

Sztochasztikus folyamatok

8. feladatsor, 2016. április 14.

1. Barátunk pecázik. Tegyük fel, hogy homogén Poisson folyamat szerint van kapása, óránként átlagosan 3. A kapások $2/3$ -át sikerül ténylegesen kifognia, a többi leakad. Továbbá, a fogott halak tömege független és azonos eloszlású, várhatóan 2 kg, 1 kg szórással. Várhatóan hány kiló halat fog 3 óra alatt? Mekkora a fogott halak tömegének szórás?
2. Jelölje H az égboltnak azt a részét, ami 10 fényévnél távolabb van tőlünk, de 20 fényévnél közelebb. Tegyük fel, hogy egy köbfényévnyi nagyságú térrészbe várhatóan 1 csillag esik, és minden csillag egyforma fényes.
 - (a) Várhatóan hány csillag esik H -ba?
 - (b) Egy 10 fényévre lévő csillag fényereje egységnyi nagyságúnak látszik, a csillagok fényereje ereje a távolságuk négyzetével fordított arányban áll. Mi a H -ból a szemünkbe érkező fény mennyiségének várható értéke? (Tipp: osszuk H -t koncentrikus, infinitezimális vastagságú karélyokra)

Házi feladatok

7. feladatsor, beadási határidő: 2016. április 21.

1. Egy úton a kamionokat számoljuk. A kamionforgalom sűrűsége napközben nem állandó, az óránként elhaladó kamionok számának rátafüggvénye a következő:

$$\lambda(r) = 6 - 4 \cos(\pi r/6), r \in [0, 24].$$

- (a) Mekkora az egy nap alatt elhaladó kamionok számának várható értéke?
- (b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 12 és 13 óra között pontosan 3 kamion halad el?
2. Egy kávéautomatához Poisson folyamat szerint érkeznek az emberek, óránként átlagosan 10. Tegyük fel, hogy egy ember átlagosan 80 Ft-ot költ, 10 Ft szórással. Mennyi az automata bevételének várható értéke és szórása 8 óra alatt?
3. Tekintsünk az \mathbf{R}^2 síkon egy λ sűrűségű, homogén Poisson pontfolyamatot. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges, de rögzített pontját (az origót) és határozzuk meg a hozzá legközelebb eső véletlen pont távolságának sűrűségfüggvényét!
4. A főútvonalon egyirányú a forgalom és a járművek elhaladása λ paraméterű Poisson folyamat. A keresztező mellékútvonalon az áthaladás a időt vesz igénybe. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autós k járműnek kell elsőbbséget adjon, mielőtt áthaladhat a kereszteződésen? Mennyi az elegendő autók számának várható értéke?
5. Tekintsünk egy λ paraméterű Poisson folyamatot. Legyenek $t > a > 0$ rögzített számok. Jelöljük $P(\lambda, a, t)$ -vel annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ intervallumban van olyan a hosszúságú részintervallum, amelybe nem esik a Poisson folyamatnak pontja. Határozzuk meg a $P(\lambda, a, t)$ függvényt! (Tipp: Írjunk fel a $t \mapsto P(\lambda, a, t)$ függvényre egy felújítási egyenletet az első esemény segítségével.)
6. Hogy ott mindig világosság legyen, ablaktalan folyosónk lámpájába azonnal becsavarjuk az új égőt, ha az előző kiég. Az izzók élettartamai egymástól függetlenek, és külön-külön exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. $t = 0$ -kor csavarjuk be az első égőt. Tekintsük annak az izzónak a teljes élettartamát, amelyik a t időpillanatban ég ($t > 0$ fix). Mennyi ennek a teljes élettartamnak a várható értéke, ha
- (a) Ha tudjuk, hogy a 0 időponttól számítva ez az izzó a k -adik.
- (b) Ha nem tudjuk, hogy hányadik. $t \rightarrow \infty$ esetén mihez konvergál a t -edik időpontban égő villanykörte teljes élettartamának várható értéke?

Sztochasztikus folyamatok

8. feladatsor, 2016. április 14.

1. Barátunk pecázik. Tegyük fel, hogy homogén Poisson folyamat szerint van kapása, óránként átlagosan 3. A kapások $2/3$ -át sikerül ténylegesen kifognia, a többi leakad. Továbbá, a fogott halak tömege független és azonos eloszlású, várhatóan 2 kg, 1 kg szórással. Várhatóan hány kiló halat fog 3 óra alatt? Mekkora a fogott halak tömegének szórás?
2. Jelölje H az égboltnak azt a részét, ami 10 fényévnél távolabb van tőlünk, de 20 fényévnél közelebb. Tegyük fel, hogy egy köbfényévnyi nagyságú térrészbe várhatóan 1 csillag esik, és minden csillag egyforma fényes.
 - (a) Várhatóan hány csillag esik H -ba?
 - (b) Egy 10 fényévre lévő csillag fényereje egységnyi nagyságúnak látszik, a csillagok fényereje ereje a távolságuk négyzetével fordított arányban áll. Mi a H -ból a szemünkbe érkező fény mennyiségének várható értéke? (Tipp: osszuk H -t koncentrikus, infinitezimális vastagságú karélyokra)

Házi feladatok

7. feladatsor, beadási határidő: 2016. április 21.

1. Egy úton a kamionokat számoljuk. A kamionforgalom sűrűsége napközben nem állandó, az óránként elhaladó kamionok számának rátafüggvénye a következő:

$$\lambda(r) = 6 - 4 \cos(\pi r/6), r \in [0, 24].$$

- (a) Mekkora az egy nap alatt elhaladó kamionok számának várható értéke?
- (b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 12 és 13 óra között pontosan 3 kamion halad el?
2. Egy kávéautomatához Poisson folyamat szerint érkeznek az emberek, óránként átlagosan 10. Tegyük fel, hogy egy ember átlagosan 80 Ft-ot költ, 10 Ft szórással. Mennyi az automata bevételének várható értéke és szórása 8 óra alatt?
3. Tekintsünk az \mathbf{R}^2 síkon egy λ sűrűségű, homogén Poisson pontfolyamatot. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges, de rögzített pontját (az origót) és határozzuk meg a hozzá legközelebb eső véletlen pont távolságának sűrűségfüggvényét!
4. A főútvonalon egyirányú a forgalom és a járművek elhaladása λ paraméterű Poisson folyamat. A keresztező mellékútvonalon az áthaladás a időt vesz igénybe. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autós k járműnek kell elsőbbséget adjon, mielőtt áthaladhat a kereszteződésen? Mennyi az elegendő autók számának várható értéke?
5. Tekintsünk egy λ paraméterű Poisson folyamatot. Legyenek $t > a > 0$ rögzített számok. Jelöljük $P(\lambda, a, t)$ -vel annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ intervallumban van olyan a hosszúságú részintervallum, amelybe nem esik a Poisson folyamatnak pontja. Határozzuk meg a $P(\lambda, a, t)$ függvényt! (Tipp: Írjunk fel a $t \mapsto P(\lambda, a, t)$ függvényre egy felújítási egyenletet az első esemény segítségével.)
6. Hogy ott mindig világosság legyen, ablaktalan folyosónk lámpájába azonnal becsavarjuk az új égőt, ha az előző kiég. Az izzók élettartamai egymástól függetlenek, és külön-külön exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. $t = 0$ -kor csavarjuk be az első égőt. Tekintsük annak az izzónak a teljes élettartamát, amelyik a t időpillanatban ég ($t > 0$ fix). Mennyi ennek a teljes élettartamnak a várható értéke, ha
- (a) Ha tudjuk, hogy a 0 időponttól számítva ez az izzó a k -adik.
- (b) Ha nem tudjuk, hogy hányadik. $t \rightarrow \infty$ esetén mihez konvergál a t -edik időpontban égő villanykörte teljes élettartamának várható értéke?