Házi feladatok

10+1. feladatsor, beadási határidő: 2016. május 19.

1. Két kockával dobunk. Legyen X az egyik kocka eredménye, Z pedig a kettő összege. Számolja ki $\mathbb{E}(X|Z)$-t.

2. Legyen Y mérhető a $\mathcal{G}$ szigma-algebra szerint. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq Y \iff \forall A \in \mathcal{G}\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) \geq \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y)$$

3. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov lánc a véges S állapottéren, aminek az átmenetmátrixa P. Legyen $f : S \mapsto \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}(f(X_n)|\sigma(X_1, \ldots; X_{n-1})) =?$$

4. Minden konvex $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez és minden $x_0 \in \mathbb{R}$-hez van olyan $a, b \in \mathbb{R}$, hogy minden x-re $ax + b \leq f(x)$, és $f(x_0) = ax_0 + b$ (például $b = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ megteszi). Ennek segítségével lássa be a feltételes várhatóérték Jensen-egyenlőtlenségét:

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{F}) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

5. Legyen X_i, $i = 1, 2, \ldots$ véges várhatóértékű valószínűségi változók sorozata adaptált az $\{\mathcal{F}\}_{n=1}^{\infty}$, filtrációra nézve, ahol $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Bizonyítandó, hogy a

$$M_0 := 0,\ M_n := \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$$

valószínűségi változó sorozat nulla várhatóértékű martingál.

6. Egy urnában piros és kék golyók vannak. Kezdetben egy-egy mindkét színből. Minden egyes $n \in \mathbb{N}$ diszkrét időpontban kihúzunk egy véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztott golyót az urnából, majd visszatesszük a kihúzottat és még egy ezzel azonos színű golyót is beteszünk az urnába. Így az n-edik menet után $n + 2$ golyó lesz az urnában. Jelöljük β_n-nel, illetve ρ_n-nel az első n húzás során kihúzott piros, illetve kék golyók számát. ($\beta_0 = \rho_0 = 0$ és $\beta_n + \rho_n = n$. Az n-edik húzás után β_{n+1}, illetve ρ_{n+1} piros, illetve kék golyó van az urnában.) A folyamat természetes filtrációja legyen $\mathcal{F}_n$. Legyen $M_n := (\beta_n + 1)/(n + 2)$ az urnában lévő kék golyók aránya az n-edik menet után.

   (a) Bizonyítsa be, hogy M_n martingál!

   (b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{P}(\beta_n = k) = 1/(n + 1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Azaz a piros/kék golyók száma minden egyes lépés után egyenletes eloszlású.

   (c) A martingál konvergencia tételből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n =: M_\infty$ egy valószínűséggel létezik. Milyen eloszlású M_∞?