

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

A Gödel univerzum geodetikusainak elemzése

OTDK dolgozat

Bárány Balázs

IV. éves matematikus hallgató

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Konzulensek: Dr. Andai Attila

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Analízis Tanszék

Dr. Szenthe János

Eötvös Lóránd Tudományi Egyetem

Geometria Tanszék

2006

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	2
2	Differenciálgeometriai alapok	3
3	Időutazás lehetősége időszerű, normált görbén	6
4	A Gödel univerzum geodetikusai	12
4.1	Geodetikusok differenciálegyenletének egy megoldása	14
4.2	Példa geodetikuson történő időutazásra	18
4.3	Geodetikusok származtatása megmaradó mennyiségekből	22
4.4	Néhány egyszerű következmény	30
5	Konklúzió	33

1 Bevezetés

Gödel és Einstein 1947-es találkozásakor született az Einstein-egyenletnek egy nagyszerű megoldása, melyet Gödel univerzumnak nevezünk. Ebben különféle, érdekes, esetleg paradoxnak tűnő jelenségek figyelhetők meg. Azonban ezek többségére a mai napig nem ismeretes feloldás.

A Gödel univerzumot egy négydimenziós téridőn értelmezett speciális szemi-Riemann metrika határozza meg. A dolgozat ennek az univerzumnak egy speciális alakjával foglalkozik. Az univerzumon belül elsősorban a geodetikusokat tárgyalja, mivel fizikailag nagy jelentőséggel bírnak. Ismeretes, hogy a geodetikusok a téridőben az egyenes vonalú, egyenletes mozgásnak felelnek meg, viselkedésük a Gödel univerzumban mégis rendkívül különös, figyelemre méltó.

A második fejezetben a témához kapcsolódó definíciókat, illetve ismert tételeket ismertetek. A harmadik fejezetben egy érdekes jelenségre, normált, időszerű, térkoordinátaiban zárt görbére mutatok egy példát, mely a Gödel univerzum egyik fontos jelensége. A továbbiakban az univerzum geodetikusait vizsgálom, a negyedik fejezet során egy lehetséges megoldásra mutatok példát, illetve numerikus eszközökkel egy olyan geodetikusra, amelyen lehetséges az időben történő visszautazás, térkoordinátaiban azonban zárt. Eddig ilyen görbe még nem volt ismeretes. A fejezet során felírom az univerzum megmaradó mennyiségeit, ami eddig szintén nem volt ismert. A dolgozatban levezetem, s numerikusan is igazolom helyességüket. Ezentúl mutatok még néhány érdekes következményt ezzel kapcsolatban.

2 Differenciálgeometriai alapok

Először a Gödel téridőt és a rajta értelmezett Riemann metrikát definiáljuk.

2.1 Definíció. Gödel téridőnek nevezzük az $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sokaságot, ahol az első komponens az időnek, a többi pedig az \mathbb{R}^3 hengerkoordinátás felírásának felel meg. A sokaság minden $(t, r, \varphi, z) \in M$ pontjában tekintsük a következő mátrixot.

$$G(t, r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -8\sqrt{2}\operatorname{sh}^2 r & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{2}\operatorname{sh}^2 r & 0 & 8\operatorname{sh}^2 r - 8\operatorname{sh}^4 r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

A $G : M \rightarrow \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ leképezést, illetve az általa meghatározott

$$M \rightarrow \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \quad p \mapsto ((a, b) \mapsto \langle a, G(p)b \rangle)$$

függvényt nevezzük Gödel-metrikának. Az $\langle a, G(p)b \rangle$ mennyiség az a és b vektor p pontbeli skaláris szorzata.

A definícióval kapcsolatban fontos megjegyezni, hogy a sokaságban szereplő $[0, 2\pi[$ halmaz helyett differenciálgeometriai szempontból természetesebb lenne a $]0, 2\pi[$ nyílt intervallumot tekinteni és a sokaságot két térképpel lefedni, azonban a sokaságon értelmezett metrikában nem szerepel a φ polárkoordináta, így a számolások és a formulák egyszerűsítése végett a polárkoordináta értelmezési tartományának a $[0, 2\pi[$ halmazt tekintjük. A definícióban szereplő metrika és skaláris szorzat nem a szokásos értelemben vett metrika és skaláris szorzat, hiszen egy vektor önmagával vett skaláris szorzata lehet negatív is, hanem a szemi-Riemann sokaságok elméletében elterjedt elnevezések.

Egy részecske vagy test téridőben történő mozgását egy görbével írhatjuk le. Először megfogalmazzuk matematikailag azt a kijelentést, hogy a „részecske minden pillanatban a fénysebességnél lassabban halad és az időben előre felé mozog”.

2.2 Definíció. Egy $\underline{v} : \mathbb{R} \rightarrow M$ görbét időszerűnek nevezzük, ha minden $u \in \text{Dom}\underline{v}$ pontban

$$\langle \dot{\underline{v}}(u), G(\underline{v}(u))\dot{\underline{v}}(u) \rangle < 0$$

teljesül. Hasonlóan, fényyszerűnek nevezzük, ha $\langle \dot{\underline{v}}(u), G(\underline{v}(u))\dot{\underline{v}}(u) \rangle = 0$, illetve térszerűnek, ha $\langle \dot{\underline{v}}(u), G(\underline{v}(u))\dot{\underline{v}}(u) \rangle > 0$ teljesül minden $u \in \text{Dom}\underline{v}$ pontban.

A fénysebességnél lassabban haladó részecskék mozgását időszerű görbék írják le. Ahhoz, hogy az időben előre felé haladó mozgást leírhatjuk szükség van az időkúp fogalmára.

2.3 Definíció. Az M sokaság egy p pontjában időszerű vektoroknak nevezzük az

$$I_p = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \underline{v}, G(p)\underline{v} \rangle < 0 \}$$

halmaz elemeit.

Minden $p \in M$ esetén az I_p halmazon értelmezzük a \sim relációt, úgy, hogy az $\underline{v}, \underline{u} \in I_p$ vektorokra $\underline{v} \sim \underline{u}$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle \underline{u}, G(p)\underline{v} \rangle < 0$. Ismert, hogy a \sim reláció ekvivalenciareláció, melynek pontosan két ekvivalencia osztálya van [7].

2.4 Definíció. Az M sokaság egy p pontjában az I_p halmazon a \sim reláció által meghatározott két ekvivalencia osztályt nevezzük a p pontbeli időkúpnak.

Most már a sokaság minden pontjában ismertek az időszerű vektorok, azonban az „idő irányáról” semmit sem mond a metrika. Ezért a modellbe külön kell beilleszteni az időorientációt, ha ez egyáltalán lehetséges.

2.5 Definíció. *Az M sokaság minden p pontjában jelölje C_p az I_p egyik időkúpját. A*

$$\bowtie: M \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad p \mapsto \underline{u}_p$$

leképezést sima időkúp mezőnek nevezzük, ha a leképezés sima és minden $p \in M$ pontban $\underline{u}_p \in C_p$ teljesül. Az M időorientációján sima időkúp mezőt értünk.

Az M sokaságon létezik időorientáció [7] VII. fejezet 3.4. állítása alapján. Tehát alapvetően kétféle időorientáció létezhet a sokaságon. Minden egyes példában azzal a feltételezéssel élünk, hogy azt az időorientációt tekintjük, melyre a vizsgált, vagy mozgás leírása esetén a kezdeti $p \in M$ pontban az $\underline{u}_p \in C_p$ vektor első komponense pozitív (vagy pozitívvá tehető az időorientáció megváltoztatása nélkül). A továbbiakban feltesszük még, hogy egy $\underline{\mathbf{v}}: \mathbb{R} \rightarrow M$ időszerű görbe alatt olyan időszerű görbét értünk melyre minden $u \in \text{Dom}\underline{\mathbf{v}}$ pontban $\dot{\underline{\mathbf{v}}}(u) \in C_{\underline{\mathbf{v}}(u)}$ teljesül, tehát csak időben előre felé haladó görbéket vizsgálunk.

Tekintsünk egy $\underline{\mathbf{v}}: \mathbb{R} \rightarrow M$ időszerű görbét, mely valamely test mozgását írja le. Ekkor $\dot{\underline{\mathbf{v}}}$ jelenti a test energia-impulzus négyesvektorát. A szabadon mozgó test pályája egy geodetikus görbe [3, 4]. Ismert, hogy ha $\underline{\mathbf{v}}$ geodetikus, akkor a $\langle \dot{\underline{\mathbf{v}}}(u), G(\underline{\mathbf{v}}(u))\dot{\underline{\mathbf{v}}}(u) \rangle$ kifejezés nem függ az u változótól [5, 7, 6], nevezetesen ez éppen $-m^2$, ahol m a test tömegét jellemzi [3, 4]. Fizikában általában a görbék sajátidő szerinti paraméterezését használják, ami azt jelenti,

hogy minden $u \in \text{Dom} \underline{\mathbf{v}}$ pontban $\langle \dot{\underline{\mathbf{v}}}(u), G(\underline{\mathbf{v}}(u))\dot{\underline{\mathbf{v}}}(u) \rangle = -1$ teljesül [4]. Az így paraméterezett görbét nevezzük a továbbiakban normált görbéknek.

Tekintsük a $\underline{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow M$ görbét, ahol $\underline{\mathbf{v}}(u) = [t(u), r(u), \varphi(u), z(u)]$. A $\frac{d\underline{\mathbf{v}}}{du}$ mennyiség önmagával vett skaláris szorzata (a $\underline{\mathbf{v}}(u)$ pontban) ekkor

$$\begin{aligned} & -8 \left(\frac{dt}{du}(u) \right)^2 - 16 \frac{dt}{du}(u) \frac{d\varphi}{du}(u) \sqrt{2} \text{sh}(r(u))^2 + 8 \left(\frac{dr}{du}(u) \right)^2 + \\ & + 8 \left(\frac{d\varphi}{du}(u) \right)^2 \text{sh}(r(u))^2 - 8 \left(\frac{d\varphi}{du}(u) \right)^2 \text{sh}(r(u))^4 + 8 \left(\frac{dz}{du}(u) \right)^2. \end{aligned}$$

A továbbiakban, ha csak másként nem kötjük ki, a térben csak az xy síkban történő mozgást vizsgáljuk, vagyis a $z(u) = 0$ esetet tekintjük.

3 Időutazás lehetősége időszerű, normált görbén

A Gödel univerzumban bármely $[t_1, r_1, \varphi_1, z_1]$ és $[t_2, r_2, \varphi_2, z_2] \in M$ pontok között létezik időszerű görbe. Ennek szemléletes, ám matematikailag nem teljesen egzakt bizonyítása megtalálható a [2, 1] művekben.

Ebben a fejezetben konstruktív módon megmutatom, hogy a Gödel univerzumban lehetséges a hétköznapi értelemben vett időutazás, vagyis egy tér-idő pontból elindulva egy megadott pályán a térben ugyan oda érkezünk vissza, azonban időben indulásunkat meglőző időpontban érkezünk meg. *A következőkben olyan normált, időszerű görbére mutatok példát, mely térkoordinátaiban zárt.*

Tekintsük a $\underline{\mathbf{v}}(u) = [t(u), r(u), \varphi(u), 0]$ görbét, ahol $r(u), \varphi(u)$ tetszőleges, folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel még, hogy a $\underline{\mathbf{v}}$ függvény

a $[0, c]$ ($c \in \mathbb{R}^+$) intervallumon értelmezett. Ezekhez keresünk olyan $t(u)$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre a

$$\frac{dt}{du}(u)|_{u=0} > 0 \quad (1)$$

illetve a

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{v}}(u), G(\mathbf{v}(u))\dot{\mathbf{v}}(u) \rangle &= \\ &= -8 \left(\frac{dt}{du}(u) \right)^2 - 16 \frac{dt}{du}(u) \frac{d\varphi}{du}(u) \sqrt{2} \operatorname{sh}(r(u))^2 + 8 \left(\frac{dr}{du}(u) \right)^2 + \\ &+ 8 \left(\frac{d\varphi}{du}(u) \right)^2 \operatorname{sh}(r(u))^2 - 8 \left(\frac{d\varphi}{du}(u) \right)^2 \operatorname{sh}(r(u))^4 = -1 \end{aligned} \quad (2)$$

feltétel teljesül minden $u \in]0, c[$ esetén.

Az (1) feltételnek a 2. fejezetben már taglalt fizikai jelentősége van, ez garantálja, hogy időszerű legyen a görbénk. Jelenlegi ismereteink szerint csak olyan eszközt lennének képesek létrehozni, amely az adott részecskét időben előre lenne képes elmozdítani, így olyan görbéket keresünk, amelyekre ez teljesül.

Tegyük fel még továbbá, hogy $r(0) = r(c)$ illetve $\varphi(0) = \varphi(c) \pmod{2\pi}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük még, hogy $\varphi(0) = 0$. Ezek a feltételek garantálják, hogy a görbe térkoordinátaiban zárt legyen. Időutazásról akkor beszélünk, ha $t(c) < t(0)$ teljesül.

Ekkor az (2) egyenletet megoldva $\frac{dt}{du}(u)$ -ra, kapjuk a

$$\frac{dt}{du}(u) = \frac{-4\operatorname{sh}(r(u))^2 \frac{d\varphi}{du}(u) - \sqrt{1 + 2\operatorname{sh}(2r(u))^2 \left(\frac{d\varphi}{du}(u) \right)^2 + 8 \left(\frac{dr}{du}(u) \right)^2}}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{dt}{du}(u) = \frac{-4\text{sh}(r(u))^2 \frac{d\varphi}{du}(u) + \sqrt{1 + 2\text{sh}(2r(u))^2 \left(\frac{d\varphi}{du}(u)\right)^2 + 8 \left(\frac{dr}{du}(u)\right)^2}}{2\sqrt{2}} \quad (4)$$

eredményeket. Az (1) feltétel teljesülését kell ellenőrizni. Három különböző esetet vizsgálunk meg.

1. A $\frac{d\varphi}{du}(0) = 0$ esetben triviálisan a (4) megoldást kell választanunk.
2. A $\frac{d\varphi}{du}(0) > 0$ esetén könnyen látható, hogy az (1) feltétel teljesüléséhez (3)-at nem választhatjuk, mivel az ekkor negatív. A (4) megoldásból elemi átalakításokkal kapjuk az

$$1 + 8 \left(\frac{dr}{du}(0)\right)^2 + 8\text{sh}(r(0))^2(1 - \text{sh}(r(0))^2) \left(\frac{d\varphi}{du}(0)\right)^2 > 0$$

feltételt, amely $r(0) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$ esetén biztosan teljesül.

Az egyenlőtlenséget $r(0)$ -ra megoldva kapjuk, hogy bármely $\frac{dr}{du}(0) \in \mathbb{R}$ esetén $r(0)$ -át az

$$\left[0, \text{arsh} \left(\sqrt{\frac{2\frac{d\varphi}{du}(0) + \sqrt{2}\sqrt{1 + 2\left(\frac{d\varphi}{du}(0)\right)^2 + 8\left(\frac{dr}{du}(0)\right)^2}}{4\frac{d\varphi}{du}(0)}} \right) \right)$$

intervallumból választva teljesül a kritérium.

3. A $\frac{d\varphi}{du}(0) < 0$ feltétellel (4) választása esetén nyilvánvalóan teljesül (1).

A (3) megoldás választásakor pedig elemi átalakításokkal a

$$1 + 8 \left(\frac{dr}{du}(0)\right)^2 + 8\text{sh}(r(0))^2(1 - \text{sh}(r(0))^2) \left(\frac{d\varphi}{du}(0)\right)^2 < 0$$

kritériumot kapjuk, amely nem teljesül, ha $r(0) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$.

Az előzőekből következik, hogy nem minden kezdeti térkoordinátához, $r(0)$, $\frac{d\varphi}{du}(0)$, $\frac{dr}{du}(0)$ értékekhez, tudunk olyan $t(u)$ függvényt találni, amelyre teljesül (1), ezért ezek megválasztásakor körültekintőnek kell lennünk.

A következőkben egy ilyen, normált, időszerű, térkoordinátaiban zárt görbére hozok példát, amelyen létezik időutazás. Kézenfekvő módon és számolás egyszerűsítése végett vegyük a sugárt állandónak.

Tekintsünk a továbbiakban egy olyan görbét, melynek a sugár komponense $r \in \mathbb{R}^+$ állandó és a polárszög komponensét a $\varphi(u) = u^2$ függvény írja le, ahol $u \in [0, \sqrt{2\pi}]$. Ekkor a (4) megoldást u szerint kiintegrálva, $t(0) = 0$ feltétellel kapjuk a

$$t(u) = -u^2\sqrt{2}\text{sh}(r)^2 + \frac{u\sqrt{16\text{sh}(2r)^2u^2 + 2}}{8} + \frac{\ln(4\text{sh}(2r)u + \sqrt{16\text{sh}(2r)^2u^2 + 2})}{16\text{sh}(2r)} + \frac{-\ln(2)}{32\text{sh}(2r)} \quad (5)$$

függvényt. Vizsgáljuk meg, hogy r milyen megválasztása esetén lesz $t(0) > t(\sqrt{2\pi})$. Vegyük észre, hogy

$$\frac{2\ln(4\text{sh}(2r)\sqrt{2\pi} + \sqrt{16\text{sh}(2r)^22\pi + 2}) - \ln(2)}{32\text{sh}(2r)} < \frac{\ln(16\text{sh}(2r)^22\pi + 2) + \ln(2)}{32\text{sh}(2r)}$$

a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt. A $t(\sqrt{2\pi}) < 0$ feltétel teljesül, ha a következő egyenlőtlenség teljesül

$$8\frac{\sqrt{2\pi}\text{ch}(r)}{\text{sh}(r)}\sqrt{\frac{32\pi}{\text{sh}(2r)} + \frac{2}{\text{sh}(2r)^2}} + \frac{\ln(16\text{sh}(2r)^22\pi + 2)}{\text{sh}(2r)\text{sh}(r)^2} + \frac{\ln(2)}{\text{sh}(2r)\text{sh}(r)^2} < 64\pi\sqrt{2}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalának minden tagja tart 0-hoz, ha az r tart a végtelenbe.

Vizsgáljuk meg, mikor lesz a bal oldal minden tagja kisebb, mint $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$. Elsőként vizsgáljuk az első tagot. Mindkét oldalt négyzetre emelve, közös

nevezőre hozva, s exponenciálisan kifejtve kapjuk, hogy

$$\frac{16 + 8e^{-2r} + 8e^{2r} + 128\pi + 64e^{-4r}\pi + 128e^{-2r}\pi + 128e^{2r}\pi + 64e^{4r}\pi}{4 + e^{-6r} - 2e^{-4r} - e^{-2r} - e^{2r} - 2e^{4r} + e^{6r}} < \frac{64\pi}{9}.$$

Ekkor azonban a kifejezés bal oldalának nevezője pozitív, mivel eredeti alakja $\text{sh}(r)^2\text{sh}(2r)^2$ volt, és a számlálója felülről becsülhető a $(32 + 512\pi)e^{4r}$ kifejezéssel. A nevezővel beszorozva, mindkét oldalhoz hozzáadjuk a

$$(2e^{-4r} + e^{-2r} + e^{2r} + 2e^{4r}) \cdot \frac{64\pi}{9}$$

kifejezést és ezt is felülről tudjuk becsülni $6 \cdot \frac{64\pi}{9} \cdot e^{4r}$ -rel. Így az egyenlőtlenségünk a következőképpen alakul.

$$\left(32 + 512\pi + \frac{128\pi}{3}\right) e^{4r} < \frac{64\pi}{9} \cdot (4 + e^{-6r} + e^{6r})$$

További becsléssel kapjuk, hogy

$$\frac{32 + 512\pi + \frac{128\pi}{3}}{\frac{64\pi}{9}} < e^{2r}.$$

Ez pedig akkor teljesül, ha r nagyobb, mint a bal oldalon álló kifejezés logaritmusának fele, ami hozzávetőlegesen 2.18745.

A második tag esetén szintén exponenciálisan kifejtve kapjuk, hogy

$$\frac{8 \ln(8\pi e^{4r} + 8\pi e^{-4r} - 16\pi + 2)}{e^{4r} + 2e^{-2r} - 2e^{2r} - e^{-4r}} < \frac{64\pi\sqrt{2}}{3}.$$

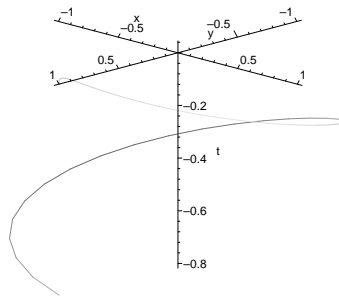
Ekkor, a bal oldal nevezője nagyobb, mint e^{2r} , ha $r \geq \ln(3)/2 \approx 0.5493$, ugyanis ekkor $3e^{2r} \leq e^{4r} \leq e^{4r} + e^{-2r}$ és $-e^{-4r} \geq -e^{-2r}$. A számláló pedig könnyen felülről becsülhető $8(\ln(16\pi) + 4r)$ -rel. Ebből egyszerűen következik, hogy az egyenlőtlenség teljesül, ha

$$\frac{\ln(16\pi) + 4r}{e^{2r}} \leq \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez teljesül, ha $r \geq 0.77898$.

A harmadik tag esetében hasonló átalakításokkal kapjuk, hogy az akkor lesz kisebb, mint $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$, ha $r > 0.152868$. Azaz, ha r -t 2.18745-nél nagyobbak választjuk, teljesül, hogy $t(\sqrt{2\pi}) < 0$. Ennél több is igaz, ugyanis *Maple* program segítségével megállapítható, hogy $t(\sqrt{2\pi}) < 0$ feltétel 0.9 és 2.18745 között is teljesül.

Az előbbieken vizsgált görbe a tér-idő pályája $r = 1$ esetén a következőképpen alakul.



1. Kép: *Időutazás normált, időszerű körön*

4 A Gödel univerzum geodetikusai

Tekintsük a $\underline{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow M$ görbét, ahol $\underline{\mathbf{v}}(u) = [t(u), r(u), \varphi(u), z(u)]$. A Gödel-univerzumban a $\underline{\mathbf{v}}$ görbe pontosan akkor geodetikus, ha eleget tesz a

következő másodrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszernek.

$$\frac{\left(\frac{d^2 \varphi}{d u^2}(u)\right) \operatorname{sh}(r(u)) \operatorname{ch}(r(u)) - 2\sqrt{2} \frac{d t}{d u}(u) \frac{d r}{d u}(u) + 2 \frac{d r}{d u}(u) \frac{d \varphi}{d u}(u)}{\operatorname{ch}(r(u)) \operatorname{sh}(r(u))} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 r}{d u^2}(u) + 2\sqrt{2} \operatorname{sh}(r(u)) \operatorname{ch}(r(u)) \frac{d t}{d u}(u) \frac{d \varphi}{d u}(u) - \\ & - 3 \left(\frac{d \varphi}{d u}(u)\right)^2 \operatorname{sh}(r(u)) \operatorname{ch}(r(u)) + 2 \left(\frac{d \varphi}{d u}(u)\right)^2 \operatorname{sh}(r(u)) \operatorname{ch}(r(u))^3 = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 t}{d u^2}(u) \operatorname{ch}(r(u)) + 4 \operatorname{sh}(r(u)) \frac{d t}{d u}(u) \frac{d r}{d u}(u) + \\ & + 2\sqrt{2} \operatorname{sh}(r(u)) \operatorname{ch}(r(u))^2 \frac{d r}{d u}(u) \frac{d \varphi}{d u}(u) - \\ & + 2\sqrt{2} \operatorname{sh}(r(u)) \frac{d r}{d u}(u) \frac{d \varphi}{d u}(u) = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 z}{d u^2}(u) = 0 \quad (9)$$

Látható, hogy a z koordináta $z(u) = a u + b$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, azonban a többi egyenlet megoldása messze nem triviális.

Differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy a fenti differenciálegyenlet-rendszernek minden kezdeti feltétel esetén létezik egyértelmű megoldása [5, 7, 6].

Az egyenletek alakjából leolvasható egy egyszerű, ám szép állítás.

4.1 Tétel. *Legyenek t, φ és r kétszer folytonosan differenciálható függvények megoldásai a (6), (7), (8) differenciálegyenleteknek a $t(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $r(0) = r_0$, $\frac{d t}{d u}(0) = t_0$, $\frac{d \varphi}{d u}(0) = \varphi_0$, $\frac{d r}{d u}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett, ahol $r_0, t_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor r páros, t és φ páratlan függvény.*

Bizonyítás. Leolvasható, hogy ha $t(u), \varphi(u), r(u)$ megoldása a differenciále-

gyenlet-rendszernek, akkor $-t(u), -\varphi(u), r(u)$ is megoldása, hiszen (6), (7) és (8) egyenletekbe behelyettesítve visszazakapjuk az eredeti egyenleteket.

Ugyanakkor $t(-u), \varphi(-u), r(-u)$ is megoldásai az egyenleteknek. Hiszen, a (6) egyenletet nézve, annak minden u -ra kell teljesülnie, ezért speciálisan $-u$ -ra is, azaz

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d(-u)^2}(-u) \operatorname{sh}(r(-u)) \operatorname{ch}(r(-u)) - 2\sqrt{2} \frac{dt}{d(-u)}(-u) \frac{dr}{d(-u)}(-u) + \\ + 2 \frac{dr}{d(-u)}(-u) \frac{d\varphi}{d(-u)}(-u) = 0 \end{aligned}$$

is fennáll. Könnyen látható, hogy minden $g \in C^2$ függvényre $\frac{dg}{d(-u)}(-u) = -\frac{dg}{du}(-u)$ és $\frac{d^2 g}{d(-u)^2}(-u) = \frac{d^2 g}{du^2}(-u)$. Vagyis teljesül a geodetikusra vonatkozó differenciálegyenlet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{du^2}(-u) \operatorname{sh}(r(-u)) \operatorname{ch}(r(-u)) - 2\sqrt{2} \frac{dt}{du}(-u) \frac{dr}{du}(-u) + \\ + 2 \frac{dr}{du}(-u) \frac{d\varphi}{du}(-u) = 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan ellenőrizhető ez a többi egyenletre is.

Mivel $-t(0) = 0 = t(-0) = t(0)$, $-\varphi(0) = 0 = \varphi(-0) = \varphi(0)$, $r(-0) = r(0) = r_0$, $\frac{dt}{du}(-0) = \frac{dt}{du}(0) = t_0$, $\frac{d\varphi}{du}(-0) = \frac{d\varphi}{du}(0) = \varphi_0$, $\frac{dr}{du}(-0) = \frac{dr}{du}(0) = 0 = -\frac{dr}{du}(0)$, így az unicitás miatt $t(-u) = -t(u)$, $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, $r(-u) = r(u)$. Ezzel az állítást beláttuk. \square

Érdekes kérdés, hogy mit tudunk mondani akkor, ha $\frac{dr}{du}(0) \neq 0$. Fontos látni, ha $t(u), r(u), \varphi(u)$ megoldásai a differenciálegyenlet-rendszernek, akkor $t(u+c)+d_1, r(u+c), \varphi(u+c)+d_2$ is megoldásai, ahol $c, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Ezt, az előző bizonyítás módszerével hasonlóan belátható. Ekkor, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $\frac{dr}{du}(c) = 0$, akkor az $t(u+c) - t(c), r(u+c), \varphi(u+c) - \varphi(c)$ függvények

szintén páros, illetve páratlan függvények lesznek, valamint megoldásai a (6), (7), (8) differenciálegyenlet-rendszernek. Ilyen c azonban nem mindig létezik.

Például válasszuk meg a $t(u)$ és $\varphi(u)$ függvényeket konstansnak. Ekkor a (6) és (8) egyenletekre azonosan nullát kapunk, míg a (7) egyenletre

$$\frac{d^2 r}{d u^2}(u) = 0$$

adódik. Vagyis $r(u) = r_1 u + r_0$ alakú. Így $t(0) = t_1$, $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_1$, $\frac{d t}{d u}(0) = 0$, $\frac{d r}{d u} = r_1 > 0$ és $\frac{d \varphi}{d u}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett nincs olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $\frac{d r}{d u}(c) = 0$. A t_1, φ_1 lehet nulla is.

4.1 Geodetikuskok differenciálegyenletének egy megoldása

A fejezetben megmutatom, hogy létezik térkoordinátáiban körpályás geodetikusk, mely időkoordinátájában lineáris.

Tekintsük a továbbiakban egy olyan görbét, melynek a sugár komponense $r \in \mathbb{R}^+$ állandó. Ekkor a geodetikusra vonatkozó differenciálegyenletek a következőkre redukálódnak.

$$\frac{d^2 \varphi}{d u^2}(u) = 0 \tag{10}$$

$$2\sqrt{2}\text{sh}(r)\text{ch}(r)\frac{d t}{d u}(u)\frac{d \varphi}{d u}(u) - 3\left(\frac{d \varphi}{d u}(u)\right)^2 \text{sh}(r)\text{ch}(r) + 2\left(\frac{d \varphi}{d u}(u)\right)^2 \text{sh}(r)\text{ch}(r)^3 = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d^2 t}{d u^2}(u) = 0 \tag{12}$$

A (10) és (12) egyenletekből következik, hogy $t(u) = t_1 u + t_0$ és $\varphi(u) = \varphi_1 u + \varphi_0$. Így (11) előáll

$$2\sqrt{2}t_1\varphi_1 - \varphi_1^2 + 2\varphi_1^2 \operatorname{sh}(r)^2 = 0$$

alakban. A skaláris szorzat pedig

$$-8t_1^2 - 16t_1\varphi_1\sqrt{2}\operatorname{sh}(r)^2 + 8\varphi_1^2\operatorname{sh}(r)^2 - 8\varphi_1^2\operatorname{sh}(r)^4.$$

Ha $\varphi_1 = 0$, akkor r tetszőleges és a görbe fényszerű, ha $t_1 = 0$, különben időszerű. Tegyük fel, hogy t_1, φ_1 adott és $\varphi_1 \neq 0$. Pontosan akkor létezik valós r , $t_1 > 0$ esetén, ha $\varphi_1 > 2\sqrt{2}t_1$ vagy $\varphi_1 < 0$, illetve $t_1 < 0$ esetén $\varphi_1 < 2\sqrt{2}t_1$ vagy $\varphi_1 > 0$. Ekkor

$$r = \operatorname{arsh} \left(\sqrt{\frac{\varphi_1 - 2\sqrt{2}t_1}{2\varphi_1}} \right).$$

Ezt a skaláris szorzatba helyettesítve kapjuk a

$$8t_1^2 - 8\sqrt{2}t_1\varphi_1 + 2\varphi_1^2$$

kifejezést. Szorzattá alakítva pedig következő alakban áll elő

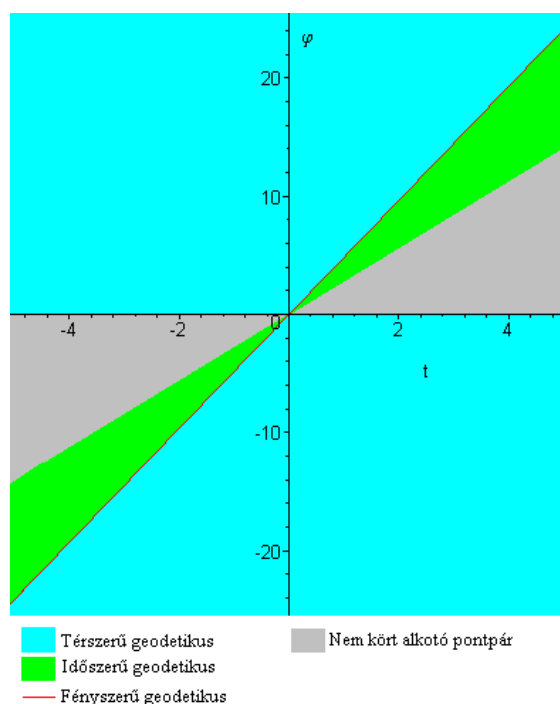
$$8 \left(t_1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\varphi_1 \right) \left(t_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\varphi_1 \right).$$

Ebből látható, hogy a skaláris szorzat akkor nulla, ha $t_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\varphi_1$, vagy $t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\varphi_1$. Időszerű a geodetikus, azaz a skaláris szorzat negatív, $t_1 > 0$ esetén $\frac{2}{1+\sqrt{2}}t_1 < \varphi_1 < \frac{2}{\sqrt{2}-1}t_1$, illetve $t_1 < 0$ feltétellel $\frac{2}{\sqrt{2}-1}t_1 < \varphi_1 < \frac{2}{\sqrt{2}+1}t_1$ esetben. Minden más esetben pozitív. Figyelembe kell még vennünk, hogy a görbe osztályozása függ a valós r miatti összefüggéstől is t_1 és φ_1 között. Azaz a geodetikus időszerű, $t_1 > 0$ esetén, ha

$2\sqrt{2}t_1 < \varphi_1 < \frac{2}{\sqrt{2}-1}t_1$ illetve, $t_1 < 0$ esetén, ha $\frac{2}{\sqrt{2}-1}t_1 < \varphi_1 < 2\sqrt{2}t_1$.

Fényszerű, ha $t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\varphi_1$. Illetve térszerű pozitív t_1 esetén, ha $\varphi_1 > \frac{2}{\sqrt{2}-1}t_1$ vagy $\varphi_1 < 0$, illetve $t_1 < 0$ esetben $\varphi_1 < \frac{2}{\sqrt{2}-1}t_1$ vagy $\varphi_1 > 0$ fennállásakor.

A következő ábrán a (t_1, φ_1) pontpárokhoz tartozó geodetikuskok, az előbbi számításoknak megfelelő osztályozása látható.



2. Kép: A geodetikus görbe osztályozása (t_1, φ_1) pontpár függvényében

4.2 Példa geodetikuson történő időutazásra

A fejezet során megmutatom, hogy lehetséges a geodetikuson történő időutazás, amely jó közelítéssel térben zártnak mondható. Ilyen geodetikus görbe eddig nem volt ismert.

A (6), (7), (8) differenciálegyenlet-rendszert, bonyolultsága miatt, csak közelítőleg tudjuk megoldani. A Maple programnak köszönhetően a megoldás hibáját, mind a relatív, mind az abszolút hibáját, elég nagy pontossággal be tudjuk határozni.

A geodetikuson történő mozgás a Gödel-téridőben az egyenes vonalú, egyenletes mozgásnak felel meg fizikailag. A következő geodetikus görbe kezdeti feltételei legyenek: $t(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $r(0) = 1.5$, $\frac{d\varphi}{du}(0) = -0.2$, $\frac{dr}{du}(0) = 0$, valamint a 2. fejezetben, a normált görbékkel kapcsolatban elmondottak alapján a $\frac{dt}{du}(0)$ értéket válasszuk meg 0.220015-nek. Ekkor a skaláris szorzat értéke hozzávetőlegesen -1.000007719 . Ismeretes, hogy geodetikuson a skaláris szorzat állandó, azaz a geodetikus időszerű, és jó közelítéssel normálnak mondható. A Maple programcsomag *dsolve* programjának *bvp* módszerével beállítható, numerikus megoldás esetén, az abszolút hiba, melyet válasszunk 10^{-11} -nek a $[0, 3]$ intervallumon. Ekkor a geodetikus görbe az

$u_0 = 2.8059105774$ helyen a következő értékeket veszi fel.

$$t(u_0) = -1.46203489895569794$$

$$r(u_0) = 1.500000000000003176$$

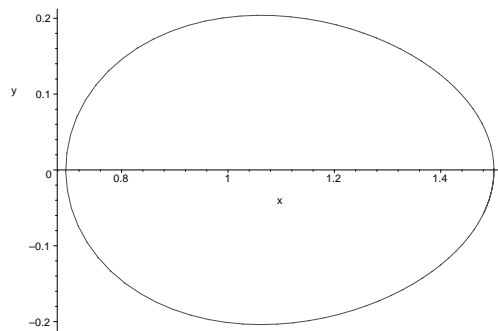
$$\varphi(u_0) = 0.982678359395364366 \cdot 10^{-11}$$

$$\frac{dt}{du}(u_0) = 0.220015000000080868$$

$$\frac{dr}{du}(u_0) = 0.486471986368156246 \cdot 10^{-10}$$

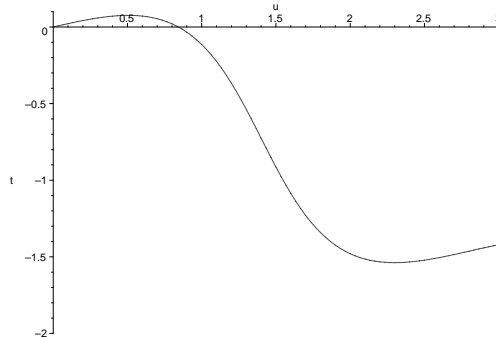
$$\frac{d\varphi}{du}(u_0) = -0.19999999999965122$$

Így a görbét jó közelítéssel térkoordinátaiban zártnak tekinthetjük, amelynek pályáját az alábbi ábra szemlélteti.



3. Kép: A geodetikus görbe térkoordinátái

A hozzá tartozó időfüggvényt pedig az alábbi ábra mutatja.



4. Kép: A geodetikus görbe időkoordinátája

A geodetikuson történő időutazás igen jelentős kérdés, ugyanis számos más, még megoldatlan problémát vet fel. Az egyik ilyen például a „billiárdgolyó paradoxon”. Tekintsünk két pontszerű testet, a -t és b -t. Legyen b pályája olyan, hogy az a -val történő ütközése után azt egy olyan geodetikus pályára taszítja, mely térkoordinátaiban zárt, s visszautazik az időben, kilökve saját magát arról a helyről, ahol b eredetileg eltalálta. Ekkor, mivel már azon a helyen, ahol b -vel ütközött, nincs semmi, b -nek haladnia kellene tovább eredeti pályáján, ami így látszólagos ellentmondáshoz vezet, feloldása azonban eddig még nem ismeretes.

Az előbbieken elmondottak alapján t sokkal inkább egy negyedik térkoordináta tulajdonságait ölti magára, az időről eddig bennünk kialakult fogalmakkal szemben.

4.3 Geodetikusok származtatása megmaradó mennyiségekből

A fizikában központi szerepet játszanak a megmaradó mennyiségek. Néhány mennyiségről tapasztalatok, kísérletek útján derült ki, hogy megmarad, ilyen például a tömeg és többféle töltés. Azonban matematikai eszközökkel is lehet megmaradó mennyiségekre hivatkozni bizonyos szimmetriákból [6]. Az általános relativitáselmélet keretein belül is ismertek megmaradó mennyiségek, mint például az impulzus és a perdület [4]. Ezek kiszámítása azonban nehézkes, ugyanis az anyag és a téridő együttes impulzusával illetve perdületével kell számolni.

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy szabadon (geodetikuson) mozgó test esetén léteznek olyan megmaradó mennyiségek, melyeket a test mozgásának kezdeti feltételei egyértelműen meghatároznak. Valamint megmutatom, hogy a geodetikusok származtathatók ezekből a megmaradó mennyiségekből, illetve fordítva, a megmaradó mennyiségek származtathatók a geodetikusokból.

4.2 Tétel. Legyen $H(g_1, g_2, t, r, \varphi)$ a következő mátrix

$$\begin{pmatrix} g_2 + \frac{g_1 \operatorname{ch}(r)^2}{2} & 0 & \frac{(g_1 + 8g_2 + g_1 \operatorname{ch}(2r)) \operatorname{sh}(r)^2}{4\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} \cos(\varphi) \operatorname{sh}(2r) & \sin(\varphi) & -\frac{\cos(\varphi) (\operatorname{ch}(2r) - 2) \operatorname{sh}(2r)}{2} \\ \sqrt{2} \sin(\varphi) \operatorname{sh}(2r) & \cos(\varphi) & \frac{\sin(\varphi) (\operatorname{ch}(2r) - 2) \operatorname{sh}(2r)}{2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor minden g_2, g_1 valós számhoz és minden $t(u), r(u), \varphi(u)$ megoldásához a (6), (7), (8) differenciálegyenlet-rendszernek léteznek olyan c_1, c_2 valós számok

és $f(g_1, g_2)$ valós konstans, amelyre teljesül a

$$H(g_1, g_2, t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dt}{du}(u) \\ \frac{dr}{du}(u) \\ \frac{d\varphi}{du}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(g_1, g_2) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

összefüggés. A továbbiakban $H(g_1, g_2, t(u), r(u), \varphi(u))$ mátrixot impulzusmátrixnak nevezzük.

Bizonyítás. Jelöljük a $\left(\frac{dt}{du}(u), \frac{dr}{du}(u), \frac{d\varphi}{du}(u)\right)$ vektort a továbbiakban a $\dot{\mathbf{v}}(u)$ szimbólummal. Tekintsük a (6), (7), (8) differenciálegyenletrendszer bal oldalát, mint egy vektort, az $\underline{X} = [(8), (7), (6)]$ sorrendben. Ezt szorozzuk be egy $D(t(u), r(u), \varphi(u))$ 3×3 -as invertálható mátrixszal, melynek elemei akárhányszor differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy az így kapott vektor előáll

$$\frac{d}{du} \left(D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \dot{\mathbf{v}}(u) \right)$$

alakban, vagyis

$$D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \underline{X} = \frac{d}{du} \left(D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \dot{\mathbf{v}}(u) \right)$$

teljesül. Ha a D mátrix oszlopvektorait $\underline{d}_1, \underline{d}_2$ és \underline{d}_3 jelöli a fenti egyenlet az

$$\begin{aligned}
& \underline{d}_1 \frac{d^2 t}{d u} + \underline{d}_2 \frac{d^2 r}{d u} + \underline{d}_3 \frac{d^2 \varphi}{d u} + \frac{\partial \underline{d}_1}{\partial t} \left(\frac{d t}{d u} \right)^2 + \frac{\partial \underline{d}_2}{\partial r} \left(\frac{d r}{d u} \right)^2 + \frac{\partial \underline{d}_3}{\partial \varphi} \left(\frac{d \varphi}{d u} \right)^2 + \\
& + \left(\frac{\partial \underline{d}_1}{\partial r} + \frac{\partial \underline{d}_2}{\partial t} \right) \frac{d t}{d u} \frac{d r}{d u} + \left(\frac{\partial \underline{d}_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \underline{d}_3}{\partial t} \right) \frac{d t}{d u} \frac{d \varphi}{d u} + \left(\frac{\partial \underline{d}_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \underline{d}_3}{\partial r} \right) \frac{d \varphi}{d u} \frac{d r}{d u} = \\
& = \underline{d}_1 \frac{d^2 t}{d u} + \underline{d}_2 \frac{d^2 r}{d u} + \underline{d}_3 \frac{d^2 \varphi}{d u} + \left(2\text{sh}(r)\text{ch}(r)^3 - 3\text{sh}(r)\text{ch}(r) \right) \underline{d}_2 \left(\frac{d \varphi}{d u} \right)^2 + \\
& + \left(4 \frac{\text{sh}(r)}{\text{ch}(r)} \underline{d}_1 - \frac{2\sqrt{2}}{\text{sh}(r)\text{ch}(r)} \underline{d}_3 \right) \frac{d t}{d u} \frac{d r}{d u} + 2\sqrt{2}\text{sh}(r)\text{ch}(r) \underline{d}_2 \frac{d t}{d u} \frac{d \varphi}{d u} + \\
& + \left(\left(2\sqrt{2}\text{sh}(r)\text{ch}(r) - 2\sqrt{2} \frac{\text{sh}(r)}{\text{ch}(r)} \right) \underline{d}_1 + \frac{2}{\text{sh}(r)\text{ch}(r)} \underline{d}_3 \right) \frac{d \varphi}{d u} \frac{d r}{d u}
\end{aligned}$$

alakban írható fel. Elemi átalakítások után, a megfelelő együtthatók egyenlővé tételével a következő parciális differenciálegyenletrendszert kapjuk a $(\underline{d}_i)_{i=1,2,3}$ vektorokra.

$$\frac{\partial \underline{d}_1}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \underline{d}_1}{\partial r} = -\frac{\partial \underline{d}_2}{\partial t} - \frac{2\sqrt{2}}{\text{sh}(r)\text{ch}(r)} \underline{d}_3 + 4\underline{d}_1 \text{th}(r) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \underline{d}_1}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \underline{d}_3}{\partial t} + \frac{2\text{sh}(2r)}{\sqrt{2}} \underline{d}_2 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \underline{d}_2}{\partial r} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \underline{d}_2}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \underline{d}_3}{\partial r} + \frac{2}{\text{sh}(r)\text{ch}(r)} \underline{d}_3 + 2\sqrt{2}\text{ch}(r)\text{sh}(r) \underline{d}_1 - 2\sqrt{2} \underline{d}_1 \text{th}(r) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \underline{d}_3}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \underline{d}_2 (\text{ch}(2r) - 2) \text{sh}(2r) \quad (18)$$

Vegyük észre, hogy $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ vektorok minden elemére ugyanaz az egyenletrendszer érvényes, így a továbbiakban csak a vektorok első komponenseivel

foglalkozunk, melyeket röviden csak d_1, d_2 és d_3 szimbólumokkal jelölünk. (Vagyis minden $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén d_i jelöli a \underline{d}_i vektor első komponensét.)

A (13) és (16) egyenletekből látszik, hogy $d_1 = d_1(r, \varphi)$ illetve $d_2 = d_2(t, \varphi)$ alakú. Így (15) egyenlet mindkét oldalát φ , és t szerint deriválva, a (18) egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\text{ch}(2r) - 2}{2} \right) \frac{\partial^2 d_2}{\partial t^2} = \sqrt{2} \frac{\partial^2 d_2}{\partial t \partial \varphi}$$

A fenti képlet mindkét oldalát r szerint deriválva a (16) egyenlet felhasználásával a következő alakot kapjuk a d_2 függvényre.

$$d_2(t, \varphi) = b_1(\varphi)t + b_2(\varphi) \quad (19)$$

A (18) egyenletből következően d_3 a következő alakú.

$$d_3(t, r, \varphi) = \frac{1}{2} \left(t \int b_1(\varphi) d\varphi + \int b_2(\varphi) d\varphi \right) \cdot (\text{ch}(2r) - 2)\text{sh}(2r) + e(r, t)$$

Ezt behelyettesítve a (14) egyenletbe, majd azt t szerint deriválva kapjuk, hogy

$$0 = -2\sqrt{2}(\text{ch}(2r) - 2) \int b_1(\varphi) d\varphi - \frac{2\sqrt{2}}{\text{ch}(r)\text{sh}(r)} \frac{\partial e(r, t)}{\partial t}.$$

Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\int b_1(\varphi) d\varphi = \lambda, \quad \text{és} \quad \frac{1}{(\text{ch}(2r) - 2)\text{ch}(r)\text{sh}(r)} \frac{\partial e(r, t)}{\partial t} = -\lambda$$

teljesül. Ebből következik, hogy $b_1(\varphi) = 0$, azaz $d_2 = b_2(\varphi)$. A d_1, d_2, d_3 függvények így az alábbi alakban állnak elő.

$$d_3 = \frac{1}{2} \left(\int b_2(\varphi) d\varphi \right) (\text{ch}(2r) - 2)\text{sh}(2r) + g(r) \quad (20)$$

$$d_2 = b_2(\varphi) \quad (21)$$

$$d_1 = \sqrt{2}\text{sh}(2r) \int b_2(\varphi) d\varphi + f(r) \quad (22)$$

A (17) egyenletbe a fenti, (20), (21), (22) egyenleteket behelyettesítve kapjuk az

$$\begin{aligned} \frac{d b_2}{d \varphi}(\varphi) = & -\frac{1}{2} \left(\int b_2(\varphi) d \varphi \right) \left(2(\operatorname{ch}(2r) - 2)\operatorname{ch}(2r) + 2\operatorname{sh}(2r)^2 \right) - \frac{d g}{d r}(r) + \\ & + \frac{2}{\operatorname{ch}(r)\operatorname{sh}(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\int b_2(\varphi) d \varphi \right) (\operatorname{ch}(2r) - 2)\operatorname{sh}(2r) + g(r) \right) + \\ & + 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2}\operatorname{sh}(2r) \int b_2(\varphi) d \varphi + f(r) \right) \operatorname{ch}(r)\operatorname{sh}(r) - \\ & - 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2}\operatorname{sh}(2r) \int b_2(\varphi) d \varphi + f(r) \right) \frac{\operatorname{sh}(r)}{\operatorname{ch}(r)}. \end{aligned}$$

Az egyenlet rendezése után kapjuk az

$$\begin{aligned} \frac{d b_2(\varphi)}{d \varphi} + \int b_2(\varphi) d \varphi \left(\operatorname{ch}(2r)^2 - \operatorname{sh}(2r)^2 - 4\operatorname{ch}(2r) + 4\operatorname{sh}(2r)\operatorname{th}(r) + 4 \right) = \\ - \frac{d g(r)}{d r} + \frac{2g(r)}{\operatorname{ch}(r)\operatorname{sh}(r)} + 2\sqrt{2}f(r)\operatorname{ch}(r)\operatorname{sh}(r) - 2\sqrt{2}\operatorname{th}(r)f(r) \end{aligned}$$

összefüggést. Elemi számításokkal belátható, hogy a bal oldalon a $\int b_2(\varphi) d \varphi$ együtthatója 1. Ebből következik, hogy

$$\frac{d b_2(\varphi)}{d \varphi} + \int b_2(\varphi) d \varphi = \alpha$$

fennáll, ahol α valós konstans. Így

$$b_2(\varphi) = k_1 \cos(\varphi) + k_2 \sin(\varphi) \quad (23)$$

teljesül, ahol $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Ennek megfelelően d_1, d_2, d_3 függvények a következőképpen alakulnak.

$$d_1 = \sqrt{2} \left(k_1 \sin(\varphi) - k_2 \cos(\varphi) \right) \operatorname{sh}(2r) + f^*(r) \quad (24)$$

$$d_2 = k_1 \cos(\varphi) + k_2 \sin(\varphi) \quad (25)$$

$$d_3 = \frac{1}{2} \left(k_1 \sin(\varphi) - k_2 \cos(\varphi) \right) \left(\operatorname{ch}(2r) - 2 \right) \operatorname{sh}(2r) + g^*(r) \quad (26)$$

Az így kapott függvényeket helyettesítsük be az eredeti

$$\frac{d}{du} \left(D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \dot{\mathbf{v}}(u) \right)$$

formulába. Vegyük észre, ha feltevésünk igaz, akkor ezt a kifejezést megszorozva a D^{-1} mátrixszal, akkor annak pontosan a (6), (7), (8) differenciálegyenletek bal oldalát kell, hogy adja megfelelő sorrendben, ezért $f^*(r)$ és $g^*(r)$ függvényekre a következő differenciálegyenletrendszert kapjuk.

$$\frac{-4\sqrt{2}\text{cth}(2r)g^*(r) + (\text{ch}(2r) - 2)\frac{df^*}{dr}(r)}{2\sqrt{2}g^*(r) - (\text{ch}(2r) - 2)f^*(r)} = -4\text{th}(r) \quad (27)$$

$$-2\frac{(1 + 2\text{ch}(2r) - \text{ch}(4r))f^*(r) + \sqrt{2}\text{sh}(2r)\frac{dg^*}{dr}(r)}{\text{sh}(2r)(2\sqrt{2}g^*(r) - (\text{ch}(2r) - 2)f^*(r))} = \frac{-4}{\text{sh}(2r)} \quad (28)$$

Ebből elemi átalakításokkal kapjuk az

$$\begin{aligned} \frac{df^*}{dr}(r) &= \frac{-4\sqrt{2}g^*(r)}{\text{sh}(2r)} + 4f^*(r)\text{th}(r) \\ \frac{dg^*}{dr}(r) &= \frac{4(g^*(r) + \sqrt{2}f^*(r)\text{sh}(r)^4)}{\text{sh}(2r)} \end{aligned}$$

összefüggéseket. Az első egyenletből kifejezve $g^*(r)$ függvényt és behelyettesítve a második egyenletébe, elemi átalakítások során kapjuk az

$$2\text{ch}(2r)\frac{df^*}{dr}(r) = \text{sh}(2r)\frac{d^2f^*}{dr^2}(r)$$

egyenletet, amelynek a megoldása

$$f^*(r) = g_2 + \frac{1}{2}g_1\text{ch}(r)^2. \quad (29)$$

Itt $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$. Ennek megfelelően

$$g^*(r) = \frac{(g_1 + 8g_2 + g_1\text{ch}(2r))\text{sh}(r)^2}{4\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Ennek megfelelően a D mátrix oszlopvektorai a következők lesznek

$$\underline{d}_1 = \sqrt{2}(\underline{k}_1 \sin(\varphi) - \underline{k}_2 \cos(\varphi))\text{sh}(2r) + \underline{1}(g_2 + \frac{1}{2}g_1\text{ch}(r)^2) \quad (31)$$

$$\underline{d}_2 = \underline{k}_1 \cos(\varphi) + \underline{k}_2 \sin(\varphi) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \underline{d}_3 = \frac{1}{2}(\underline{k}_1 \sin(\varphi) - \underline{k}_2 \cos(\varphi))(\text{ch}(2r) - 2)\text{sh}(2r) + \\ + \underline{1} \frac{(g_1 + 8g_2 + g_1\text{ch}(2r))\text{sh}(r)^2}{4\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (33)$$

ahol $\underline{1}$ az a vektor, amelynek minden eleme 1 és $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{1}$ vektorok lineárisan függetlenek, mivel feltettük, hogy D invertálható. Ennek megfelelően a D mátrixot beszorozva balról annak a mátrixnak az inverzével, melynek oszlopai $[\underline{1}, \underline{k}_2, \underline{k}_1]$ kapjuk a $H(g_1, g_2, t, r, \varphi)$ mátrixot, ezzel a tételt beláttuk. \square

A következőkben numerikus vizsgálat alá vetem a fenti tétel állítását. Megmutatom, hogy a differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásának hibahatárán belül marad a kifejezés két oldalának eltérése. A fenti összefüggésben elegendő a g_1, g_2 konstansokat két lineárisan független vektor elemeiként megválasztani, hiszen azokból már bármely más konstansok is előállíthatók; mivel könnyen ellenőrizhető, hogy

$$f(g_1, g_2) + f(h_1, h_2) = f(g_1 + h_1, g_2 + h_2)$$

teljesül minden $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ paraméterre. Így speciálisan tekintsük a $H(0, 1, t, r, \varphi)$ és $H\left(1, -\frac{1}{4}, t, r, \varphi\right)$ mátrixokat.

A tételben előforduló egyenlet kifejtve a következőképpen alakul.

$$\frac{dt(u)}{du} + \sqrt{2}\text{sh}(r(u))^2 \frac{d\varphi(u)}{du} = f(0, 1) \quad (34)$$

$$\frac{\text{ch}(2r(u))}{4} \frac{dt(u)}{du} + \frac{\text{sh}(r(u))^4}{2\sqrt{2}} \frac{d\varphi(u)}{du} = f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2} \cos(\varphi(u))\text{sh}(2r(u)) \frac{dt}{du}(u) + \sin(\varphi(u)) \frac{dr}{du}(u) - \\ & - \frac{\cos(\varphi(u))(\text{ch}(2r(u)) - 2)\text{sh}(2r(u))}{2} \frac{d\varphi}{du}(u) = c_1 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sin(\varphi(u))\text{sh}(2r(u)) \frac{dt}{du}(u) + \cos(\varphi(u)) \frac{dr}{du}(u) + \\ & + \frac{\sin(\varphi(u))(\text{ch}(2r(u)) - 2)\text{sh}(2r(u))}{2} \frac{d\varphi}{du}(u) = c_2 \end{aligned} \quad (37)$$

A *Maple* programcsomag *dsolve* programjának *dverk78* módszerével beállítható az abszolút és relatív hiba. Tekintsük az abszolút és a relatív hibát most 10^{-8} nagyságúnak. A következő táblázatban a fenti egyenletek numerikus megoldásának maximális eltérését adjuk meg a $[0, 2]$ intervallumon a kezdeti értékekben felvettektől.

$r(0)$	$r'(0)$	$t'(0)$	$j'(0)$	(34) hiba	(35) hiba	(36) hiba	(37) hiba
1.33	0.78	0.81	0.56	$0.5 \cdot 10^{-8}$	$0.5 \cdot 10^{-8}$	$0.4 \cdot 10^{-7}$	$0.54 \cdot 10^{-8}$
1.14	-0.21	0.26	-1.37	$0.7 \cdot 10^{-8}$	$0.6 \cdot 10^{-8}$	$0.25 \cdot 10^{-7}$	$0.42 \cdot 10^{-8}$
0.5	-0.97	0.67	0.14	$0.25 \cdot 10^{-8}$	$0.129 \cdot 10^{-8}$	$0.726 \cdot 10^{-8}$	$0.3 \cdot 10^{-7}$
0.68	-1.05	0.97	-0.34	$0.2 \cdot 10^{-8}$	$0.13 \cdot 10^{-8}$	$0.64 \cdot 10^{-7}$	$0.4 \cdot 10^{-7}$
0.1	1.43	1.29	-0.37	$0.4 \cdot 10^{-8}$	$0.19 \cdot 10^{-8}$	$0.38 \cdot 10^{-8}$	$0.8 \cdot 10^{-8}$
0.84	-0.56	1.36	1.11	$0.2 \cdot 10^{-8}$	$0.2 \cdot 10^{-8}$	$0.8 \cdot 10^{-8}$	$0.28 \cdot 10^{-8}$
0.62	0.96	0.3	-0.69	$0.7 \cdot 10^{-9}$	$0.417 \cdot 10^{-9}$	$0.2613 \cdot 10^{-6}$	$0.6 \cdot 10^{-7}$
1.26	0.13	0.75	0.37	$0.3 \cdot 10^{-8}$	$0.3 \cdot 10^{-8}$	$0.2 \cdot 10^{-7}$	$0.2 \cdot 10^{-8}$
0.29	0.32	1.26	0.67	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.15 \cdot 10^{-8}$	$0.6 \cdot 10^{-9}$
0.11	-0.52	1.23	-0.03	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.11 \cdot 10^{-8}$
1.28	-0.31	0.67	-0.58	$0.4 \cdot 10^{-8}$	$0.26 \cdot 10^{-8}$	$0.16 \cdot 10^{-7}$	$0.6 \cdot 10^{-8}$
0.14	-0.82	1.4	-0.52	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.2 \cdot 10^{-8}$	$0.17 \cdot 10^{-8}$	$0.19 \cdot 10^{-8}$
0.35	0.92	0.02	0.43	$0.42 \cdot 10^{-9}$	$0.2177 \cdot 10^{-9}$	$0.532 \cdot 10^{-7}$	$0.1 \cdot 10^{-7}$
1.24	0.79	0.69	1.25	$0.8 \cdot 10^{-8}$	$0.8 \cdot 10^{-8}$	$0.5 \cdot 10^{-7}$	$0.8 \cdot 10^{-8}$
0.15	-1.17	1.49	0.14	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.15 \cdot 10^{-8}$	$0.3 \cdot 10^{-8}$
0.3	0.45	0.35	0.97	$0.9 \cdot 10^{-9}$	$0.6 \cdot 10^{-9}$	$0.105 \cdot 10^{-8}$	$0.28 \cdot 10^{-8}$
0.41	0.69	1.49	-0.08	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.4 \cdot 10^{-8}$	$0.19 \cdot 10^{-8}$
0.7	-0.2	1.41	1.48	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.2 \cdot 10^{-8}$	$0.6 \cdot 10^{-9}$	$0.4 \cdot 10^{-9}$
0.2	0.17	1.14	-1.06	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.12 \cdot 10^{-8}$	$0.4 \cdot 10^{-9}$
0.36	-0.84	1.31	-1.08	$0.2 \cdot 10^{-8}$	$0.1 \cdot 10^{-8}$	$0.3 \cdot 10^{-8}$	$0.18 \cdot 10^{-8}$

1. Táblázat: *A megmaradó mennyiségek numerikus hibája*

A táblázatból leolvasható, hogy a maximális hiba a $[0, 2]$ intervallumon a hetedik sorban felírt (36) egyenlet hibájának kivételével minden érték a határon belül marad, és az eltérés ott is csak egy tizedesjeggyel több. Így ennek megfelelően a numerikus vizsgálat során is igazolást nyert a tétel állítása.

4.4 Néhány egyszerű következmény

A fenti (34), (35) egyenleteket $\frac{dt(u)}{du}$, $\frac{d\varphi(u)}{du}$ függvényekre megoldva, mint lineáris egyenletrendszer kapjuk, hogy ezen függvények csak $r(u)$ -től illetve a kezdeti feltételekől függenek és a következőképpen alakulnak

$$\frac{dt(u)}{du} = \frac{4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\operatorname{ch}(r(u))^2} - f(0, 1)\operatorname{th}(r(u))^2 \quad (38)$$

$$\frac{d\varphi(u)}{du} = 2\sqrt{2} \frac{f(0, 1)\operatorname{ch}(2r(u)) - 4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\operatorname{sh}(2r(u))^2} . \quad (39)$$

Így $\frac{dt(u)}{du} \leq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $4f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \leq f(0, 1)\text{sh}(r(u))^2$.

Ennek egy egyszerű következménye, hogy $\frac{dt(u)}{du} \leq 0$ minden u -ra, ha $f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \leq 0$ és $f(0, 1) \geq 0$, illetve $\frac{dt(u)}{du} \geq 0$ minden u -ra, ha $f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \geq 0$ és $f(0, 1) \leq 0$.

Másik érdekes megállapítás, hogy $\frac{dr(u)}{du}$ függvény korlátos minden kezdeti érték megválasztása esetén. Tekintsük ugyanis a H mátrix inverzét, aminek az elemei az alábbiak.

$$\begin{aligned} (H^{-1})_{11} &= \frac{8 - 4\text{ch}(2r(u))}{g_1 + (g_1 + 4g_2)\text{ch}(2r(u))} \\ (H^{-1})_{12} &= \frac{-\cos(\varphi(u))(g_1 + 8g_2 + g_1\text{ch}(2r(u)))\text{th}(r(u))}{\sqrt{2}(g_1 + (g_1 + 4g_2)\text{ch}(2r(u)))} \\ (H^{-1})_{13} &= \frac{\sin(\varphi(u))(g_1 + 8g_2 + g_1\text{ch}(2r(u)))\text{th}(r(u))}{\sqrt{2}(g_1 + (g_1 + 4g_2)\text{ch}(2r(u)))} \\ (H^{-1})_{21} &= 0 \\ (H^{-1})_{22} &= \sin(\varphi(u)) \\ (H^{-1})_{23} &= \cos(\varphi(u)) \\ (H^{-1})_{31} &= \frac{8\sqrt{2}}{g_1 + (g_1 + 4g_2)\text{ch}(2r(u))} \\ (H^{-1})_{32} &= \frac{2\cos(\varphi(u))(g_1 + 8g_2 + g_1\text{ch}(2r(u)))}{(g_1 + (g_1 + 4g_2)\text{ch}(2r(u)))\text{sh}(2r(u))} \\ (H^{-1})_{33} &= \frac{-2\sin(\varphi(u))(g_1 + 8g_2 + g_1\text{ch}(2r(u)))}{(g_1 + (g_1 + 4g_2)\text{ch}(2r(u)))\text{sh}(2r(u))} \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{dr(u)}{du} = c_1 \sin(\varphi(u)) + c_2 \cos(\varphi(u)) \quad (40)$$

Azaz $\frac{dr(u)}{du}$ korlátos és $\left| \frac{dr(u)}{du} \right| \leq |c_1| + |c_2|$ minden u -ra.

A $\varphi(u)$ és $r(u)$ függvények között is felírhatunk egy összefüggést, ugyanis (39) és (40) egyenletek miatt

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c_1 \sin(\varphi) + c_2 \cos(\varphi)}{2\sqrt{2} \cdot \frac{f(0,1)\operatorname{ch}(2r) - 4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\operatorname{sh}(2r)^2}}.$$

Azaz

$$c_2 \sin(\varphi(u)) - c_1 \cos(\varphi(u)) = \frac{\sqrt{2} \left(4f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \operatorname{ch}(2r(u)) - f(0,1) \right)}{\operatorname{sh}(2r(u))} + m$$

minden u -ra a geodetikuson valamely m valós konstanssal.

5 Konklúzió

Példát mutattam olyan normált, időszerű görbére, mely térkoordinátaiban zárt, illetve azon időutazás történik. A geodetikusok vizsgálata során a görbét alkotó függvények paritására vonatkozóan mondtam ki tételt, bizonyos kezdeti feltételek fennállása esetén illetve megmutattam, hogy más kezdeti feltételek esetén nem tudunk ennél többet állítani. A geodetikusok differenciálegyenlet-rendszerének felírtam egy megoldását, amelyen a részecske az univerzum középpontja körül körpályán kering. Illetve olyan geodetikusra mutattam példát numerikus eszközökkel, amely jó közelítéssel zártnak mondható térkoordinátaiban, és időutazást hajt végre a rajta haladó részecske. Ehhez hasonló görbe eddig nem volt ismeretes.

Továbbá a dolgozatban tárgyaltam a Gödel univerzum megmaradó mennyiségeit, amelyek származtathatóak a geodetikusok differenciálegyenlet-rendszeréből, és fordítva. Ismert általános képlet a megmaradó mennyiségek kiszámítására, ennek használata azonban nehézkes. Levezettem ezen mennyiségek egyenletét analitikus eszközökkel, illetve numerikusan is alátámasztottam. Ezek explicit képlete eddig szintén nem volt ismert. Sok egyéb következménnyel is szolgálhatnak, amelyeket a dolgozatban nem taglaltam. A Gödel univerzum egyik csodája pontosan a benne rejlő, a mi világunkban paradoxnak tűnő jelenségek sokasága, amelyek megértéséhez esetleg közelebb vihet ez a dolgozat. A geodetikusokra illetve az időutazásra kapott eredmények összhangban vannak a [2]-ben és [1]-ben leírtakkal.

Hivatkozások

- [1] Chandrasekhar, S., Wright, J. P.: *The geodesics in Gödel's universe*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, 1961, 341–347.
- [2] Hajnal A., Madarász J., Németi I.: *Visualizing some ideas about Gödel-type rotating universes*, preprint 2002.
- [3] Hraskó Péter: *Bevezetés az általános relativitáselméletbe*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997.
- [4] Landau, L. D., Lifsic, I. M.: *Elméleti fizika II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [5] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.
- [6] Szenthe J.: *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.
- [7] Szenthe J.: *A Riemann geometria elemei*, mondAt Kft, Budapest, 1998.