**Sztochasztikus folyamatok vizsga**

Gyakorlati feladatsor, 2016. május 31.

1. Egy országban a szavazókat három csoportba partícionálhatjuk: Republikánusok, Demokraták, és Zöldek. A szavazók négy évente pártot válthatnak. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden szavazó egymástól és a korábbi döntéseitől függetlenül vált pártot a következő mátrixban leírt valószínűségekkel:

| | **R** | **D** | **Z** |
|---|---|---|---|
| **R** | 0.8 | 0.2 | 0 |
| **D** | 0.3 | 0.5 | 0.2 |
| **Z** | 0 | 0.2 | 0.8 |

   (a) *(2 pont)* Milyen, típusba sorolható a lánc? Ennek segítségével, határozzuk meg, hogy hosszú távon milyen lesz a szavazók megoszlása a különböző pártok között!

   (b) *(2 pont)* Egy Demokrata politikai kalandjai során várhatóan hány választás alatt tér vissza anyapártjához?

   (c) *(2 pont)* Ha egy szavazó most Republikánus, akkor várhatóan hány szavazás alatt lesz Zöld?

   (d) *(4 pont)* Egy Zöld szavazó várhatóan hányszor szavaz a Demokratákra, mielőtt Republikánus lesz?

2. *(4 pont)* Egy MegDumálsz® étterem autós kiszolgálópultjához Poisson folyamat szerint érkeznek autók, 5 percenként átlagosan 1. Minden autóban 1/2 valószínűséggel 1, 1/3 valószínűséggel 2, és 1/6 valószínűséggel 3 vendég ül. Az egyes vendégek egymástól függetlenül (még az egy autóban ülő vendégek is), átlagosan \$10 költenek a menüre, \$2 szórással. Mennyi az étterem várható bevétele, s szórása 1 óra alatt? (Tipp: Használja, hogy a $k$ vendéget hozó autók is Poisson folyamatot alkotnak, $k = 1, 2, 3$-ra!)

3. Ottó gyermekeinek eloszlása $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 2) = 1/8$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$ és $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/4$. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.

   (a) *(2 pont)* Mennyi Ottó unokáinak (tehát a második generációnak) a várható értéke és szórása?

   (b) *(3 pont)* Mekkora valószínűséggel nem halnak ki Ottó leszármazottjai?

4. Egy laboratóriumi baktériumtenyészet minden egyes egyede a többitől függetlenül $\mu$ paraméterű exponenciális eloszlással elpusztul, $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlással pedig kettéosztódik. Amennyiben a tenyészet kipusztul, azt a kutatók $\lambda$ paraméterű exp. eloszlással veszik észre, s 1 új baktériumegyedet helyeznek el ismét. Legyen $X_t$ a tenyészet egyedszáma $t$ időpillanatban, $X_0 = 1$.

   (a) *(2 pont)* Írja fel a Markov-lánc infinitezimális generátorának elemeit!

   (b) *(4 pont)* Határozza meg a stacionáris eloszlást azokra a paraméterértékekre, melyekre létezik? Mely paraméterekre lesz a lánc tranziens? (Tipp. Használjuk a születés halálozási folyamatokra a det. balance feltételt és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = -\log(1-a)$.)

**Sztochasztikus folyamatok vizsga**

Elméleti feladatsor, 2016. május 31.

1. *(3 pont)* Írja fel a $\lambda$ paraméterű Poisson pontfolyamat két ekvivalens definícióját!
2. *(3 pont)* Mutassa meg, hogy ha $N(t)$ egy $\lambda$ paraméterű Poisson pontfolyamat, akkor $N(b) - N(a)$ eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda(b-a))$ minden $0 \leq a < b$ esetén!
3. *(1+1+2 pont)*
   (a) Írja fel a diszkrét idejű, megszámlálható állapotterű Markov-lánc definícióját!
   (b) Definiálja mikor rekurrens, mikor tranziens egy állapot!
   (c) Adjon szükséges és elégséges feltételt egy állapot rekurrenciájára!
4. *(4 pont)* Legyen $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy $S$ megsz. állapotterű és diszkrét idejű Markov-lánc. Mutassa meg, hogy egy véges, zárt és irreducibilis $C \subseteq S$ részhalmazára az állapottérnek, minden $x \in C$ elem rekurrens!
5. (a) *(2 pont)* Legyen $X$ valószínűségi változó a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn és legyen $\mathcal{F}$ az $\mathcal{A}$ egy rész sigma-algebrája. Definiálja $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$-t!
   (b) *(2 pont)* Legyen $\{\Omega_i\}$ $\mathcal{A}$-beli halmazok megszámlálható halmaza úgy, hogy $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ és $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, és legyen $\mathcal{F} = \sigma(\{\Omega_i\})$, a $\{\Omega_i\}$ halmazok által generált sigma-algebra. Írja fel $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$-t ebben az esetben!
6. *(2 pont)* Mondja ki a Felújítási folyamatok alaptételét!
7. *(2 pont)* Definiálja egy folytonos idejű, megsz. állapotterű Markov-lánc stacionárius eloszlását! Mikor teljesíti a detailed balance feltételt?
8. *(3 pont)* Igazolja, hogy egy véges állapotterű, folytonos idejű Markov láncnak $\pi$ valószínűségi vektor stacionárius eloszlása akkor és csak akkor, ha $\pi^T Q = \underline{0}^T$, ahol $Q$ a Markov-lánc infinitezimális generátora!