Név:.................................. Neptunkód:.................

Zh összpontszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Vizsga	Zh+Vizsga	Jegy

Matematika A2 vizsga

2016. december 20., Építőmérnöki BSc szak

A dolgozat 1.-3. és 7.-9. feladataiból el kell érni 6-6 pontot!

1. *(3+4 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be az alternáló sorokra vonatkozó Leibnitz-kritériumot!

2. Legyen V egy vektortér és legyen $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, ahol $\underline{v}_i \in V$ vektorok.
   (a) *(2 pont)* Definiálja, mikor nevezzük a B beli vektorokat lineárisan függetlennek!
   (b) *(2 pont)* Definiálja, mikor generátorrendszere a B beli vektorok a V vektortérnek!
   (c) *(2 pont)* Definiálja, mikor alkotnak a B beli vektorok bázist V vektortérben!

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény.
   (a) *(2 pont)* Definiálja az f függvény (x_0, y_0) pontban vett x- és y-szerinti parciális deriváltjait és gradiensvektorát!
   (b) *(2 pont)* Mondja ki a gradiens vektor és az f függvény (x_0, y_0) pontban vett $\underline{v} = (v_x, v_y)$, $\|\underline{v}\| = 1$ irányú iránymenti deriváltja közötti összefüggést!
   (c) *(3 pont)* Határozza meg f differenciálható függvény legnagyobb növekedési irányát (x_0, y_0) pontban! Állítását igazolja!

---

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(2 pont)* Határozza meg A mátrix rangját!
   (b) *(4 pont)* Írja fel az oszlopvektorai által kifeszített vektortér egy bázisát, majd az így megadott bázisból a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás segítségével írja fel egy ortonormált bázisát! (Tipp: Használja az első néhány oszlopvektort!)

5. *(5 pont)* Az alábbi lineáris egyenletrendszernek mely a, b paraméterek mellett nincs megoldása, van pontosan egy megoldása, van végtelen sok megoldása?

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= -2, \\ -x + 2y &= 5, \\ 2x - y + az &= b. \end{aligned}$$

6. Legyen

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -9 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(6 pont)* Határozza meg a B mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!
   (b) *(3 pont)* Határozza meg a B^{100} mátrixot!

---

7. *(7 pont)* Keresse meg az $f(x, y) = (x^2 - x - 2)(y^2 - 4) - 3$ függvény lokális szélsőértékeit, nyeregpontjait!

8. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x, y) = y^2 \cos(y^3)$ függvény integrálját a $T = \{(x, y) : 0 < y^3 < x < 1\}$ tartomány felett! (Tipp: Írja fel az integrálás határait kétféleképpen, majd végezze el az integrálást azzal, amely Önnek a legkönnyebb!)

9. *(6 pont)* Határozza meg az $f(x, y, z) = 4z \sin(x^2 + y^2 + 1)$ függvény integrálját a $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ tartomány felett!