intervallummal metsz, és mivel ilyenből 2^k van, így legalább ennyi δ hosszúságú szakasz kell. Így $N_\delta(F) \geq 2^k$, így

$$\frac{\log 2}{\log 3} \leq \underline{dim}_B F$$

Iterált függvény-rendszerek

Egy $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés kontrakció, ha létezik $0 < c < 1$ szám, amire

$$|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$$

Ha egyenlőség áll fent, akkor hasonlósági kontrakciónak hívjuk S-t.

Kontrakciók egy $\{S_1, \dots S_m\}$ véges rendszerét iterált függvény-rendszernek (IFS) nevezzük. Azt a nem-üres kompakt F halmazt, amire

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(F)$$

teljesül, az IFS attraktorának nevezzük.

Megmutatható, hogy minden IFS-nek létezik egyetlen, nemüres, kompakt attraktora.

Iterált függvény-rendszerek

Továbbá megmutatható, hogy ha E egy nemüres kompakt halmaz, és

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(E)$$

akkor az attraktor megkapható tetszőleges E halmazból indulva, ha $S_i(E) \subset E$, és ekkor

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$$

Megmutatható, hogy

$$S^k(E) = \bigcup_{\mathcal{I}_k} S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(E)$$

ahol az $\mathcal{I}_k$ halmaz tartalmazza az összes k-hosszúságú sorozatát az $1 \ldots m$ számoknak.

Ez az eljárás jól programozható, megkereshetőek egyes IFR-ek

IFS és dimenzió

Legyen a továbbiakban az IFS összes tagja hasonlósági kontrakció. Egy $\{S_i\}$ IFS kielégíti a nyílt halmaz feltételt, ha létezik olyan

nemüres zárt V halmaz, amire

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V)$$

IFS és dimenzió

Tétel Legyen $\{S_i\}$ egy IFS ami csak hasonlósági kontrakciókat tartalmaz c_i hasonlósági arányokkal. Amennyiben az IFS teljesíti a nyílt halmaz feltételt, akkor ha F az IFS attraktora, azaz

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

akkor $dim_H F = dim_B F = s$ egy olyan s számra, amire

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$$

Ekkor az F halmaz Hausdorff-mértéke pozitív.

A Koch-görbe dimenziója

A Koch-görbe konstrukciójának első lépése E_1 négy darab szakaszból áll, amik az eredeti szakasz $\frac{1}{3}$-a hosszúságú. Így az előző tétel alapján a Koch-görbe s dimenziójára igaz, hogy

$$\sum_{1}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{s} = 1,$$

ami alapján

$$s = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Ezt az eredményt az eddigi dimenzió-definícióink alapján nem tudtuk volna elérni.

Kérdések?