Sztochasztikus folyamatok
4. feladatsor, 2016. március 17.

1. *(Gambler's ruin)* Egy rulett asztalnál minden pörgetésnél p valószínűséggel nyerünk \$1-t, s q valsószínűséggel veszítünk \$1-t. A játékot abbahagyjuk, ha tönkrementünk (\$0-unk van) vagy ha elértük az N dolláros összeget. Mekkora a valószínűsége, hogy x dollárról indulva N dollárral állunk fel az asztaltól?

2. (*Wright-Fisher model*) Egy rögzített N elemszámú populációban kétféle gén létezik, a és A. Ha a szülők generációjában $j \in \{0, \dots, N\}$ darab a típusú gén van, akkor a következő generáció minden egyede egymástól függetlenül j/N valséggel lesz a és $(N-j)/N$ valséggel A génű. Mekkora a valószínűsége, hogy ha kezdetben j darab a gén volt, akkor az A gén eltűnik a populációból?

3. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást $\mathbb{Z}$-n. Ez a bolyongás tranziens, null rekurrens vagy pozitív rekurrens? (Útmutatás: használja a Stirling formulát)
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

4. Egy sztochasztikus önszabályozó rendszer próbál egy bizonyos paramétert a 0 közelében tartani, és ezt a következőképp teszi: a paraméter az n diszkrét idő függvényében egy X_n Markov lánc, melynek állapottere $\mathbb{Z}$, és átmenetvalószínűségei
$$P_{i,i+1} = \begin{cases} p, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ q, & \text{ha } i < 0, \end{cases} \quad P_{i,i-1} = \begin{cases} q, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ p, & \text{ha } i < 0, \end{cases}$$
ahol $q = 1 - p$.
   (a) Milyen p értékekre lesz a lánc tranziens, rekurrens illetve pozitív rekurrens?
   (b) Milyen p értékekre lesz az alábbi egy valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n?
$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{q-p}{2q}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{q-p}{4pq}\left(\frac{p}{q}\right)^{|i|}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   (c) Mutassuk meg, hogy – amennyiben értelmes – π a lánc stacionárius eloszlása.
   (d) Teljesíti-e a lánc és π stacionárius eloszlása a detailed balance feltételt?

5. Tekintsünk egy Markov láncot, melynek állapottere $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és P mátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(a) Határozzuk meg, hogy melyek a tranziens, és melyek a rekurrens állapotok.

(b) Mennyi $\lim_{n\to\infty} P_{1,2}^{(n)}$?

(Tipp:Határozzuk meg, hogy mekkora valószínűséggel jutunk 2 osztályába, majd utána azt, hogy ott mi történik.)

Házi feladatok

3. feladatsor, beadási határidő: 2016. március 24.

1. Az eső minden nap a többitől naptól függetlenül, 1/3 valószínűségggel esik, és ha esik, akkor pontosan délben esik. Egy öreg kertész akkor locsolja meg a kertjét, ha látja, hogy se ma délben, se tegnap, se tegnapelőtt nem érte víz (azaz locsolás vagy eső) a kertet. Várhatóan hányszor locsol egy évben?

2. Tekintsük a következő sorbanállási problémát: Legyen X_n sorbanálló vásárlók száma n-kor. Minden $(n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ időpillanatban $p \in (0,1)$ valószínűséggel egy új vásárló érkezik és a sor végére áll. Ettől függetlenül ugyanebben az időpillanatban a sor elején álló vásárlót $q \in (0,1)$ valószínűséggel kiszolgálják és ő elhagyja a sort. Legfeljebb egy új vásárló érkezhet és legfeljebb egy vásárlót szolgának ki időegységenként. A különböző $(n, n+1]$ időintervallumokon történőesemények egymástól függetlenek.
   (a) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetvalószínűség mátrixát!
   (b) Mely (p, q) értékekre lesz az X_n Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, tranziens?
   (c) A pozitív rekurrens esetben határozzuk meg a Markov lánc π stacionárius eloszlását! Mennyi a sor átlagos hossza stacionárius állapotban?
   (d) A tranziens esetben határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdetben j hosszú sor valaha kiürül!

3. Egy utazási irodában az új ügynököket Kezdőnek nyilvánítják. Fél évente minden ügynök besorolását felülvizsgálják. Egy kezdő előléphet Haladóvá (0.4 valószínűséggel), de akár Fel is mondhatnak neki (0.15 v.), egyébként pedik Kezdő marad (0.45 v.). Hasonlóan, a Haladók előléptethetők Tapasztalttá (0.3 v.), vagy Felmondhatnak neki (0.1 v.), vagy maradhatnak Haladók (0.6 v.). Ha valakit kirúgtak, már nem veszik vissza a céghez, és Tapasztalt dolgozókat nem fokoznak le, maradnak Tapasztaltak.
   (a) A Kezdők hány százaléka lesz végül Tapasztalt?
   (b) Várhatóan mennyi idő telik el, amíg egy Kezdőből Tapasztalt lesz, vagy Felmondanak neki?

4. Tekintsük az origóból indított egyszerű, szimmetrikus bolyongást. Legyenek a és b pozitív egészek. Az origótól bal felé b lépésnyire van egy gödör és jobb fele a lépésnyire van egy másik gödör. A bolyongó előbb-utóbb bele fog esni valamelyik gödörbe.
   (a) Mekkora valószínűséggel fog a bal szélső gödörbe esni a bolyongó?
   (b) Várhatóan hány lépést tesz a bolyongó, amíg gödörbe esik?

5. Tekintsünk egy Markov-láncot $\mathbb{N}$-en a következő átmenetvalószínűségekkel:

$$P_{i,i+1} = q < 1/2, \ P_{i,i-1} = p = 1 - q, \text{ ha } i \geq 1$$

és $P_{0,1} = 1$. Határozzuk meg a lánc stacionárius eloszlását!

6. *(Boze-Einstein-eloszlás)* Egy bűvésznek van r doboza és n megkülönböztethetetlen nyula. Minden másodpercben mindkét kezével egyszerre belenyúl valamelyik kalapba (a két kézzel egymástól függetlenül, mindkettővel egyenletesen választ kalapot). Ha a bal kézre eső kalapban van nyúl, akkor átteszi a jobb kézre eső kalapba, egyébként pedig nem csinál semmit. Hosszú idő elteltével mekkora lesz egy adott nyúl-konfiguráció valószínűsége?