Nemlineáris megmaradási egyenletrendszerek

Balogh Zoltán
Butykai Ádám
Pósa László
Scherübl Zoltán

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2010.12.10.

Előadásvázlat

Megmaradási egyenletek

1. Megmaradási egyenletek integrális alakja:

$$\frac{d}{dt}\int_U \mathbf{u}dx = -\int_{\partial U} \mathbf{F}(\mathbf{u})\nu dS$$

2. Megmaradási differenciálegyenlet rendszer

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})_x = 0 \qquad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \qquad \mathbb{R}^n \times (t = 0)$$

ahol

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

Megmaradási egyenletek a fizikában

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})_x = 0$$

- p-rendszer

$$\begin{cases} u^1_t - u^2_x = 0 & \text{(Kompatibilitási feltétel)} \\ u^2_t - p(u^1)_x = 0 & \text{(Newton törvény)} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}(z) = (-z_2, -p(z_1))$$

- Euler egyenletek összenyomható gázáramlásra 1D-ban

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 & \text{(Tömegmegmaradás)} \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0 & \text{(Impulzusmegmaradás)} \\ (\rho E)_t + (\rho E v + p v)_x = 0 & \text{(Energiamegmaradás)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1(z) = z_2 \\ F^2(z) = \frac{z_2^2}{z_1} + p(z_1, \frac{z_2}{z_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2) \\ F^3(z) = \frac{z_2 z_3}{z_1} + p(z_1, \frac{z_3}{z_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2)\frac{z_2}{z_1} \end{cases}$$

- 1D sekély víz egyenletek

$$\begin{cases} \Phi_t - (v\Phi)_x = 0 & \text{(Tömegmegmaradás)} \\ v_t - (v^2/2 + \Phi)_x = 0 & \text{(Impulzusmegmaradás)} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}(z) = \left(z_1 z_2, \frac{z_2^2}{2} + z_1\right)$$

Karakterisztikák

<u>1 egyenlet</u>

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$z(s) = u(x(s), s) = const$$

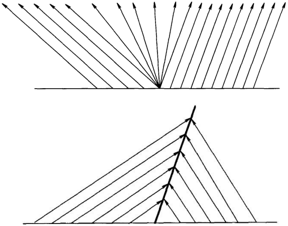
$$\dot{z}(s) = \partial_x u \cdot \dot{x} + \partial_t u = 0$$

Ismert:

$$F'(u)\partial_x u + \partial_t u = 0$$

$$\dot{x} = F'(u)$$

$$\dot{x}(0) = F'(g)$$



<u>Több egyenlet:</u>

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})_x = 0 \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{g}(x) \end{cases}$$

$$z(s) = \mathbf{u}(x(s), s) = const$$

$$\dot{z}(s) = \partial_x \mathbf{u} \cdot \dot{x} + \partial_t \mathbf{u} = 0$$

Ismert:

$$D\mathbf{F}(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} = 0$$

$$D\mathbf{F}(\mathbf{u})[\partial_x \mathbf{u}] = \dot{x}[\partial_x \mathbf{u}]$$

$$D\mathbf{F}(\mathbf{g})\mathbf{v}(\mathbf{g}(x)) = \dot{x} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{g}(x))$$

Probléma: u-nak szakadása lehet → nem deriválható.

Integrális (gyenge) megoldás

- Tesztfüggvény definiálása

$$\begin{cases} \mathbf{v} : \ \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^m \text{sima} \\ \text{kompakt tartójú, } \mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^m) \end{cases}$$

- Gyenge megoldás

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbf{u}\mathbf{v}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})\mathbf{v}_x dxdt + \int_{-\infty}^\infty \mathbf{g}\mathbf{v} dx_{t=0} = 0 \quad (\forall \mathbf{v})$$

- elegendő, ha **u** korlátos
- Rankine-Hugoniot feltétel (C szakadási görbe mentén):

$$[[\mathbf{F}(\mathbf{u})]] = \sigma[[\mathbf{u}]],$$

ahol

$$\begin{cases} [[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_r & \text{ugrás } \mathbf{u}\text{-ban C mentén} \\ [[\mathbf{F}(\mathbf{u})]] = F(\mathbf{u}_l) - F(\mathbf{u}_r) & \text{ugrás } \mathbf{F}(\mathbf{u})\text{-ban C mentén} \\ \sigma = \dot{s} & \text{haladási sebesség C-n} \end{cases}$$

Riemann probléma

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})_x = 0$$

$$\mathbf{g} = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{ha x<0} \\ \mathbf{u}_r & \text{ha x>0} \end{cases}$$

Próbafüggvény: egyszerű hullám

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{v}(w(x,t)) \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(w) w_t + D\mathbf{F}(\mathbf{u}(w))\dot{\mathbf{v}}(w) w_x = 0$$

$$\begin{cases} w_t + \lambda_k(\mathbf{v}(w)) w_x = 0 & \text{(skalár megmaradási egyenlet)} \\ \dot{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(s)) & \text{(közönséges diff. egyenlet)} \end{cases}$$

$$D\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_k = \lambda_k \mathbf{r}_k$$

Konvexitás

$$w_t + \lambda_k(\mathbf{v}(w))w_x = 0$$

$$w_t + F_k(w)_x = 0$$

$$F_k(s) := \int_s^0 \lambda_k(\mathbf{v}(t))dt \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$F'(s) = \lambda_k(\mathbf{v}(s))$$

$$F_k''(s) = D\lambda_k(\mathbf{v}(s))\dot{\mathbf{v}}(s) = D\lambda_k(\mathbf{v}(s))\mathbf{r}_k(\mathbf{v}(s))$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{cases} \text{konvex:} & D\lambda_k(\mathbf{z})\mathbf{r}_k(\mathbf{z}) > 0 \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m) \\ \text{konkáv:} & D\lambda_k(\mathbf{z})\mathbf{r}_k(\mathbf{z}) < 0 \\ \text{lineáris:} & D\lambda_k(\mathbf{z})\mathbf{r}_k(\mathbf{z}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} D\lambda_k(\mathbf{z})\mathbf{r}_k(\mathbf{z}) \neq 0 & \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow & \text{eredetileg nem lineáris} \\ D\lambda_k(\mathbf{z})\mathbf{r}_k(\mathbf{z}) = 0 & \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow & \text{lineárisan degenerált} \end{array}$$

Ritkulási görbék

- Ritkulási görbe: Adott $z_0 \in \mathbb{R}^m$, ekkor definiálható az ún. k-adik ritkulási görbe $\mathbb{R}^m$-ben, amely áthatad z_0-on és az érintője minden pontban párhuzamos $\mathbf{r}_k(z)$-vel.
- Ha $(\lambda_k(z), \mathbf{r}_k(z))$ pár eredetileg nem lineáris, akkor definiálható:

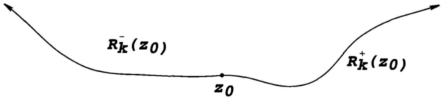
$$R_k^+(z_0) := \{z \in R_k(z_0) | \lambda_k(z) > \lambda_k(z_0)\}$$

és

$$R_k^-(z_0) := \{z \in R_k(z_0) | \lambda_k(z) < \lambda_k(z_0)\}.$$

- Ezekkel:

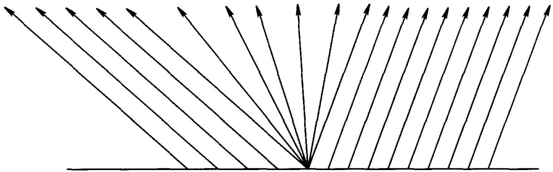
$$R_k(z_0) = R_k^+(z_0) \cup z_0 \cup R_k^-(z_0).$$



Ritkulási hullámok

- Tétel: Ha $(\lambda_k(z), \mathbf{r}_k(z))$ pár eredetileg nem lineáris és $u_r \in R_k^+(u_l)$, akkor létezik egy folytonos gyenge megoldása a Riemann-problémának, ami ún. k-egyszerű hullám.

- Megj: Ezt k-ritkulási hullámnak nevezzük.

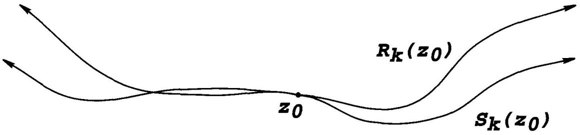


Lökéshalmaz

- A lökés halmaz: Adott $z_0 \in \mathbb{R}^m$, ekkor definiálható az ún lökés halmaz:

$$S(z_0) := \{z \in \mathbb{R}^m | \mathbf{F}(z) - \mathbf{F}(z_0) = \sigma(z - z_0) \text{ valamely } \sigma = \sigma(z, z_0)\}$$

- Tétel: Adott $z_0 \in \mathbb{R}^m$. Ekkor z_0 környezetében $S(z_0)$ m darab $S_k(z_0)$ sima görbe uniója, a következő tulajdonságokkal:
  1. $S_k(z_0)$ átmegy a z_0 ponton, $r_k(z_0)$ érintővel
  2. $lim_{z \to z_0} \ \sigma(z, z_0) = \lambda_k(z_0)$
  3. $\sigma(z, z_0) = \frac{\lambda_k(z) + \lambda_k(z_0)}{2} + O\left(|z - z_0|^2\right), \text{ ha } z \to z_0, \text{ ahol } z \in S_k(z_0)$
- Tétel: Ha a $(\lambda_k, \mathbf{r}_k)$ pár lineárisan degenerált, akkor minden $z_0 \in \mathbb{R}^m$-re
  1. $R_k(z_0) = S_k(z_0)$
  2. $\sigma = \sigma(u_r, u_l) = \lambda_k(u_l) = \lambda_k(u_r)$ minden $z \in S_k(z_0)$-ra.

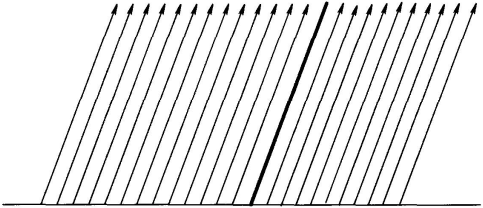


Kontakt szakadás

- Kontakt szakadás:
  Tegyük fel, hogy $(\lambda_k, \mathbf{r}_k)$ pár lineárisan degenerált és $u_r \in S_k(u_l)$, ekkor a Riemann-probléma gyenge megoldása:

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{ha } x < \sigma t \\ u_r & \text{ha } x > \sigma t \end{cases},$$

  ahol $\sigma = \sigma(u_r, u_l) = \lambda_k(u_l) = \lambda_k(u_r)$
- Megj: az $x = \sigma t$ vonalat k-kontakt szakadásnak nevezzük.



Lökéshullám

- Lökéshullám:
  Tegyük fel, hogy $(\lambda_k, \mathbf{r}_k)$ pár eredetileg nem lineáris és $u_r \in S_k(u_l)$, ekkor ha tekintjük az $\mathbf{u}(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{ha } x < \sigma t \\ u_r & \text{ha } x > \sigma t \end{cases}$ megoldást $\sigma = \sigma(u_r, u_l)$-re, két küldönböző eset van:
  1. $\lambda_k(u_r) < \lambda_k(u_l), \quad \lambda_k(u_r) < \sigma(u_r, u_l) < \lambda_k(u_l)$ Fizikai lökéshullám
  2. $\lambda_k(u_l) < \lambda_k(u_r), \quad \lambda_k(u_l) < \sigma(u_r, u_l) < \lambda_k(u_r)$ Nem fizikai lökéshullám
- Definíció: Tegyük fel, hogy $(\lambda_k, \mathbf{r}_k)$ pár eredetileg nem lineáris u_l-ben, ekkor azt mondjuk, hogy (u_l, u_r) pár *megengedett*, ha $u_r \in S_k(u_l)$ és $\lambda_k(u_r) < \sigma(u_r, u_l) < \lambda_k(u_l)$
- Megj: Ez utóbbit nevezzük Lax-entrópia-kritériumnak.