Sztochasztikus folyamatok
6. feladatsor, 2016. március 31.

1. Tekintsük az $I = [0, 1]$ intervallumot, s osszuk fel N egyforma hosszú intervallumokra. Minden kisebb intervallumot egymástól függetlenül, p valószínűséggel megtartunk, vagy $1 - p$ valószínűséggel elhagyunk. Az így kapott kisebb intervallumokra megismételjük az eljárát. Az így kapott $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ halmaz sorozat esetén mely p és N paraméterekre lesz $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ halmaz pozitív valószínűséggel nem üres?

2. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik $1/4 - 1/4$ valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.

   (a) Jelölje X Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét! Számítsuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $Var(X)$ értékét!

   (b) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.

3. Legyen X_n irreducibilis és aperiodikus Markov lánc az $\{1, 2, \ldots, N\}$ állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $C < 1$ és $\delta < 1$ konstansok, úgy, hogy bármely i és j állapotokra
$$\mathbb{P}\left(X_m \neq j, m = 1, 2, \ldots, n | X_0 = i\right) \leq C\delta^n$$
Mutassuk meg, hogy ebbol következik $\mathbb{E}(T_j) < \infty$. (Útmutatás: Létezik $\varepsilon > 0$, úgy, hogy bármely i és j állapotokra, annak a valószínusége, hogy i-bol indulva az elso N lépés során a Markov lánc eléri a j állapotot, nagyobb, mint ε.

4. Tekintsük az irreducibilis P $n \times n$ átmenetmátrixot. Lássa be, hogy ha P-nek van sajátbázisa és a P jobb oldali sajátvektoraiból, mint oszlopokból összerakunk egy invertálható U mátrixot, akkor U^{-1} sorai P baloldali sajátvektorai lesznek. Mi lesz U^{-1} elso sora, ha U elso oszlopa csupa egyesbol áll?

5. Vegyük azt a sztochasztikus mátrixot az $S = \{1, 2\}$ állapottéren, amire $P_{1,1} = 1/2$, $P_{2,2} = 3/4$.

   (a) P^{100} elemei körülbelül hány tizedesjegyben térnek el $\lim_{n\to\infty} P^n$ elemeitől?

   (b) $P^{100} =?$

6. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást a modulo 3 mardékosztályokon. Határozza meg az átmenetmátrix sajátértékeit, sajátaltereit és spektrális rését!

Házi feladatok

5. feladatsor, beadási határidő: 2016. április 7.

1. Tekintsünk egy Markov-láncot a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ állapottéren, melynek átmenetmátrixa
$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$
Azonosítsuk a Markov lánc irreducibilis osztályait! Tegyük fel, hogy a lánc $n = 0$ időpontban a 0 állapotból indul. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $n \gg 1$ (nagyon kései) időpontban a 0 állapotban lesz? Válaszoljuk meg ugyanezt a kérdést, ha feltesszük, hogy a Markov lánc $n = 0$ az 5 állapotból indul!

2. Tekintsük a következő átmenetmátrixú Markov láncot
$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1-a \\ 1-b & 0 & b & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & c \\ d & 0 & 1-d & 0 \end{pmatrix}.$$
Igazolja, hogy létezik stacionárius eloszlás, mely teljesíti a detailed balance feltételt, ha $0 < abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$.

3. Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G. Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!
   (a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k.
   (b) A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

4. Igaz-e hogy ha az eredeti Markov lánc reverzibilis, akkor a származtatott kétlépéses Markov lánc is reverzibilis?

5. Tekintsünk egy elágazó folyamatot, melynél egy szülő gyermekei számának eloszlása $(p_i)_{i=0}^{\infty}$, $p_i > 0$. Ebből irreducibilis Markov láncot csinálunk, úgy, hogy ha a populáció kihal, a következő lépésben egy új egyedet ültetünk be kívülről. Mely $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ eloszlásokra lesz az így értelmezett Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens?

6. Egy baktériumtenyészet kezdetben egyetlen sejtből áll. Minden perc végén minden egyes baktérium a többiektől függetlenül p_0 valószínűséggel meghal, p_1 valószínűséggel túlél és p_2 valószínűséggel kettéosztódik ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$).
   (a) Milyen p_0, p_1, p_2 valószínűségekre lesz a tenyészet szubkritikus, kritikus, illetve szuperkritikus?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a tenyészet soha nem pusztul ki?