

Sztochasztikus folyamatok

3. feladatsor, 2016. március 10.

1. (*Boze-Einstein-eloszlás*) Egy bűvésznak van r doboza és n megkülönböztethetetlen nyula. Minden másodpercben mindkét kezével egyszerre belenyúl valamelyik kalapba (a két kézzel egymástól függetlenül, mindkettővel egyenletesen választ kalapot). Ha a bal kézre eső kalapban van nyúl, akkor átteszzi a jobb kézre eső kalapba, egyébként pedig nem csinál semmit. Hosszú idő elteltével mekkora lesz egy adott nyúl-konfiguráció valószínűsége?

2. Tekintsük azt a Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{x, y, z\}$ és átmenetmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 1/20 & 1/5 & 3/4 \\ 1/18 & 5/9 & 7/18 \end{pmatrix}.$$

(a) Az x -ből indított Markov-lánc várhatóan hányat lép, amíg y -ba ér? Határozza meg a megtett lépések számának eloszlását is!

(b) Hányszor látogatja meg a folyamat várhatóan z állapotot x -ből indulva, amíg y -ba ér?

3. Egy sztochasztikus önszabályozó rendszer próbál egy bizonyos paramétert a 0 közelében tartani, és ezt a következőképp teszi: a paraméter az n diszkrét idő függvényében egy X_n Markov lánc, melynek állapottere \mathbb{Z} , és átmenetvalószínűségei

$$P_{i,i+1} = \begin{cases} p, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ q, & \text{ha } i < 0, \end{cases} \quad P_{i,i-1} = \begin{cases} q, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ p, & \text{ha } i < 0, \end{cases}$$

ahol $q = 1 - p$.

(a) Milyen p értékekre lesz a lánc tranziens, rekurrens illetve pozitív rekurrens?

(b) Milyen p értékekre lesz az alábbi egy valószínűségi eloszlás \mathbb{Z} -n?

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{q-p}{2q}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{q-p}{4pq} \left(\frac{p}{q}\right)^{|i|}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(c) Mutassuk meg, hogy – amennyiben értelmes – π a lánc stacionárius eloszlása.

(d) Teljesíti-e a lánc és π stacionárius eloszlása a detailed balance feltételt?

4. Osztályozza az alábbi Markov-láncok állapotait!

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Legyen X_0, X_1, \dots, X_n homogén Markov-lánc! Igazolja, hogy $Y_i = X_{n-i}$ is Markov-láncot alkot!

6. Egy öreg szakinak két izzója van a garázsban. Ha mindkettő kiég, akkor mindkettőt kicseréli és így két működővel kezdi a másnapot. A körték egy nap 0.1 valószínűséggel égnek ki, egymástól függetlenül.

(a) Hosszú távon idejének hányad részét tölti a szaki egy villanykörte fényénél?

(b) Mennyi két csere közötti eltelt idő várhatóértéke?

Házi feladatok

2. feladatsor, beadási határidő: 2016. március 17.

1. Tekintsük a 2. feladatsor (március 5.) 1. feladatában leírt Markov láncot (Kovácsék újságos kupaca . . .).
 - (a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?
 - (b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?
2. Tekintsünk egy Markov-láncot \mathbb{N} -en a következő átmenetvalószínűségekkel:

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{i+1}, \quad P_{i,i-1} = \frac{i}{i+1}, \quad \text{ha } i \geq 0.$$

Határozza meg a Markov-lánc stacionárius eloszlását!

3. Egy népi bölcsesség szerint Ithakában a nyár harmadában esik, de egy esős napot $1/2$ valószínűséggel követ egy másik. Tegyük fel, hogy az ithakai időjárás Markov-lánc. Mi lesz az átmenetvalószínűségi mátrixa?
4. Írjuk fel a számokat 1-től 12-ig körben az óramutató járásával megegyezően (tekintsünk egy órát). Legyen X_n az a Markov-lánc amely egy számról a két szomszédos számra egyenlő valószínűséggel ugrik.
 - (a) Mi a megtett lépések várható értéke, mielőtt X_n visszaérkezik a kezdő helyére?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy X_n meglátogatja az összes többi állapotot, mielőtt visszaérkezik a kezdő helyére?
5. Tekintsük a szomszédok közül egyenletesen választó bolyongást a következő egyszerű G gráfon: $V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, és B, C, D, E, F, G csúcsok közül bármelyik kettőt él köti össze, valamint A össze van kötve B -vel és C -vel.
 - (a) Az A -ból indított bolyongás várhatóan hány lépést tesz meg, mielőtt A -ba visszaér?
 - (b) Ha a bolyongó B -ből indul, várhatóan hány lépést tesz meg azelőtt, hogy A -ba érne?
6. Legyen X_1, X_2, \dots irreducibilis Markov lánc az S véges állapottéren. Lássá be, hogy $Y_i := (X_i, X_{i+1})$ is irreducibilis Markov lánc a $G = \{(x_1, x_2) : P_{x_1, x_2} > 0\}$ állapottéren. Mi az így származtatott Markov lánc átmenetmátrixa, stacionárius eloszlása?