Sztochasztikus folyamatok
5. feladatsor, 2016. március 24.

1. (*Wright-Fisher model*) Egy rögzített N elemszámú populációban kétféle gén létezik, a és A. Ha a szülők generációjában $j \in \{0, \dots, N\}$ darab a típusú gén van, akkor a következő generáció minden egyede egymástól függetlenül j/N valséggel lesz a és $(N-j)/N$ valséggel A génű. Mekkora a valószínűsége, hogy ha kezdetben j darab a gén volt, akkor az A gén eltűnik a populációból?

2. Egy sztochasztikus önszabályozó rendszer próbál egy bizonyos paramétert a 0 közelében tartani, és ezt a következőképp teszi: a paraméter az n diszkrét idő függvényében egy X_n Markov lánc, melynek állapottere $\mathbb{Z}$, és átmenetvalószínűségei
$$P_{i,i+1} = \begin{cases} p, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ q, & \text{ha } i < 0, \end{cases} \quad P_{i,i-1} = \begin{cases} q, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ p, & \text{ha } i < 0, \end{cases}$$
ahol $q = 1 - p$.
   (a) Milyen p értékekre lesz a lánc tranziens, rekurrens illetve pozitív rekurrens?
   (b) Milyen p értékekre lesz az alábbi egy valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n?
$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{q-p}{2q}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{q-p}{4pq}\left(\frac{p}{q}\right)^{|i|}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   (c) Mutassuk meg, hogy – amennyiben értelmes – π a lánc stacionárius eloszlása.
   (d) Teljesíti-e a lánc és π stacionárius eloszlása a detailed balance feltételt?

3. Tekintsünk egy Markov láncot, melynek állapottere $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és P mátrixa:
$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$
   (a) Határozzuk meg, hogy melyek a tranziens, és melyek a rekurrens állapotok.
   (b) Mennyi $\lim_{n\to\infty} P_{1,2}^{(n)}$?
   (Tipp:Határozzuk meg, hogy mekkora valószínűséggel jutunk 2 osztályába, majd utána azt, hogy ott mi történik.)

4. Lássa be, hogy egy Markov lánc átmenetmátrixa akkor és csak akkor szimmetrikus, ha bisztochasztikus és reverzibilis!

Házi feladatok

4. feladatsor, beadási határidő: 2016. március 31.

1. Tegyük fel, hogy egy véges állapotterű Markov-lánc állapotterének minden i, j elemére $P_{i,j} > 0$, ahol P az átmenetvalószínűségi mátrix! Mutassa meg, hogy létezik megfordítható stacionárius eloszlás akkor és csak akkor, ha minden i, j, k elemére az állapottérnek
$$P_{i,j}P_{j,k}P_{k,i} = P_{i,k}P_{k,j}P_{j,i}.$$
(Útmutatás: Rögzítsünk egy i és tekintsük a $\pi_j = c\frac{P_{i,j}}{P_{j,i}}$ eloszlást!)

2. Legyenek X_n és Y_n független Markov láncok az $S = \{0, 1, 2\}$ háromelemű állapottéren. Mindkét lánc átmenet mátrixa
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
Tegyük fel, hogy $X_0 = 0$ és $Y_0 = 2$ és legyen
$$T = \inf\{n > 0 : X_n = Y_n\}$$
   (a) Számoljuk ki $\mathbb{E}(T)$-t!
   (b) Mennyi a $\mathbb{P}(X_T = 2)$ valószínűség?
   (c) Hosszú időn keresztül az idő hanyad részét tölti a két Markov lánc azonos állapotban?

   (Útmutatás: Tekintsük a $Z_n = (X_n, Y_n)$-t mint Markov láncot a $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ kilenc elemű állapottéren.)

3. Legyen X_n egy véges S állapotterű homogén Markov lánc és $A \subset S$ úgy, hogy $\mathbb{P}_x(T_A < \infty) > 0$ minden $x \in S$-re, ahol $T_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}$. Tekintsük $g : S \mapsto \mathbb{R}$ függvényt, melyre, $g(a) = 0$ minden $a \in A$ esetén és minden $b \in S \setminus A$ elemére az állapottérnek
$$g(b) = 1 + \sum_{x \in S} P_{b,x} g(x).$$
Igazolja, hogy $g(x) = \mathbb{E}_x(T_A)$! (Tipp: használjuk az $x \mapsto \mathbb{E}_x(g(X_{\min\{n,T_A\}}))$ függvény sorozatot!)

5.-6. Tekintsük azt az $X_1, X_2, \ldots$ Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{1, 2, 3\}$ és átmenet-mátrixa
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Tegyük fel, hogy a kezdeti μ_0 eloszlásra $\mu_0(3) = 0$ teljesül.

(a) Nevezzük Q-nak az átmenetmátrix utolsó sorának és oszlopának elhagyásával kapható 2×2-es szubsztochasztikus mátrixot. Határozza meg Q legnagyobb λ sajátértékét és a hozzá tartozó $(v_1, v_2)^T$ jobboldali sajátvektort!

(b) Számítsa ki a $\mathbb{P}_{\mu_0}(X_n \neq 3)$ valószínűségeket $n \geq 0$!

(c) Lássa be, hogy $Y_1^n, Y_2^n, \ldots Y_n^n$ sztochasztikus folyamat is (nem feltétlenül homogén) Markov-lánc minden $n \geq 1$-re, aminek állapot tere $S' = \{1, 2\}$ és véges dimenziós eloszlásai

$$\mathbb{P}(Y_n^n = a_n, \ldots, Y_1^n = a_1) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = a_n, \ldots, X_1 = a_1 | X_n \neq 3)$$

(d) Mutassa meg, hogy az előbb definiált Markov-lánc átmenetvalószínűségei

$$\mathbb{P}(Y_{k+1}^n = a | Y_k^n = b) = \frac{P_{b,a} w_a}{P_{b,1} w_1 + P_{b,2} w_2},$$

ahol $(w_1, w_2)^T = P^{n-k-1}(1, 1)^T$!

(e) Fix k esetén lássa be, hogy

$$\widehat{P}_{i,j} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i, X_n \neq 3) = \frac{P_{i,j} v_j}{\lambda v_i}$$

Tehát ez az átmenetvalószínűség-mátrixa a Markov-láncunknak amellett a feltétel mellett, hogy "soha nem jut el" az elnyelő állapotba. Lássa be direkt számolással, hogy a $\widehat{P}$ mátrix sztochasztikus!