Sztochasztikus folyamatok
1. feladatsor, 2016. március 3.

1. *Ehrenfest lánc.* Adott két urna (egy jobb és egy bal), melyekben összesen N golyó van. Véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztjuk valamelyik golyót, s átteszünk a másik urnába. Hogy érdemes Markov lánccal modellezni a fenti folyamatot? Mi lesz az átmenetmátrixa?

2. Legyen X_n egy család szociális osztálya az n-dik generációban. Tegyük fel, hogy a szociális osztály változásai a következő Markov átmenetmátrix által adottak.

	alsó	**közép**	**felső**
alsó	0.7	0.2	0.1
közép	0.3	0.5	0.2
felső	0.2	0.4	0.4

   (a) Ha valaki szülei középosztálybeliek, mekkora valséggel lesz ő felső, gyerekei alsó osztálybeliek?
   (b) Ha a nagyszülők felső osztálybeliek, mekkora valséggel lesznek az unokák középosztálybeliek?
   (c) Ha az első generációban az osztályok $(0.6, 0.3, 0.1)$ arányban oszlanak meg, milyen lesz az eloszlás a második generációban?
   (d) Létezik-e olyan kezdeti eloszlás, amely nem változik a generációk során?

3. Legyenek $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású (i.i.d.) valószínűségi változók, úgy hogy $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = 1/2$. Markov-láncot alkot-e az $X_n = Y_n + Y_{n-1}$ sztochasztikus folyamat?

4. Legyen X_t, $t = 1, 2, \ldots$ Markov-lánc, melynek állapottere S véges halmaz. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az S állapotok részhalmazai. Következik-e a Markov tulajdonságból, hogy
$$\mathbb{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_1 \in A_1) = \mathbb{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1})?$$

5. Osztályozza az alábbi Markov-lánc állapotait!
$$\mathcal{S}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Házi feladatok

1. feladatsor, beadási határidő: 2016. március 10.

1. Legyen X_n egy olyan elágazó folyamat, amelyben az egyes egyedek leszármazottainak száma geometriai eloszlású, azaz $\mathbb{P}(Y = k) = q^k p$, ahol $q + p = 1$. Igazolja, hogy X_n átmenetmátrixának elemei
$$P_{i,j} = \begin{cases} \binom{i+j-1}{j} p^i q^j & \text{ha } i \geq 1, j \geq 0, \\ 1 & \text{ha } i = 0, j = 0, \\ 0 & \text{ha } i = 0, j \geq 1. \end{cases}$$

2. Két urnában vannak golyóink: N darab mindkettőben. A golyók közül N kék és N piros. A golyókat a következőképpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek eloszlása igen.) Írjuk le a folyamat S állapotterét és P átmenet mátrixát!

3. Legyen X_n egy homogén, diszkrét idejű Markov-lánc, $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ állapottérrel és
$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 7/11 \end{pmatrix}$$
átmenetmátrixszal, valamint μ_0 kezdeti eloszlással. Legyen továbbá
$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_n = 1, \\ 2 & \text{ha } X_n \neq 1. \end{cases}$$
Igazolja, hogy Y_n Markov-láncot alkot, s írja fel az átmenetmátrixát!

4. Legyen $X_0, X_1, \ldots$ homogén, diszkrét idejű Markov-lánc az S véges állapottéren, P átmenetmátrixszal. Legyen $\varphi : S \mapsto \widehat{S}$, nem feltétlenül injektív leképezés. Milyen feltételnek kell P-nek eleget tenni, hogy $Y_n = \varphi(X_n)$ is Markov-lánc legyen? Adja meg $\{Y_n\}$ átmenetmátrixát! (Hint: nézzük meg az előző feladatot!)

5. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = p = 1 - \mathbb{P}(\xi_i = 1)$ eloszlással!
   (a) Markov-láncot alkot-e az $X_n = \xi_n \xi_{n+1}$ folyamat? (Beugratós kérdés!)
   (b) Markov-láncot alkot-e az $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$ folyamat?

6. N urnába egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel golyókat helyezünk el, sorban egymás után. Jelölje X_n az n-edik golyó elhelyezése után üresen maradt urnák számát. Mutassuk meg, hogy az X_n sorozat Markov láncot alkot. Számítsuk ki az átmenetvalószínűségek mátrixát és osztályozzuk az állapotokat!