Sztochasztikus folyamatok
10. feladatsor, 2016. április 28.

1. Egy autójavító műhelyben két állás van és egy parkolóhely. Egy autó javítási ideje 2 paraméterű exponenciális eloszlású időt vesz igénybe. A javítandó autók 3 paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. Az az autós, aki nem tud beállni az állások egyikére vagy a parkolóba, rögtön továbbhajt.

   (a) Írja fel a Markov-lánc infinitezimális generátorát!

   (b) Az érkező autóknak hány százalékával tudnak foglalkozni a műhelyben?

   (c) Egy autó javítása átlagosan 10000Ft-ba kerül. Mennyi a műhely bevételének várható értéke egy 8 órás műszakban?

   (d) Írja fel a beágyazott (embedded) Markov lánc átmenetmátrixát!

   (e) Azon állás szerelője, ahol nincs autó, kávézni megy. Ha most mindkét álláson állnak autók, de a parkoló üres, akkor mekkora valószínűséggel tud mindkét szerelő hamarabb elmenni kávézni, mint valaki beállna a parkolóba?

   (f) Várhatóan mennyi idő telik el, amíg mindkét állás szerelője el tud menni kávézni, ha most minden állás és parkoló tele van?

   (g) Kisebb beruházás után a parkolóhelyek számát megnövelték végtelenre. Mi lesz a műhelyben lévő autók eloszlása a stacionárius állapotban?

Házi feladatok

9. feladatsor, beadási határidő: 2016. május 5.

1. Egy cég telefonos ügyfélszolgálatán két ember fogadja a hívásokat egy-egy telefonon. Tegyük fel, hogy az i-edik telefonra beérkező hívások λ_i paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek, és az i-edik ügyintéző μ_i paraméterű exponenciális eloszlású ideig telefonál egy ügyféllel, $i = 1, 2$, és a beérkező hívások idejei és a telefonálási idők mind függetlenek.
   (a) Modellezzük Markov lánccal azt, hogy melyik telefon foglalt t-kor, feltéve, hogy $t = 0$-kor éppen semelyik telefon sem foglalt.
   (b) Határozzuk meg a lánc stacionárius eloszlását!
   (c) Tegyük fel hogy a cég fejleszti a telefonos rendszerét úgy, hogy ha valaki olyan telefont hív, ami foglalt, akkor a rendszer azonnal átirányítja a hívást a másik telefonra, és ha az is foglalt, csak akkor jelez foglaltat. Mi lesz a stacionárius eloszlás ebben az esetben?

2. Egy sorban állási modellben egy kiszolgáló van, aki μ rátával szolgál ki. Új sorban állók λ rátával érkeznek. A sorban állók azonban türelmetlenek: azok, akik várnak (és éppen nem őket szolgálják ki) néha úgy döntenek, hogy elhagyják a sort és haza mennek. Mindezt a sorban elfoglalt helyüktől függetlenül ρ rátával teszik. Határozzuk meg a sorban állók számának eloszlását a stacionárius állapotban abban az esetben, amikor $\rho = \mu$!

3. Egy sorban állási modellben egy kiszolgáló van, aki μ rátával szolgál ki. Új sorban állók λ rátával érkeznek. Az új érkezők, ha n hosszú sort látnak maguk előtt, akkor $1/(n+1)$ valséggel maradnak, $n/(n+1)$ valószínűséggel úgy döntenek, hogy hazamennek és nem jönnek többé vissza. Határozzuk meg a sorban állók számának eloszlását a stacionárius állapotban!

4. Egy napos napon három béka egy pocsolyánál játszik. Ha valamelyikük a szárazon van, akkor a többiektől függetlenül 1 rátával beugrik a pocsolyába, hogy hűsítse magát. Ha pedig a pocsolyában van, akkor a többiektől függetlenül kiugrik a szárazra 2 rátával, hogy egy kicsit megmelegedjen. Jelölje X_t a t-kor a pocsolyában lévő békák számát. Határozzuk meg X_t stacionárius eloszlását kétféleképpen:
   (a) a detailed balance condition felhasználásával, az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapottéren értelmezett infinitezimális generátor segítségével, és
   (b) úgy, hogy észrevesszük, hogy a három béka egymástól függetlenül azonos eloszlású Markov lánc szerint mozog az $\widehat{S} = \{0, 1\}$ kétállapotú állapot téren.

   Most figyeljük csak az első békát, Ubult, és tegyük fel, hogy 0-kor a pocsolyában van.
   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy t-kor is a pocsolyában lesz?

5. Tekintsünk egy születési halálozási folyamatot a következõ rátákkal: $n > 0$ egyed esetén $\lambda_n = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}$ rátával új egyed születik, $\mu_n = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}$ rátával meghal egy egyed, továbbá $\lambda_0 = 1$ és $\mu_0 = 0$. Bizonyítsuk be, hogy a lánc pozitív rekurrens ha $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$!

6. Benjámin kapcsolata Angélával a **M**ámoros, **C**ivakodó, **Z**avaros és **V**álságos állapotok között váltakozik a következő átmenetráták szerint

$$\begin{array}{ccccc} & M & C & Z & V \\ M & -4 & 3 & 1 & 0 \\ C & 4 & -6 & 2 & 0 \\ Z & 2 & 3 & -6 & 1 \\ V & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}$$

   (a) Hosszú távon mennyi időt tölt Benjámin az egyes állapotokban? Teljesíti-e a lánc a detailed balance feltételt?

   (b) Írja fel a lánchoz tartozó beágyazott (embedded) diszkrét idejű Markov láncot!

   (c) Ha most Benjámin kapcsolata Mámoros Angélával, akkor várhatóan mennyi idő múlva lesz válságos?

   (d) Ha most Benjámin kapcsolata Angélávol Zavaros, akkor mekkora valószínűséggel lesz előbb Mámoros, mint Válságos?