Sztochasztikus folyamatok
9. feladatsor, 2016. április 21.

1. Egy üzemben 3 gép és 2 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje λ paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, és van legalább egy szabad szerelő, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. Ha nincs szabad szerelő, akkor várni kell addig, ameddig valamelyik szerelő felszabadul. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2λ paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól. Legyen X_t a t-kor működő gépek száma ($t > 0$).
   (a) Adja meg ennek a folyamatnak az infinitezimális generátorát!
   (b) Nagy idő eltelte után kb. mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott pillanatban pontosan k gép üzemel ($k = 0, 1, 2, 3$) ?

2. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1; 2; 3; 4\}$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora
$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Írjuk fel az X_t Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.
   (b) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?
   (c) Újból tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

3. Egy boltba egy λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a vásárlók. A boltban egyetlen eladó dolgozik. Egy-egy vásárló kiszolgálásának időtartama $\mathrm{Exp}(\mu)$ eloszlást követ, ahol $\mu > \lambda$.
   (a) Modellezük a sorban álló vásárlók számát folytonos idejű Markov lánccal! Írja fel a lánc infitezimális generátorát!
   (b) Mi a sorban állók számának stacionárius eloszlása?

Házi feladatok

8. feladatsor, beadási határidő: 2016. április 28.

1. Egy üzemben 2 gép és 2 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje 1 paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2 paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól, eredetileg minden gép működik. Határozza meg a t időpontban működésben lévő gépek számának eloszlását, azaz annak a valószínűségét, hogy t-kor pontosan k gép üzemel, $k = 0, 1, 2$.

2. Legyen $n = 1, 2, \ldots$-re $\mathbb{P}(\nu = n) = (1-p)^{n-1}p$ és legyenek $X_1, X_2, \ldots$ azonos $EXP(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen minden mindentől független. Lássa be Poisson-folyamatok felhasználásával, hogy a $\sum_{k=1}^{\nu} X_k$ véletlen tagszámú összeg is exponenciális eloszlású!

   (a) A 9. feladatsor 3. feladatában, ha sok idő után betoppanok és beállok a sorba. Mi az eloszlása annak az időtartamnak amit a boltban töltök?

3. Egy forgalmas helyen lévő pénzváltóba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 2 percig tart. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül még legfeljebb ketten tartózkodhatnak a helyiségben; ha olyankor érkezne ügyfél, amikor a helyiség tele van, akkor azonnal továbbmegy (mondjuk egy másik pénzváltóhoz).

   (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

   (c) Hosszú távon az idő mekkora részében van tele a helyiség? Az érkező ügyfelek hány százalékának kell továbbmenni?

4. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1, 2\}$ állapottéren, melynek ugrási rátái: $q(1, 2) = \lambda$, illetve $q(2, 1) = \mu$. Írjuk fel az átmenet valószínűségek P^t félcsoportját és a stacionárius eloszlást!

5.+6. (Yule folyamat) Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba Exp(1) idő elteltével kettéosztódik és lesz belőle két ugyanolyan amőba mint az eredeti. Lássa be, hogy a Petri csészében lévő amőbák X_t száma Geo(e^{-t}) eloszlású, vagyis lássuk be, hogy $\mathbb{P}(X_t = k) = (1 - e^{-t})^{k-1}e^{-t}$, $k = 1, 2, \ldots$. Lássuk ezt be két féleképpen:

   (a) Először lássa be oly módon, hogy felírja az X_t folyamat infinitezimális generátorát, és leellenőrzi, hogy az amőbák eloszlásának időbeli fejlődésére felírható differenciálegyenlet-rendszert és a $\mu_k(0) = \delta_{k,1}$ kezdeti feltételt valóban kielégítik a $\mu_k(t) = (1 - e^{-t})^{k-1}e^{-t}$ függvények.

   (b) Majd annak a felhasználásával, hogy ha $U_1, \ldots, U_n$ független és EXP(1) eloszlású valószínűségi változók, akkor $\max\{U_1, \ldots, U_n\}$ ugyanolyan eloszlású, mint a $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ független összeg, ahol $V_i \sim EXP(i)$.