Mátrixcsoportok

Prezentáció

Pálovics Róbert   Sárosi Gábor
Szemes Dorottya   Werner Miklós

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2010.10.22

Legyen G differenciálható sokaság és csoport, G Lie csoport, ha:

- a $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (csoportszorzás)
- és a $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ (inverzképzés)

∞ sokszor differenciálható leképezések

- $Gl(n, \mathbb{R})$: $n \times n$-es invertálható mátrixok
  - csoport: szorzatuk invertálható és $\exists$ inverzük
  - differenciálható sokaság: a mátrix elemei jó térképezést adnak $\mathbb{R}^{n^2}$-be
  - $a \cdot b$ - re, ha $a, b \in Gl(n, \mathbb{R})$, akkor $(a \cdot b)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, ami C^∞
  - $a^{-1} = \frac{a^*}{\det(a)}$, ami szintén C^∞

/a^{-1} mindig differenciálható, ha $\det(a) \neq 0$, mivel a^{-1} elemei racionális törtfüggvénye a elemeinek./

Tétel: Ha G egy Lie csoport és H egy részcsoportja G-nek, továbbá reguláris részsokaság, akkor H Lie csoport.

Példa:

- $O(n)$ rész Lie csoportja $Gl(n, \mathbb{R})$-nek
- $U(n)$ rész Lie csoportja a $Gl(n, \mathbb{C})$-nek

Megjegyzés:

- $O(n) : O^T \cdot O = 1$
- $U(n) : U^\dagger \cdot U = 1$

Definíció: G Lie csoport, legyen $1 \in G$ (egységelem), továbbá legyen $g(t) : \mathbb{R} \to G$ tetszőleges olyan görbe, hogy $g(0) = 1$. Ekkor g érintője az 1-ben $\dot{g}(0)$ és az 1 feletti érintőtér (jel: T) az összes ilyen által kifeszített vektortér.
Megjegyzés: Az érintőtér dimenziója megegyezik a sokaság dimenziójával.

$O(n)$ egységelem feletti érintőtere $x \in T$ pontosan akkor, ha x antiszimmetrikus.

Bizonyítás:

(:$\Rightarrow$)

Ha $A(t)$ ortogonális ($\sum_{i=1}^{n} A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}$) és átmegy az 1-en ($A(0) = 1$), akkor:

$$0 = \frac{d}{dt}\delta_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{A}_{ij}A_{ik} + A_{ij}\dot{A}_{ik}\right)$$

ami $t = 0$-ban: $A_{ij}(0) = \delta_{ij}; \dot{A}_{ij} = x_{ij} \Rightarrow$

$$0 = x_{kj} + x_{jk}$$

(:$\Leftarrow$)
Ha x antiszimmetrikus, akkor:

$$A(t) \cdot A^T(t) = \left[1 + tx + \sigma(t^2)\right] \cdot \left[1 + tx^T + \sigma(t^2)\right] = \\ 1 + t\left[x + x^T\right] + \sigma(t^2) = 1 + \sigma(t^2),$$

Tehát $A(t)$ lokálisan az $O(n)$ érintőtérben fut.

Konklúzió:

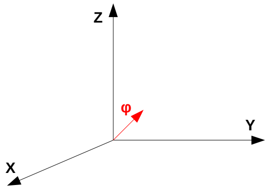
$$x \in T \Leftrightarrow x \text{ antiszimmetrikus}$$

$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ szabad paramétere van az antiszimmetrikus mátrixnak $\Rightarrow$ $\dim(O(n)) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Megjegyzés:

$O(n)$ összefüggő része $SO(n)$ (egységnyi determinánsú, $n \times n$ -es ortogonális mátrixok), melyek szintén egy $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ dimenziójú Lie csoportot alkotnak.

$\dim(SO(3)) = 3$
$SO(3)$-ban például 1 elem koordinátázása:



ahol $|\vec{\varphi}|$ az elforgatás szöge, $\vec{\varphi}$ iránya pedig a forgatás tengelye (jobbkezes)
$/-\pi$ - vel forgatás $=$ π-vel forgatás/

Konklúzió:

$SO(3) \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi^2\} /$
$\{(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, ha $x^2 + y^2 + z^2 = \pi^2\}$

$O(n)$-nel teljesen hasonló módon $U(n)$-re a következőt kapjuk:

$$x \in T \Leftrightarrow x + x^{\dagger} = 0$$

Tehát x antihermitikus.
$U(n)$ **dimenziója :**

- x_{ii} : imaginárius
- x_{ij} : $i \neq j$ esetén komplex: $x_{ij} = -\bar{x}_{ji}$

$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot 2}{2} + n = n^2$ szabad paramétere van az antihermitikus mátrixoknak.

dim $U(n) = n^2$

Megjegyzés:
$U \in U(n)$ -re $1 = \det(U^\dagger U) = \det U^\dagger \det U = |\det U|^2$, azaz $\det U = e^{i\varphi}$, ahol $\varphi \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $SU(n)$ (egységnyi determinánsú unitér mátrixok, $\varphi = 0$) egy $n^2 - 1$ dimenziójú Lie csoport.

$\dim(SU(2)) = 3$
Bármely $SU(2)$ mátrixot fel lehet írni az alábbi alakban:
$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ ahol $|a|^2 + |b|^2 = 1$
Ha $a = x + i \cdot y$ és $b = u + i \cdot v$, akkor:

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$$

Tehát a 4 dimenziós gömb felszínén vagyunk.
Konklúzió:

$$SU(2) \cong S^3$$

Def.(kvaterniók)
Ez egy $\mathbb{H}$ halmaz, aminek az elemei

$$a + bi + cj + dk = q \text{ , ahol } q \in \mathbb{H}$$

i komponensenkénti összeadásra vektortér
ii érvényesek az alábbi szorzási szabályok:
- $ij = k = -ji$
- $jk = i = -kj$
- $ki = j = -ik$
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

A kvaternió szorzás ezek disztributív kiterjesztésével van definiálva.

KVATERNIÓK

Def. (Konjugálás)) $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Def. (Norma) $|q|^2 = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Áll. $\forall q \neq 0$ -ra $\exists q^{-1}$, ami $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$

Áll. $\forall$ kvaternió $\rightarrow A(q) \in M(2, \mathbb{C})$, ahol

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

- $q \mapsto A(q)$ egy-egyértelmű, $\det A(q) = |q| \geq 0$
- $A(q_1 \cdot q_2) = A(q_1) \cdot A(q_2)$ szorzási szabály teljesül

/ **Biz.** $A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; $A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ hozzárendelésekkel ellenőrizhető, hogy teljesülnek az előírt szorzási szabályok /

$\mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H} | |q|^2 = 1\}$
Ha $A(q)$-nál $q \in \mathbb{H}_1$, akkor $A(q) \in SU(2)$
Hiszen

$$A(q) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$$

ahol $|x|^2 + |y|^2 = 1$, illetve $x = a + bi$ és $y = c + di$
amiből következik, hogy $\mathbb{H}_1 \cong SU(2)$
Def. $\mathbb{H}_0 = \{p \in \mathbb{H} | \bar{p} = -p\}$ (valós része a p kvaterniónak nulla)
$\Rightarrow \mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$
Az $\mathbb{R}^3$-nél lévő Euklideszi norma itt: $p \cdot \bar{p} = b^2 + c^2 + d^2$

Áll.: Legyen $q \in \mathbb{H}_1$ és $p \in \mathbb{H}_0$

$$\alpha_q : p \mapsto qpq^{-1}$$

ez a leképezés a $\mathbb{H}_0$-ban egy 3 dimenziós forgatás
Megj.:

- Választok egy q-t, amihez tartozik egy forgatás a $\mathbb{H}_0$-n
- Mivel a $q \in \mathbb{H}_1 \cong SU(2)$ ezért $\forall SU(2)$ elemhez hozzárendeltünk egy SO(3) elemet ($O_q : q \mapsto \alpha_q$)

Áll.: Legyen $q \in \mathbb{H}_1$ és $p \in \mathbb{H}_0$

$$\alpha_q : p \mapsto qpq^{-1}$$

ez a leképezés a $\mathbb{H}_0$-ban egy 3 dimenziós forgatás
Biz.: Mivel $\bar{p} = -p$ és $\bar{q} = q^{-1}$, ezért $\overline{qpq^{-1}} = \overline{q^{-1}}\bar{p}\bar{q} = -qpq^{-1}$
vagyis $qpq^{-1} \in \mathbb{H}_0$

$$\Rightarrow \alpha_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Mivel $|qpq^{-1}| = |q||p||q^{-1}| = |p|$
azaz az α_q őrzi a normát $\mathbb{H}_0$-n, tehát α_q izometria

$$\Rightarrow q \mapsto \alpha_q ;\ \mathbb{H}_1 \to O(3)$$

tetszőleges p-hez $-p$-t nem tudjuk hozzárendelni α_q-val (sodrástartás)

$$\Rightarrow q \mapsto \alpha_q ;\ \mathbb{H}_1 \to SO(3)$$

Vegyük észre: $\alpha_q = \alpha_{-q}$, hiszen $qpq^{-1} = (-q)p(-q)^{-1}$.
Matematikusabban megfogalmazva:
$q \to \alpha_q$ **magja:**
Mivel $\alpha_q : p \mapsto qpq^{-1}$, ebből látható, hogy α_q leképezés akkor az identitás, ha $q = \pm 1$
Legyen $O_q : q \mapsto \alpha_q$ $(SU(2) \to SO(3))$
$KerO_q = \{\pm 1\}$
Tehát $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm 1\}$, mivel O_q csoporthomomorfizmus is, ezért a magjával faktorizálva biztos izomorfizmust kapunk.

Köszönjük a figyelmet!

Exponenciális leképezés

Legyen G egy mátrix csoport (például: $Gl(n)$, $U(n)$, $O(n)$) és legyen T ennek az érintőtere az identitásnál

Def.:

$$\exp : T \to G;\ \exp(0) = 1 \text{ és } X \in T\text{-re}$$

$$\exp X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots$$

Áll.:

- Az $\exp X$ $\forall X \in M(n)$ konvergens
- Ha X és Y kommutál ($XY = YX$), akkor
$$\exp(X + Y) = \exp X \exp Y, \text{ ahol } X, Y \in M(n)$$
- $\exp X$ mindíg invertálható
$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$
- $\exp(X)^T = (\exp X)^T$

Legyen $X \in T$ és $A(t) = \exp(tX)$
Az előzőek alapján

i $A(t_1 + t_2) = A(t_1)A(t_2)$

ii $A(0) = I$

iii $\dot{A}(0) = X$

Lényeg??: ha $X \in T$, akkor $A(t) \in G$
Áll.:
$I \in G$ valamilyen környezetében exp egy-egyértelmű

Def.: (Lie algebra)
Legyen V vektortér és $[.,.] : V \times V \to V$ (szorzás) olyan, hogy:

- bilineáris
- antikommutatív $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobi azonosságot kielégíti:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Áll.:
$n \times n$-es mátrixok $[X, Y] = XY - YX$ műveletre nézve Lie algebrát alkotnak

Hogyan tudjuk a T-vel jellemezni a G-t

T-nél választunk egy bázist (T véges dimenziós)

/ **Megj.:** az érintőtér a kommutátorra nézve zárt:

$$X, Y \in T, \text{ akkor } [X, Y] \in T \ /$$

Tehát a T Lie algebrát alkot.

Tétel.: (Baker-Campbell-Hausdorff)

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]\dots}$$

Konklúzió:

- az érintőtérbeli elemek kommutátora egyértelműen megadja, hogy mi lesz a Lie csoportban a szorzás
- amíg az exp leképezés egyértelmű, addig nekünk elég megadni egy bázist T-ben és a kommutátorokat

Áll.: $SO(n)$-re és $SU(n)$-re az exp leképezés egy-egyértelmű
Például $SO(3)$-nál egy elemre (B):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T \ ; \ B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$

Legyen $\varphi \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\exp(B\varphi) = \sum_{k=0} \frac{(B\varphi)^k}{k!} = \sum_{k=0} \frac{(-I_2)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0} \frac{B\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k$$

$$\exp(B\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}(-1)^k +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Áll.:
$SO(3)$ és $SU(2)$ identitás körüli érintőterének Lie algebrája azonos
Lie algebrájuk:
Van egy olyan bázis a T-ben:

$$\{X_i\}_{i=1}^{3}, \text{ hogy}$$
$$[X_i, X_j] = -\varepsilon_{ijk} X_k$$

ahol ε a teljesen antiszimmetrikus egységtenzor.

Spin

Kvantummechanikában az impulzus momentum operátora: $(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$ kielégítik azt az algebrát, hogy $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$

Ekkor $X_i = -i\hat{L}_i$ választással épp az előző $(SO(3), SU(2))$ Lie algebrát kapjuk.

Ugyanez igaz a spinre is, mivel $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$, amiből $X_i = -i\hat{S}_i$ választás megfelelő.

Nyílván ekkor egy forgatás $e^{i\underline{\hat{L}}\underline{\varphi}}$ alakú.

Legyen H egy rendszer Hamilton operátora, ez forgásinvariáns, ha $[H, e^{i\underline{\hat{L}}\underline{\varphi}}] = 0 \Rightarrow [H, \hat{L}_i] = 0$

vagyis a sajátállapotok kifejthetőek valamelyik L_i sajátállapotai szerint.

($[L_i, L_j] = 0$ miatt választani kell egyet, a kommutativitás nem ekvivalenciareláció)

Ezt tanulmányaink során mind megtettük!

$$L_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle$$
$$L^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle$$

ahol $m = -l, -l+1, ...l-1, l$, és $l = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$
illetve tudjuk, hogy: $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, az algebra elemeinek olyan függvénye, mely felcserélhető az algebra minden elemével. Az ilyen tulajdonságú elemeket Casimir operátornak nevezzük.
Vegyük észre: rögzített l_0-ra $|l_0, m\rangle$ vektorok $2l_0+1$ dimenziós vektorteret alkotnak, ahol $\underline{\underline{L}}_z = \begin{pmatrix} l_0 & & & \\ & l_0-1 & & \\ & & . & \\ & & & -l_0 \end{pmatrix}$ alakú mátrix.
Ezen a bázison $\underline{\underline{L}}_x$, $\underline{\underline{L}}_y$ hatása is felírható és teljesül, hogy $[\underline{\underline{L}}_i, \underline{\underline{L}}_j] = i\varepsilon_{ijk}\underline{\underline{L}}_k$, vagyis ez egy $2l_0+1$ dimenziós mátrixábrázolás, ráadásul irreducibilis, hiszen $\forall m$ sajátértékhez tartozó invariáns altér 1 dimenziós.

H adott impulzusmomentumú sajátállapotai $\leftrightarrow$ $SO(3)$ Lie algebra különböző dimenziós irreducibilis ábrázolásai

Azonban láttuk, hogy ez a Lie algebra az $SU(2)$ esetében is!

Nézzük meg melyik ábrázolás melyik Lie csoportot generálja:

$$\underline{\underline{U}}_z(\varphi) = \exp(i\underline{\underline{L}}_z\varphi) = \begin{pmatrix} e^{il_0\varphi} & & & \\ & e^{i(l_0-1)\varphi} & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{-il_0\varphi} \end{pmatrix}$$

Nézzük meg $\varphi = 2\pi$ teljes körbeforgatást:

$$\underline{\underline{U}}_z(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{il_0 2\pi} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{-il_0 2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdot \end{pmatrix} \text{ ha } l_0 \text{ egész}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \text{ ha } l_0 \text{ félegész}$$

Következtetés

$l_0 =$ félegész esetek az $SO(3)$-at nem ábrázolják, csak az $SU(2)$-t.

Tapasztalat

a természetben félegész impulzumomentumok is megvalósulnak (spin)

Vélhetőleg a jó H szimmetriája nem $SO(3)$, hanem $SU(2)$

Megjegyzés:

a valódi Lorentz csoport

$$SO(3,1) \cong SU(2) \times SU(2)$$