Sztochasztikus folyamatok
7. feladatsor, 2016. április 7.

1. Tekintsünk egy elágazó folyamatot, melynél egy szülő gyermekei számának eloszlása $(p_i)_{i=0}^{\infty}$, $p_i > 0$. Ebből irreducibilis Markov láncot csinálunk, úgy, hogy ha a populáció kihal, a következő lépésben egy új egyedet ültetünk be kívülről. Mely $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ eloszlásokra lesz az így értelmezett Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens?

2. Tekintsük az irreducibilis P $n \times n$ átmenetmátrixot. Lássa be, hogy ha P-nek van sajátbázisa és a P jobb oldali sajátvektoraiból, mint oszlopokból összerakunk egy invertálható U mátrixot, akkor U^{-1} sorai P baloldali sajátvektorai lesznek. Mi lesz U^{-1} elso sora, ha U elso oszlopa csupa egyesbol áll?

3. Vegyük azt a sztochasztikus mátrixot az $S = \{1, 2\}$ állapottéren, amire $P_{1,1} = 1/2$, $P_{2,2} = 3/4$.
   (a) P^{100} elemei körülbelül hány tizedesjegyben térnek el $\lim_{n\to\infty} P^n$ elemeitől?
   (b) $P^{100} =?$

4. Egy kis forgalmú úton átlagosan 2 percenként halad el egy autó. Kiállok az út mellé és számolom az autókat. Mi a valószínűsége annak, hogy...
   (a) 5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem?
   (b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?
   (c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?
   (d) Az elhaladó autók tizede piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó?
   (e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellet- tem

5. Legyen $N(t)$ egy Poisson folyamat $\lambda = 3$ rátával. Jelölje T_n az n-edik esemény idejét. Határozzuk meg $\mathbb{E}(T_{12})$, $\mathbb{E}(T_{12}|N(2) = 5)$ és $\mathbb{E}(N(5)|N(2) = 5)$ értékét!

Házi feladatok

6. feladatsor, beadási határidő: 2016. április 14.

1. Legyen $0 < p, q < 1$ és legyen
$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$
kételemű állapotterű Markov-lánc átmenetmátrixa. Igazolja, hogy minden $n \geq 1$ esetén
$$P^n = (q+p)^{-1} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}.$$

2. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást a modulo 3 mardékosztályokon. Határozza meg az átmenetmátrix sajátértékeit, sajátaltereit és spektrális rését (1-második legnagyobb sajátérték)!

3. Mutassa meg, ha $N_1(t), \ldots, N_k(t)$ független, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Poisson pontfolyamatok. Ekkor $N_1(t) + \cdots + N_k(t)$ egy $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ paraméterű Poisson folyamat.

4. Tekintsünk egy 1 paraméterű Poisson-pontfolyamatot az egyenesen. Legyen X_1 a 0 és 3 közötti érkezések száma, X_2 pedig a 2 és 4 közötti érkezések száma. Mennyi $cov(X_1, X_2)$? (Tipp: Bontsuk fel X_1-et és X_2-t is további változók összegére.)

5. Tegyük fel, hogy a horgász mindig ugyanannyi ideig horgászik azonos feltételek mellett, továbbá 100 esetből átlagosan 6-szor nem fog egy halat sem.
   (a) Hány halat fog a horgász leggyakrabban?
   (b) Mi a valószínűsége, hogy 6 halat fog egy alaklommal?
   (c) Várhatóan egy alkalommal hány halat fog a horgász?

6. Egy telefonközpontba 5 perc alatt átlagosan 8 helyi hívás és 2 távolsági hívás érkezik.
   (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik?
   (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?
   (c) Mekkora a feltételes valószínűsége annak, hogy egy 2 perces időszak alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik, feltéve, hogy ugyanezen idő alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?