Brown-mozgás és a sztochasztikus integrálás

Lazányi Nóra, Somogyi Bálint,
Tóth Balázs, Vécsei Miklós

Bevezetés

- A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X) + \sigma(t, X) \cdot W_t$$

b, σ adott függvények

W_t zaj

- W_t tulajdonságai:
  - $t_1 \neq t_2 \rightarrow W_{t1}$ és W_{t2} független
  - W_t eloszlása időtől független
  - $E(W_t)=0$

Bevezetés

- Az egyenlet diszkrét alakban:

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k) \cdot \Delta t_k + \sigma(t_k, X_k) \cdot W_k \cdot \Delta t_k$$

Bevezetve:

$$W_k \cdot \Delta t_k = \Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$$

- B_{t_k} stacionárius, független növekményű, várható értéke 0 $\rightarrow B_{t_k}$ a Brown mozgás

- Az egyenleteket összegezve:

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_k, X_j) \cdot \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_k, X_k) \cdot \Delta B_j$$

Folytonos határeset

- Folytonos határesetben ($\Delta t_j \to 0$)

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(t_s, X_s) \cdot dB_s$$

- A megoldás $X_t = X_t(\omega)$ egy sztochasztikus folyamat ($\omega \in \Omega$)

- Hogyan értelmezzük a fenti integrált?

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = ?$$

Értelmezés elemi függvényekre

T.f.h. $$f(t,\omega) = \phi(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)\cdot I_{[j\cdot 2^{-n},(j+1)\cdot 2^{-n})}(t)$$

$I_{[a,b)}$ az indikátorfüggvény az [a,b) tartományra.

$$\downarrow$$

$$\int_S^T \Phi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$$

A szummázás az integrálási határokon belül történik.

Értelmezés elemi függvényekre

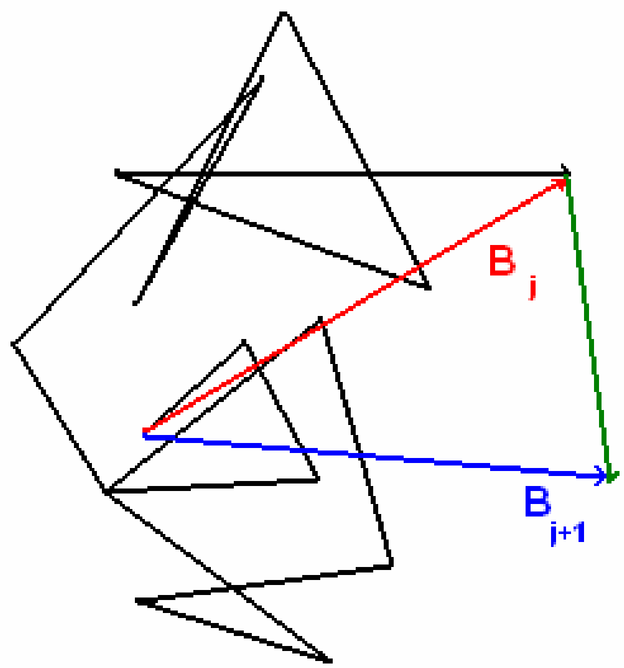
Ha Φ_1-ben $e_j(\omega) = B_{j\cdot 2^{-n}}(\omega)$

Ha Φ_2-ben $e_j(\omega) = B_{(j+1)\cdot 2^{-n}}(\omega)$

Akkor belátható, hogy

$$E\left(\int_0^T \Phi_1(t,\omega)\,dB_t(\omega)\right) = 0$$

$$E\left(\int_0^T \Phi_2(t,\omega)\,dB_t(\omega)\right) = T$$



Értelmezés elemi függvényekre

Tehát $e_j(\omega)$ -ra megszorításokat kell bevezetni.

Az $f(t,\omega) \approx \sum_j f(t_j^*,\omega) \cdot I_{[t_j, t_{j+1})}(t)$ közelítés függ

$t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$ megválasztásától

- Itô: $t_j^* = t_j$
- Stratonovich: $t_j^* = (t_j + t_{j+1})/2$

Az Itô-integrál

Az Itô-integrált az $f \in V$ függvényekre definiáljuk az elemi függvények segítségével

A $\phi(t,\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot I_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n})}(t)$ elemi függvényekre már beláttuk:

$$\int_S^T \Phi(t,\omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$$

Itô-izometria

Belátható, hogy $\phi(t,\omega)$ korlátos elemi függvényekre igaz a következő állítás:

$$E\left[\left(\int_S^T \Phi(t,\omega)dB(\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_S^T \Phi(t,\omega)^2 dt\right]$$

Terjesszük ki az Itô integrált az izometria segítségével az elemi függvények halmazából V elemeire

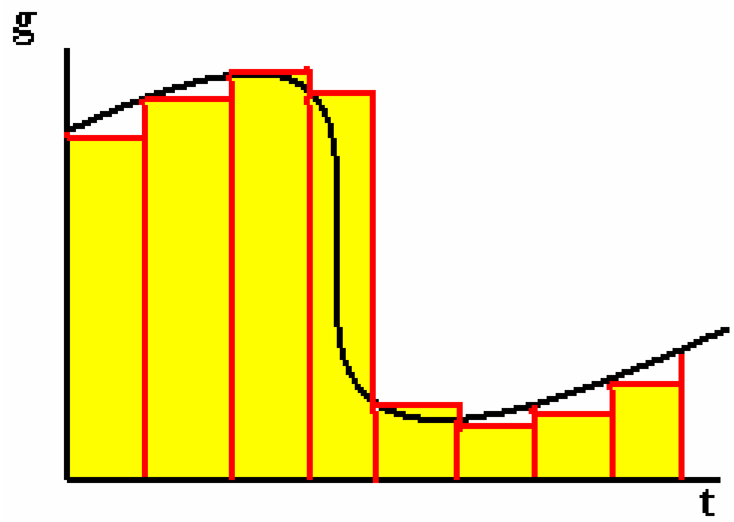
1. Lépés

Legyen $g \in V$ egy korlátos és t-ben (minden ω-ra) folytonos függvény.
Ekkor létezik olyan ϕ_n függvény-sorozat, amire:

$$E\left[\int_S^T (g-\Phi_n)^2\, dt\right] \to 0$$

Jó választás

$$\phi_n = \sum_j g(t_j, \omega) \cdot I_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$



2. Lépés

Legyen $h \in V$ egy korlátos függvény. Ekkor létezik egy $g_n \in V$ t-ben folytonos függvényekből álló sorozat, amire

$$E\left[\int_S^T (h - g_n)^2 \, dt\right] \to 0$$

Ez a függvény a $g_n = \int_0^t \psi_n(s-t) \cdot h(s,\omega) ds$

Ahol $\psi_n(x) = 0$, ha x≤-1/n vagy 0≤x, valamint

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1$$

3. lépés

Legyen $f \epsilon V$. Belátható, hogy létezik egy olyan $\{h_n\} \subset V$ sorozat, ahol h_n korlátos minden n-re, és

$$E\left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt\right] \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

Legyen: $I[f](\omega) \equiv \int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \Phi_n(t,\omega) dB_t(\omega)$

A határérték létezik $L^2(P)$-n, mivel $\int_S^T \Phi_n(t,\omega) dB_t(\omega)$ Cauchy sorozat

Az Itô-integrál definíciója

Legyen $f \in V(S,T)$. Ekkor f Itô integrálja (S-től T-ig):

$$\int_S^T f(t,\omega)\,dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \Phi_n(t,\omega)\,dB_t(\omega)$$

Ahol $\{\Phi_n\}$ elemi függvények olyan sorozata, amelyekre

$$E\left[\int_S^T \left(f(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega)\right)^2 dt\right] \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

Következmények

1. Itô izometria:

$$E\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right] \forall f \in V(S,T)$$

2. Ha $f \epsilon V(S,T)$ és $f_n \epsilon V(S,T)$ n=1,2… amelyekre

$$E\left[\int_S^T (f(t,\omega) - f_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0 \text{ ha } n \to \infty$$

akkor: $E\left[\int_S^T f_n(t,\omega)dB_t(\omega)\right] \to E\left[\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)\right]$

$L^2(P)$-n, ha $n \to \infty$

Tulajdonságok

Legyen $f, g \in V(0,T)$ és $0 \leq S < U < T$

i. $$\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$$

ii. $$\int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$$

iii. $$E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0$$

iv. $$\int_S^T f dB_t$$ mérhető F_t–n

Irodalom

- Bernt Øksendal: Stochastic Differential Equations, Fifth edition, Springer-Verlag