Sztochasztikus folyamatok
11. feladatsor, 2016. május 5.

1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n < t\}$ felújítási folyamat.
   (a) Adja meg S_2 sűrűségfüggvényét!
   (b) Határozza meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \ldots$ -ra $\mathbb{P}(N(t) = k)$ értékét!
   (c) Határozza meg az $N(t)$ folyamathoz tartozó felújítási függvényt!
   (d) Határozza meg, hogy a t időpillanat után várhatóan mikor következik be esemény!
2. Tekintsünk egy $N(t)$ felújítási folyamatot, melyben az egymásután következő események közötti idő $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ várható értéke μ. Tegyük fel, hogy az i-edik esemény bekövetkezésekor valamilyen (véletlen) R_i jutalmat kapunk, melynek várható értéke ρ, ahol $\{(R_i, X_i)\}$ i.i.d. valószínűségi változók, de R_i függhet X_i-től. Bizonyítsuk be, hogy
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} R_i}{t} = \frac{\rho}{\mu}.$$
3. Legyenek $\{X_i\}$ és $\{U_i\}$ i.i.d. valószínűségi változók. Az eloszlás függvényeik F, G és várhatóértékük μ_F, μ_G ebben a sorrendben. Az alternáló felújítási folyamatnak két állapota van. A folyamat az i-edik ciklusban először X_i időt tölt az 1-es állapotban majd azután U_i időt tölt a 2-es állapotban és ezt ismétli. Bizonyítsuk be, hogy amint $t \to \infty$, az 1-es állapotban töltött idő aránya tart a $\mu_F/(\mu_F + \mu_G)$ határértékhez.
4. Egy izzó F eloszlásfüggvényű, μ_F várható értékű ideig ég, majd kialszik. A gondok λ paraméterű Poisson folyamat szerint ellenőrzi a villanykörtét, s kicseréli ha az kiégett.
   (a) Milyen rátával cserél villanykörtét?
   (b) Az idő hanyad részében ég az izzó?

Házi feladatok

10. feladatsor, beadási határidő: 2016. május 12.

1. Van két kutya (egy vizsla és egy labrador), és közöttük ide-oda ugrál négy bolha. Minden bolha a többitől függetlenül λ rátával ugrik át az egyik kutyáról a másikra. Kezdetben a vizslán van mind a négy bolha.

   (a) Modellezze a folyamatot kétféleképpen, egy folytonos idejű Markov lánccal és egy diszkrét idejű Markov lánc valamint egy Poisson folyamat segítségével. Mi a kettő között az összefüggés?

   (b) Határozza meg a t időpontban a vizslán levő bolhák számának eloszlását! (Mathematicát, Maple-t használni szabad.)

2. Egy villamos elindulási időpontja egyenletes a $[0, t]$ intervallumon. Az utasok ettől független, λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek. Számítsa ki a villamosra felszálló utasok számának várható értékét, szórásnégyzetét!

3. Egy kokain díler álldogál az utcasarkon. A vevői egy λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. A díler a vevővel visszavonul egy biztonságos helyre, ahol UNI(0,λ) idő alatt lebonyolítják a tranzakciót. Azok a vevők, akik ezen idő alatt érkeznek a sarokra továbbállnak és nem térnek vissza.

   (a) Milyen rátával köt üzletet a díler? (Azaz, ha $N(t)$ a t-ideig megkötött üzletek száma, akkor mennyi $\lim_{t\to\infty} N(t)/t$?)

   (b) Az ügyfelek hány százalékát veszti el?

4. Egy adott városban ha elkezd esni az eső akkor POI(1/2) napig esik egyfolytában, majd ha megáll az eső, akkor GEO(1/7) napig nem esik. Tegyük fel, hogy az esős és nem esős periódusok hossza függtelen egymástól. Kérdés a napok hányad része esős nagyon hosszú távon?

5.+6. Tekintsük azt a felújítási folyamatot, amelyben az inter arrival time-ok UNI$[0, 1]$ (vagyis a $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású) függetelen valószínűségi változók.

   (a) Határozzuk meg az $M(t)$ felújítási függvényt ebben az esetben $t \in [0, 1]$-re. (Tipp: Igazoljuk, az $M(t)$-re vonatkozó felújítási egyenletből, hogy $M'(t) = 1 + M(t)$ és $M(0) = 0$.)

   (b) Várhatóan hány darab UNI[0,1] független valószínűségi változót kell összeadni, ahhoz, hogy az összeg éppen átlépje az egyet? Azaz

   $$\mathbb{E}(\min\{n \geq 1 : X_1 + \cdots + X_n \geq 1\}) =?$$

   (c) Határozzuk meg az $M(t)$ felújítási függvényt ebben az esetben $t \in [1, 2]$-re. (Tipp: Hasonlóan (a) ponthoz, írjunk fel $M(t)$-re differenciálegyenletet a vonatkozó felújítási egyenletből az $[1, 2]$ intervallumon!

Sztochasztikus folyamatok

11. feladatsor, 2016. május 5.

1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n < t\}$ felújítási folyamat.
   (a) Adja meg S_2 sűrűségfüggvényét!
   (b) Határozza meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \ldots$ -ra $\mathbb{P}(N(t) = k)$ értékét!
   (c) Határozza meg az $N(t)$ folyamathoz tartozó felújítási függvényt!
   (d) Határozza meg, hogy a t időpillanat után várhatóan mikor következik be esemény!

2. Tekintsünk egy $N(t)$ felújítási folyamatot, melyben az egymásután következő események közötti idő $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ várható értéke μ. Tegyük fel, hogy az i-edik esemény bekövetkezésekor valamilyen (véletlen) R_i jutalmat kapunk, melynek várható értéke ρ, ahol $\{(R_i, X_i)\}$ i.i.d. valószínűségi változók, de R_i függhet X_i-től. Bizonyítsuk be, hogy
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} R_i}{t} = \frac{\rho}{\mu}.$$

3. Legyenek $\{X_i\}$ és $\{U_i\}$ i.i.d. valószínűségi változók. Az eloszlás függvényeik F, G és várhatóértékük μ_F, μ_G ebben a sorrendben. Az alternáló felújítási folyamatnak két állapota van. A folyamat az i-edik ciklusban először X_i időt tölt az 1-es állapotban majd azután U_i időt tölt a 2-es állapotban és ezt ismétli. Bizonyítsuk be, hogy amint $t \to \infty$, az 1-es állapotban töltött idő aránya tart a $\mu_F/(\mu_F + \mu_G)$ határértékhez.

4. Egy izzó F eloszlásfüggvényű, μ_F várható értékű ideig ég, majd kialszik. A gondok λ paraméterű Poisson folyamat szerint ellenőrzi a villanykörtét, s kicseréli ha az kiégett.
   (a) Milyen rátával cserél villanykörtét?
   (b) Az idő hanyad részében ég az izzó?

Házi feladatok

10. feladatsor, beadási határidő: 2016. május 12.

1. Van két kutya (egy vizsla és egy labrador), és közöttük ide-oda ugrál négy bolha. Minden bolha a többitől függetlenül λ rátával ugrik át az egyik kutyáról a másikra. Kezdetben a vizslán van mind a négy bolha.

   (a) Modellezze a folyamatot kétféleképpen, egy folytonos idejű Markov lánccal és egy diszkrét idejű Markov lánc valamint egy Poisson folyamat segítségével. Mi a kettő között az összefüggés?

   (b) Határozza meg a t időpontban a vizslán levő bolhák számának eloszlását! (Mathematicát, Maple-t használni szabad.)

2. Egy villamos elindulási időpontja egyenletes a $[0, t]$ intervallumon. Az utasok ettől független, λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek. Számítsa ki a villamosra felszálló utasok számának várható értékét, szórásnégyzetét!

3. Egy kokain díler álldogál az utcasarkon. A vevői egy λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. A díler a vevővel visszavonul egy biztonságos helyre, ahol UNI$(0,\lambda)$ idő alatt lebonyolítják a tranzakciót. Azok a vevők, akik ezen idő alatt érkeznek a sarokra továbbállnak és nem térnek vissza.

   (a) Milyen rátával köt üzletet a díler? (Azaz, ha $N(t)$ a t-ideig megkötött üzletek száma, akkor mennyi $\lim_{t\to\infty} N(t)/t$?)

   (b) Az ügyfelek hány százalékát veszti el?

4. Egy adott városban ha elkezd esni az eső akkor POI$(1/2)$ napig esik egyfolytában, majd ha megáll az eső, akkor GEO$(1/7)$ napig nem esik. Tegyük fel, hogy az esős és nem esős periódusok hossza függtelen egymástól. Kérdés a napok hányad része esős nagyon hosszú távon?

5.+6. Tekintsük azt a felújítási folyamatot, amelyben az inter arrival time-ok UNI$[0, 1]$ (vagyis a $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású) függetelen valószínűségi változók.

   (a) Határozzuk meg az $M(t)$ felújítási függvényt ebben az esetben $t \in [0, 1]$-re. (Tipp: Igazoljuk, az $M(t)$-re vonatkozó felújítási egyenletből, hogy $M'(t) = 1 + M(t)$ és $M(0) = 0$.)

   (b) Várhatóan hány darab UNI[0,1] független valószínűségi változót kell összeadni, ahhoz, hogy az összeg éppen átlépje az egyet? Azaz

   $$\mathbb{E}(\min\{n \geq 1 : X_1 + \cdots + X_n \geq 1\}) =?$$

   (c) Határozzuk meg az $M(t)$ felújítási függvényt ebben az esetben $t \in [1, 2]$-re. (Tipp: Hasonlóan (a) ponthoz, írjunk fel $M(t)$-re differenciálegyenletet a vonatkozó felújítási egyenletből az $[1, 2]$ intervallumon!