

Sztochasztikus folyamatok

2. feladatsor, 2016. március 5.

1. Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként $1/3$ valószínűséggel, valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétkébe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát. Azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát!
2. Dobókockát azonos valószínűséggel és az előző mozdulatoktól függetlenül, diszkrét időegységeként átfordítjuk az egyik oldaláról a szomszédos négy oldal valamelyikére. Írjuk le a Markov lánc átmenetvalószínűségeinek mátrixát és találjuk meg a stacionárius eloszlását!
3. (*Boze-Einstein-eloszlás*) Egy bűvésznak van r doboza és n megkülönböztethetetlen nyula. Minden másodpercben mindkét kezével egyszerre belenyúl valamelyik kalapba (a két kézzel egymástól függetlenül, mindkettővel egyenletesen választ kalapot). Ha a bal kézre eső kalapban van nyúl, akkor átteszi a jobb kézre eső kalapba, egyébként pedig nem csinál semmit. Hosszú idő elteltével mekkora lesz egy adott nyúl-konfiguráció valószínűsége?
4. Tekintsük azt a Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{x, y, z\}$ és átmenetmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 1/20 & 1/5 & 3/4 \\ 1/18 & 5/9 & 7/18 \end{pmatrix}.$$

- (a) Határozza meg a stacionárius eloszlást!
 - (b) Az x -ből indított Markov-lánc várhatóan hányat lép, amíg y -ba ér? Határozza meg a megtett lépések számának eloszlását is!
 - (c) Hányszor látogatja meg a folyamat várhatóan z állapotot x -ből indulva, amíg y -ba ér?
5. Legyenek X_1, X_2, \dots egymásutáni szabályos kockával való kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Legyen $T_1 = \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható } 7\text{-tel}\}$, $T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható } 7\text{-tel}\}$. Számoljuk ki $\mathbb{E}(T_1)$ és $\mathbb{E}(T_2)$ -t!