C. R. Acad. Sci. Paris, t. 3??, Série I, p. 000–000, 2001
Probabilités/*Probability Theory*
(Analyse complexe/*Complex Analysis*)

Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits

Stanislav SMIRNOV

Royal Institute of Technology, Department of Mathematics, Stockholm, S10044, Sweden
E-mail : stas@math.kth.se

(Reçu le ?????)

Abstract. In this Note we study critical site percolation on triangular lattice. We introduce harmonic conformal invariants as scaling limits of certain probabilities and calculate their values. As a corollary we obtain conformal invariance of the crossing probabilities (conjecture attributed to Aizenman by Langlands, Pouliot, and Saint-Aubin in [7]) and find their values (predicted by Cardy in [4], we discuss simpler representation found by Carleson). Then we discuss existence, uniqueness, and conformal invariance of the continuum scaling limit. The detailed proofs appear in [10]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Percolation critique dans le plan: Invariance conforme, formule de Cardy, objets limites

Résumé. *Dans cette note, nous nous intéressons à la percolation critique par sites sur le réseau plan triangulaire. Nous introduisons des invariants conformes harmoniques et nous montrons qu'ils correspondent à la limite lorsque la maille du réseau tend vers zéro de probabilités d'événements discrets. En particulier, nous obtenons l'invariance conforme asymptotique des probabilités de croisement et la formule de Cardy. Dans un second temps, nous étudions l'existence, l'unicité et l'invariance conforme d'objets limites.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Version française abrégée

Nous étudions la percolation critique par sites sur le réseau planaire triangulaire. En d'autres termes, chaque sommet du graphe est colorié (indépendamment des autres) avec une couleurs parmi deux possibilités, par exemple bleu et jaune, avec probabilité 1/2. On s'intéresse alors aux propriétés macroscopiques des composantes connexes du sous-graphe formé par les sites d'une couleur fixée (par exemple bleue). Comme référence générale, citons le livre [5] (voir aussi [1–4,7] et les références dans [10]).

Invariants conformes harmoniques. La propriété-clé des probabilités associées à la percolation que nous considérons ici est le fait qu'elle dépendent de manière harmonique d'un paramètre z variant dans un domaine plan. Cette propriété permet de les déterminer de manière unique à partir de leur comportement au bord du domaine, et implique qu'ils sont invariants par transformations conformes.

Note présentée par Lennart CARLESON.

On peut prédire l'existence de tels invariants conformes harmoniques en supposant l'existence et l'invariance conforme d'une limite asymptotique (lorsque la maille du réseau tend vers zéro) de la percolation, voir [10]. Nous considérons ici un invariant particulier: la complexification des probabilités de croisement. Soit Ω un triangle topologique avec sommets (ou bouts) désignés $a(1), a(\tau), a(\tau^2)$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ($\tau := \exp(2\pi i/3)$). Pour un réseau triangulaire de maille δ, nous définissons les fonctions $H_\alpha^\delta(z)$ (constantes sur les triangles du réseau), $\alpha \in \{1, \tau, \tau^2\}$, $z \in \Omega$, comme les probabilités de l'événement qu'il existe un chemin simple (c'est à dire auto-évitant) bleu, joignant l'arc $a(\alpha)a(\tau\alpha)$ à l'arc $a(\tau^2\alpha)a(\alpha)$ et séparant z de l'arc $a(\tau\alpha)a(\tau^2\alpha)$.

Pour un triangle equilatéral Ω' avec sommets $a'(1), a'(\tau), a'(\tau^2)$, nous définissons les fonctions linéaires h'_α, $\alpha \in \{1, \tau, \tau^2\}$ valant 1 en $a'(\alpha)$ et 0 aux deux autres sommets. Pour un triangle topologique quelconque Ω nous définissons les fonctions h_α comme les composées des h'_α par l'application conforme $\Omega \to \Omega'$, $a(\alpha) \mapsto a'(\alpha)$.

THÉORÈME 1. – *Lorsque $\delta \to 0$, les fonctions H_α^δ convergent uniformément dans Ω vers les fonctions h_α. En particulier, leurs limites sont des invariants conformes des points $a(1), a(\tau), a(\tau^2), z$ et du domaine Ω.*

Si le point z est choisi sur l'arc de bord $a(\tau^2)a(1)$, alors $H_{\tau^2}^\delta(z)$ donne la *probabilité de croisement* – la probabilité d'avoir une composante connexe bleue qui connecte les arcs $za(1)$ et $a(\tau)a(\tau^2)$.

COROLLAIRE 1 (FORMULE DE CARDY, VERSION DE CARLESON). – *Lorsque $\delta \to 0$, la probabilité de croisement est invariante conforme. Pour un triangle equilatéral de côtés de longueur un, elle tend vers $|za(1)|$.*

Pour démontrer le Théorème 1, nous montrons que les fonctions H_α^δ sont asymptotiquement harmoniques, et qu'elles sont solution du même problème de Dirichlet-Neumann que les h_α. L'harmonicité est établie en montrant que les H_α^δ forment un "triplet harmonique conjugué". Il se trouve que leurs dérivés discrètes sont données par les probabilités de certains événements "à 3 branches". Les événements correspondant à $\frac{\partial}{\partial\eta}H_\alpha$ et à $\frac{\partial}{\partial\tau\eta}H_{\tau\alpha}$ sont différents, mais ils ont la même probabilité, ce que implique les équations de Cauchy-Riemann (2).

Les objets limites. Il serait logique d'anticiper l'existence d'un objet continu, sorte de configuration limite de la percolation sur le réseau, lorsque la maille tend vers zéro. Cet objet serait alors invariant conforme et vérifierait la formule de Cardy. Les résultats connus de compacité [2] impliquent l'existence de limites faibles pour des sous-suites. Notre théorème implique qu'une telle limite faible vérifie la formule de Cardy, ce qui semble la déterminer de manière unique et la forcer à être invariante conforme. Une description complète de la configuration limite semble être inévitablement technique (cf. [1]), et la preuve sera contenue dans la suite de [10].

Une description possible de la percolation dans le plan se fait via une collection des courbes fermées emboîtées, les périmètres des composantes connexes des deux couleurs. Dans [10] nous démontrons que la loi d'un périmètre (normalisé) tend vers une limite. Soit Ω un triangle topologique avec trois sommets a, b et c désignés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Pour chaque configuration de la percolation, il existe une unique courbe γ^p, le "périmètre", qui suit les arêtes du réseau dual hexagonal et relie le sommet a à l'arc bc, en séparant les composantes connexes bleues touchant ab des composantes connexes jaunes touchant ca.

THÉORÈME 2. – *Lorsque $\delta \to 0$, la loi μ_δ^p du périmètre discret converge faiblement vers une loi, μ^p, concentrée sur les chemins Hölder, avec des points doubles (mais sans intersection propre), de a à bc. Cette loi est un invariant conforme de la configuration (Ω, a, b, c).*

Dans la preuve de Théorème 2 nous n'utilisons que des propriétés de la loi μ^p (l'invariance conforme, la propriété locale et la formule de Cardy, cf. [11]) qui sont valables pour le processus de Schramm SLE_6 cordale [9], ou pour l'enveloppe du mouvement Brownien refléchi (Werner [11]).

COROLLAIRE 2. – *La loi μ^p coincide avec la loi du SLE_6 cordal. La loi de l'enveloppe de γ^p coincide avec la loi de l'enveloppe du mouvement Brownien refléchi.*

Notons que les valeurs de plusieurs dimensions fractales pour SLE_6 sont connues (voir Lawler, Schramm et Werner, [8]). Les résultats analogues pour la percolation en découlent immédiatement.

We discuss critical site percolation on triangular lattice: vertices are independently colored in two colors, say blue and yellow, with equal probability 1/2, and properties of clusters (maximal connected subgraphs of fixed color) are investigated. For general background on percolation consult the book [5], for topics related to this paper see [1–4,7] and other references in [10].

Harmonic conformal invariants. We start by considering percolation-related quantities whose key property is their harmonic dependence on a point $z \in \Omega$. It allows us to determine them uniquely from their boundary behavior, and forces them to be conformally invariant. Harmonic conformal invariants related to Brownian motion were introduced by Kakutani in [6]. There are several harmonic conformal invariants related to percolation, and one can predict their existence assuming existence and conformal invariance of percolation scaling limit, see [10]. We consider a particular invariant which is a complexification of crossing probabilities.

Take a topological triangle – a simply connected domain Ω with three accessible boundary points (or prime ends), labeled counterclockwise $a(1), a(\tau), a(\tau^2)$ ($\tau := \exp(2\pi i/3)$). For a triangular lattice with mesh δ, we define (constant on the lattice triangles) function $H_\alpha = H_\alpha^\delta(z)$ to be the probability of an event $Q_\alpha(z)$, $\alpha \in \{1, \tau, \tau^2\}$, $z \in \Omega$, which is an occurrence of a blue simple path connecting the arcs $a(\alpha)a(\tau\alpha)$ and $a(\tau^2\alpha)a(\alpha)$, and separating z from the arc $a(\tau\alpha)a(\tau^2\alpha)$.

For an equilateral triangle Ω' with vertices $a'(1), a'(\tau), a'(\tau^2)$, we define linear functions h'_α, $\alpha \in \{1, \tau, \tau^2\}$ to be 1 at the vertex $a'(\alpha)$ and 0 at remaining vertices. For a general topological triangle Ω with vertices $a(1), a(\tau), a(\tau^2)$, we define h_α, $\alpha \in \{1, \tau, \tau^2\}$, to be the pull-backs of linear functions h'_α under the conformal map $\Omega \to \Omega'$, $a(\alpha) \mapsto a'(\alpha)$.

THEOREM 1. – *As $\delta \to 0$, functions H_α^δ converge uniformly in Ω to functions h_α. Particularly, their limits are conformal invariants of the points $a(1), a(\tau), a(\tau^2), z$ and the domain Ω.*

We prove the Theorem by showing that H_α^δ's are harmonic in the limit and satisfy the same mixed Dirichlet-Neumann problem as h_α's. The harmonicity is established by finding a harmonic conjugate and checking that contour integrals vanish (this is easier than working with Laplacian, which seems hardly possible). Interestingly, instead of a pair of harmonic conjugate functions, we get a "harmonic conjugate triple" h_1, h_τ, h_{τ^2}. It seems that $2\pi/3$ rotational symmetry enters in our paper not because of the specific lattice we consider, but rather manifests some symmetry laws characteristic to (continuum) percolation.

When point z is chosen on the boundary arc $a(\tau^2)a(1)$, then $H_{\tau^2}^\delta(z)$ gives the *crossing probability*, i.e. the probability of having a blue cluster connecting the arc $za(1)$ to the arc $a(\tau)a(\tau^2)$.

COROLLARY 1 (CARDY'S FORMULA IN CARLESON'S FORM). – *In the limit as $\delta \to 0$, the crossing probability is conformally invariant. For an equilateral triangle with side length one it tends to $|za(1)|$.*

Continuum scaling limit. It is logical to anticipate that there is a continuum object, corresponding to scaling limit (as mesh tends to zero) of the lattice percolation, which is conformally invariant and satisfies Cardy's formula. One can represent a discrete percolation configuration as a collection of "nested" oriented closed curves – perimeters of clusters of both colors. These curves are the unique curves along the edges of the dual lattice, separating clusters of opposite colors, and in the limit they will be the only curves corresponding to crossings by both colors. In the