Integrálás sokaságokon

I. Riemann-integrál R^n-en

- Jordan-mérték használható ehhez: $A \subset R^n$ esetén $c(A)=0$,

  ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén léteznek $C_1, \ldots, C_s$ kockák hogy $A \subset C_1 \cup \cdots \cup C_s$ és

  $\sum_{i=1}^{s} c(C_i) < \varepsilon$

- <u>definíció:</u> $D \subset R^n$ integrálási tartomány, ha korlátos és a pereme (BdD) nullmértékű

- f függvény R^n-en majdnem folytonos, ha nullmértékű helyen nem folytonos

- <u>tétel:</u> D integrálási tartomány, f korlátos, majdnem folytonos függvény D-n, ekkor $\int_D f\,dv$ létezik, azaz f integrálható D-n (közelítő összegek határértékeként)
- <u>definíció:</u> ha D integrálási tartomány, a térfogata $volD = \int_{R^n} k_D dv = \int_D k_D dv$, ahol k_D a tartomány karakterisztikus függvénye

- <u>tétel (változócsere):</u> $G : U \to U'$ diffeomorfizmus, $D \subset U$, $D' = G(D) \subset U'$ nyílt halmazok belsejében vett integrálási tartományok, *f'* integrálható *D'*-n, ekkor $f = f' \circ G$ integrálható *D*-n, és $\int_{D'} f'(y)dv' = \int_{D} f'(G(x))|\Delta G| dv$, ahol ΔG a diffeomorfizmus Jacobi-determinánsa
- <u>lemma (nullmértékűség megőrzése):</u> $A \subset R^n$ kompakt, $F : A \to R^m$ C^1 osztályú leképezés, ekkor *c(F(A))=0* ha $n < m$ vagy $n = m$ és *c(A)=0*

- sokaságokra általánosítás: $A \subset M$ esetén *c(A)=0*, ha léteznek $A_1, \ldots, A_s$ kompakt halmazok az U_i, φ_i térképeken, hogy $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_s$ és $c(\varphi_i(A_i)) = 0$
- $D \subset M$ integrálási tartomány, ha relatív kompakt és *c(BdD)=0*

II. Integrálás irányított sokaságokon

- M irányított sokaság, $\dim M = n$, ekkor létezik Ω n-forma, amely sehol nem 0, és meghatározza M irányítását (térfogatelem)
- bármely más ω n-forma felírható $\omega = f\Omega$ alakban, ahol $f : M \to R$ függvény
- <u>definíció:</u> $f : M \to R$ függvény integrálható M-en, ha korlátos, kompakt tartójú, majdnem folytonos, és ω n-forma integrálható M-en (mint $\omega : p \in M \mapsto \omega_p \in \Lambda^n(T_p(M))$ függvény), ha $\omega = f\Omega$, ahol f integrálható, jelölés: $\int_M \omega$

- Ω nem egyértelmű, lehet $\widetilde{\Omega} = g\Omega$, ahol g pozitív függvény, de ekkor $f\Omega = f/g\widetilde{\Omega}$, ahol f/g is integrálható függvény
- az integrálható n-formák halmaza $\Lambda_0^n(M)$
- az integrál kiszámítása: $Q \subset M$ egy kocka, ha létezik olyan U,φ irányított térkép, hogy $\varphi(Q) = C = \{x \in R^n \mid 0 \le x^i \le 1, i = 1\ldots, n\}$(az egységkockába képződik)
- legyen $\omega \in \Lambda_0^n(M)$, és supp $\omega \subset Q$, valamint az U,φ irányított térképen $\varphi^{-1*}(\omega) = f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, ekkor $\int\limits_M \omega = \int\limits_C f\,dv$
- belátható, hogy ez nem függ az eredeti kocka megválasztásától

- lineáris leképezés: $\int\limits_M a_1\omega_1 + a_2\omega_2 = a_1\int\limits_M \omega_1 + a_2\int\limits_M \omega_2$,ahol $a_1, a_2 \in R$
- ha nem egy gömbre van megszorítva: supp $\omega = K$, lefedhető véges sok kocka belsejével ($\overset{\circ}{Q}_1,\ldots,\overset{\circ}{Q}_b$), ekkor kereshető olyan $\{f_i\}$sima függvényrendszer, hogy $\sum f_i \equiv 1$ mindenhol (egységosztás), és $\omega = f_1\omega + \cdots + f_s\omega$ véges összegként felírható, ahol $f_i\omega$ tartója már valamelyik kockán belül van, így $\int\limits_M \omega = \int\limits_M f_1\omega + \cdots + \int\limits_M f_s\omega$, és ez nem függ a kockák megválasztásától

III. Integrálás irányított Riemann-sokaságokon

- irányított sokaságokon az Ω térfogatelem csak egy pozitív C^∞ osztályú függvénnyel szorzás erejéig van meghatározva
- Riemann-sokaságokon van speciális térfogatelem: legyen Ω az az n-forma, amely bármely ortonormált bázisra hattatva 1-et ad
- <u>definíció:</u> D integrálási tartomány, k_D a karakterisztikus függvénye (kompakt tartójú, a nullmértékű BdD kivételével folytonos), ekkor a térfogata $volD = \int_M k_D \Omega$, egy $f : M \to R$ korlátos, majdnem folytonos függvény integrálja a tartományon pedig $\int_D f = \int_M f k_D \Omega$

- kiszámítási mód: egy U,φ irányított térképen adott az $E_1,\ldots,E_n$ bázis, a metrikus tenzor komponensei $g_{ij}(p)=\Phi_p(E_{ip},E_{jp})$, amelyek kifejthetők a lokális koordinátákon ($\tilde{g}_{ij}(x^1,\ldots,x^n)=\tilde{g}_{ij}(\varphi(p))$), ekkor $g=\det(g_{ij})$ jelöléssel $\varphi^{-1*}\Omega=\sqrt{g}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$

IV. Peremes sokaságok

- $H^n = \left\{ x = \left(x^1, \ldots, x^n \right) \in R^n \middle| x^n \geq 0 \right\}$ felső félsík R^n-ben, határa

  $\partial H^n = \left\{ x \in H^n \middle| x^n = 0 \right\}$, R^n-ből származó relatív metrikus topológia

  vehető, illetve ∂H^n homeomorf R^{n-1}-gyel

- $U, V \subset H^n$ halmazok diffeomorfak, ha létezik

  köztük $F : U \to V$ C^∞ osztályú invertálható leképezés (diffeomorfizmus),

  ezekre belátható, hogy határpontot határpontba visznek mindkét

  irányban: $F\left(U \cap \partial H^n\right) = V \cap \partial H^n$

- <u>definíció:</u> *M* egy C^{∞} peremes sokaság, ha Hausdorff-tér, létezik megszámlálható bázisa és van rajta egy $\{U_\alpha, \varphi_a\}$ atlasz (differenciálható struktúra) a következő tulajdonságokkal:
  - φ_a homeomorfizmus U_α és H^n egy részhalmaza között
  - U_α -k lefedik *M*-et
  - U_α, φ_a és U_β, φ_β elemekre $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ és $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ diffeomorfizmusok $\varphi_a(U_\alpha \cap U_\beta)$ és $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ között
  - az atlasz maximális a fenti tulajdonságokra nézve

- ha egy p pontra $\varphi(p) \in \partial H^n$, akkor ez minden térképen igaz, ezek a pontok alkotják M peremét (∂M), és $IntM = M - \partial M$ a sokaság belseje (ami egy hagyományos értelemben vett sokaság)
- M-en differenciálható struktúra, differenciálható függvények, leképezések, rang, külső formák, külső deriválás definiálható lokális koordinátákkal, és ezek egyértelműen meghatározzák ∂M hasonló fogalmait
- irányíthatóság: egy M peremes sokaság irányítható, ha vannak olyan $\{U_\alpha, \varphi_a\}$ koordinátakörnyezetek, melyek egyformán irányítottak (ha $U_\alpha \cap U_\beta$ nem üres, akkor $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ Jacobi-determinánsa pozitív), vagy létezik sehol el nem tűnő Ω n-forma

- <u>tétel:</u> M irányított sokaság, ∂M nem üres, ekkor ∂M irányítható, és az irányítását M irányítása egyértelműen meghatározza
- legyen egy p perempontban M érintőtere $T_p(M)$, ∂M érintőtere (*n-1* dimenziós) $T_p(\partial M)$, ekkor $T_p(M)-T_p(\partial M)$ vektorai két csoportra oszthatók (függetlenül a koordinátatengelyek választásától): amelyek utolsó komponense pozitív valamely bázison, azok a befelé mutató vektorok, amelyeké negatív, azok a kifelé mutató vektorok

- ezzel a definícióval legyen $p \in \partial M$, X_p befelé mutató vektor, ekkor az $E_{1p}, \dots, E_{(n-1)p}$ irányított $T_p(\partial M)$-en akkor és csak akkor, ha $E_{1p}, \dots, E_{(n-1)p}, X_p$ irányított $T_p(M)$-en
- időnként ezzel ellentétes irányítást érdemes használni, erre jelölés $\tilde{\partial} M = (-1)^n \partial M$

V. Stokes-tétel peremes sokaságokra

- integrálás, nullmértékűség, integrálási tartomány, Riemann-sokaságokon térfogatelem, függvény integrálja előzőekhez hasonlóan definiálható, csak a Q kocka egyik lapjának ∂M -re kell esnie, ha $U \cap \partial M \neq \emptyset$:

  $\varphi(Q \cap \partial M) = \{x \in \Re^n | 0 \leq x^i \leq 1; x^n \equiv 0\}$ és

  $\dot{Q} = \varphi^{-1}(\{x \in \Re^n | 0 < x^i < 1, 1 \leq i \leq n-1; 0 \leq x < 1\})$

- <u>Stokes-tétel:</u> M irányított kompakt n dimenziós sokaság, $\tilde{\partial} M$ perem, ω n-forma rajta, $i : \partial M \to M$ a természetes beágyazás, ekkor $\int_M d\omega = \int_{\tilde{\partial} M} i^* \omega$ (és a bal oldali integrál 0, ha $\partial M = \emptyset$)

- speciális esetek:
  - <u>Green-tétel:</u> M korlátos reguláris tartomány R^2-n, körbevéve C_i sima zárt görbék uniójával, $\omega = a \cdot dx + b \cdot dy$ C^1 osztályú 1-forma, ekkor

    $$\int_M \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dxdy = \sum_i \int_{C_i} a \cdot dx + b \cdot dy$$

  - <u>Gauss-Osztrogradszkij-tétel:</u> M reguláris tartomány R^3-on (sima síkok által határolt nyílt halmaz),

    $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ 2-forma, ekkor

    $$\int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{-\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

- Stokes-tétel három dimenzióban: M egy felület beágyazva R^3-ba, sima zárt görbék uniója által határolva, $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ 1-forma, ekkor

$$\int_M \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$
$$= \int_{\partial M} Adx + Bdy + Cdz$$

- a tétel általánosítható úgy is, ha a határ nem sima (például sokszögek, szögletes testek)
- R^n-ben használhatóak a duális bázissal való természetes izomorfizmusok, így gradiens, divergencia, rotáció definiálható