Az Itō-kalkulus

Elek Richárd
Hajdu Csaba
Kármán András
Szakács Márton

2010

1 Bevezetés

2 Az Itō-kalkulus

3 Példák

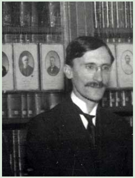
4 További megfontolások

5 Zárszó

Itō Kiyoshi
1915. szeptember 7. - 2008. november 10.

Motiváció

Andrey N. Kolmogorov:
Foundations of the Theory of Probability



Paul P. Lévy:
Sum of Independent Random Variables

Eredmény

On stochastic processes (Infinitely divisible laws of probability)

Az Itō-kalkulus

- Valószínűségszámítás és analízis határterülete
- Függvényanalízis kiterjesztése a sztochasztikus folyamatokra

Alkalmazások

- Fizika
- Populációgenetika
- Szabályozástechnika
- Közgazdaságtan

Egydimenziós Itō-folyamat

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,ds + \int_0^t v(s,\omega)\,dB_s$$

ahol

$$P\left[\int_0^t v(s,\omega)^2\,ds < \infty \mid \forall t \geq 0\right] = 1$$

$$P\left[\int_0^t |u(s,\omega)|\,ds < \infty \mid \forall t \geq 0\right] = 1$$

Az Itō-formula (1D)

$$dX_t = u\,dt + v\,dB_t$$

$g(t,x)$: $Y_t = g(t,X_t)$ is Itō-folyamat, és

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\,(dX_t)^2 + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial t}(t,X_t)\,dX_t\,dt} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial x}(t,X_t)\,dt\,dX_t} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,X_t)\,(dt)^2}$$

$(dX_t)^2 = (dX_t)\cdot(dX_t)$ kiszámításához:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0,\; dB_t \cdot dB_t = dt$$

Sztochasztikus folyamat integrálja

$$I = \int_0^t B_s \, dB_s$$

Legyen $X_t = B_t$, $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$

$$Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$$

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,(dB_t)^2 \\ &= B_t\,dB_t + \frac{1}{2}\,(dB_t)^2 = B_t\,dB_t + \frac{1}{2}\,dt \end{aligned}$$

$$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

Általános mennyiség integrálja

$$\int_0^t s\,dB_s = ?$$

Legyen $g(t,x) = tx$, $Y_t = g(t,B_t) = tB_t$

$$dY_t = B_t\,dt + t\,dB_t + 0 = d\left(tB_t\right)$$

azaz

$$\int_0^t s\,dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\,ds$$

Parciális integrálás

Az előző példa eredménye:

$$\int_0^t s\,dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\,ds$$

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s\,df_s$$

Az Itō-formula bizonyítása

$$dx = a\,dt + b\,dB$$

Taylor-sorba fejtve:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \ldots$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,(a\,dt + b\,dB) + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(a^2\,dt^2 + 2ab\,dt\,dB + b^2\,dB^2\right) + \ldots$$

$$df = \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + b\frac{\partial f}{\partial x}\,dB$$

Köszönjük a megtisztelő figyelmet!

Irodalom

Bernt Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer.
Lawrence C. Evans, *An Introduction To Stochastic Differential Equations*, http://math.berkeley.edu/ evans/SDE.course.pdf