BME Matematika Intézet

Önaffin halmazok Hausdorff-dimenziójának approximációja

DIPLOMAMUNKA

Brányi Balázs

Témavezető:
Bárány Balázs
docens
Sztochasztika Tanszék

BME
2021

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozat célja hatékony közelítési módszerek bemutatása speciális önaffin halmazok Hausdorff-dimenziójára. Önhasonló halmazok esetén Hutchinson bizonyos szeparációs feltételek mellett a Hausdorff-dimenzióra zárt formulát adott [9]. Önaffin esetben azonban általánosságban zárt formula nem ismert. Mivel a Hausdorff-dimenzió nehezen számolható, ezért a generáló iterált függvényrendszer szingularitási dimenzióját közelítjük, ami megfelelő feltételek esetén megegyezik a Hausdorff-dimenzióval. Erősebb szeparációs feltételek mellett Bárány, Hochman és Rapaport tétele alkalmazható [1], Falconer és Solomyak eredménye pedig Lebesgue-tipikus esetekben, azaz majdnem minden eltolásparaméter esetén, amikor a kontrakció erősebb, mint 1/2 [14]. A gyakorlatban gyakran doboz-dimenzióval közelítik egy halmaz Hausdorff-dimenzióját a könnyű kiszámíthatósága miatt, viszont ez nem rendelkezik sok elvárt matematikai tulajdonsággal, ezért ebben a dolgozatban nem foglalkozunk részletesen a doboz-dimenzióval.

A dolgozatban először bevezetjük a szükséges alapfogalmakat, majd megvizsgáljuk Pollicott és Vytnova [12] szuperexponenciális közelítési módszerét síkbeli halmazokra, amit Morris [11] általánosított több dimenzióra. Ez a módszer bár aszimptotikusan hatékony, az első néhány lépés után nem biztosan ad még jó közelítést, ezért egy másik módszert is ismertetünk, ami ugyan aszimptotikusan gyengébb, viszont a gyorsan kiszámítható tartományban közelebb van a pontos értékhez. Ez McMullen [10] módszerén alapul, ami más rendszerekre használható, de mi belátjuk a dolgozatban, hogy önaffin esetben is alkalmazható. Az 5-ik fejezetben megvizsgálunk néhány példát, szemléltetve a módszerek hatékonyságát.

1.1. Alapfogalmak

Először is definiáljuk a távolság fogalmát általánosan, kiterjesztve az intuitív meghatározást.

1. Definíció. *Legyen X bármilyen, nem üres halmaz. Ekkor azt a d leképezést, amely két X-beli elemhez rendel egy nemnegatív valós számot, metrikának nevezzük X-en, ha teljesülnek a következők:*

- $d(x, y) = d(y, x)$, *(szimmetria)*
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$, *(egyenlőségi tulajdonság)*
- $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. *(háromszög-egyenlőtlenség)*

Ekkor az (X, d) párost metrikus térnek nevezzük.

A dolgozat folyamán halmazok méretét szeretnénk meghatározni, és ezen távolságfogalom segítségével egy primitív mérethez juthatunk, a halmaz két legtávolabbi pontjának távolságát figyelembe véve.

2. Definíció. *Legyen $U \subseteq X$ nemüres halmaz és d egy metrika. Ekkor U átmérője a következő:* $\mathrm{diam}(U) := \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$.

3. Definíció. *Legyen (X, d_1) és (Y, d_2) két metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to Y$ függvény α kitevőjű Hölder-folytonos, ha*

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_+ : \forall x, y \in X : d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y)^\alpha. \tag{1}$$

Speciálisan, ha $\alpha = 1$, akkor az f függvényt Lipschitz-függvénynek nevezzük.

4. Definíció. *Egy $S : X \to Y$ leképezést kontrakciónak nevezünk, ha S Lipschitz-függvény és a c Lipschitz-konstansra fennáll $0 < c < 1$. Ekkor c-t a leképezés kontrakciós rátájának nevezzük.*

5. Definíció. *Egy $S : X \to Y$ leképezést hasonlóságnak nevezünk, ha S Lipschitz-függvény és a (1) egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn minden $x, y \in X$ esetén.*

1. Megjegyzés. *Egy hasonlóság $\mathbb{R}^d$-n általánosan a következő alakban írható fel: $S(x) = \varrho \mathbf{O} \cdot x + t$, ahol ϱ egy skálázás, $\mathbf{O}$ egy ortonormált mátrix, t pedig egy vektor.*

6. Definíció. *Két halmaz Hausdorff-távolsága legyen*

$$d_H(K_1, K_2) := \inf\{\delta : K_1 \subset [K_2]_\delta \text{ és } K_2 \subset [K_1]_\delta\},$$

ahol $[K_i]_\delta$ a K_i δ-sugarú, nyílt környezetét jelöli.

$$[K]_\delta = \{x \in X : \exists k \in K \text{ amire fennáll } d(x, k) < \delta\}.$$

1. Állítás. *Az Hausdorff-távolságra igaz a következő két állítás:*

1. *$d_H(A \cup B; C \cup D) \leq \max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\}$ bármilyen $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazokra.*

2. *$d_H(S(E); S(F)) \leq r \cdot d_H(E; F)$ minden S kontrakció és $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ esetén, ahol r a kontrakciós ráta.*

Bizonyítás. 1. Legyen δ olyan, amire $\max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\} < \delta$ teljesül. Ekkor a Hausdorff-távolság definíciója alapján $[A]_\delta \supseteq C$ és $[C]_\delta \supseteq A$, valamint $[B]_\delta \supseteq D$ és $[D]_\delta \supseteq B$. Így $[A]_\delta \cup [B]_\delta \supseteq C \cup D$ és $[C]_\delta \cup [D]_\delta \supseteq A \cup B$. Legyen $x \in [A]_\delta \cup [B]_\delta$ tetszőleges. Ekkor $x \in [A]_\delta$ vagy $x \in [B]_\delta$ ezért vagy létezik olyan $y_1 \in A$, amire $||x - y_1|| < \delta$, vagy létezik olyan $y_2 \in B$, amire $||x - y_2|| < \delta$. Tehát van olyan $y \in A \cup B$, amire $||x - y|| < \delta$, így

$[A]_\delta \cup [B]_\delta \subseteq [A \cup B]_\delta$. Azaz

$$C \cup D \subseteq [A]_\delta \cup [B]_\delta \subseteq [A \cup B]_\delta.$$

Hasonlóan $A \cup B \subseteq [C \cup D]_\delta$ is teljesül, azaz

$$d_H(A \cup B; C \cup D) \leq \delta.$$

Ebből következik, hogy $d_H(A \cup B; C \cup D) \leq \max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\}$. Ezt indirekt be tudjuk látni, hiszen ha a következő állna fenn

$$\max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\} < d_H(A \cup B; C \cup D),$$

akkor tudnánk olyan $\overline{\delta}$-t találni, amire

$$\max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\} < \overline{\delta} < d_H(A \cup B; C \cup D)$$

teljesül. Azonban az előbb beláttuk, hogy bármilyen δ-ra, amire

$$\max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\} < \delta$$

teljesül, fenn áll

$$d_H(A \cup B; C \cup D) \leq \delta$$

is. Így $\overline{\delta} < d_H(A \cup B; C \cup D) \leq \overline{\delta}$ ami ellentmondás, tehát

$$d_H(A \cup B; C \cup D) \leq \max\{d_H(A; C); d_H(B; D)\}$$

igaz volt.

2. Legyen δ olyan, amire $d_H(E; F) < \delta$ teljesül. Ekkor a Hausdorff-távolság

definíciója alapján $[E]_\delta \supseteq F$ és $[F]_\delta \supseteq E$. Legyen $x \in S([E]_\delta)$ tetszőleges pont. Ekkor a definíciók miatt létezik olyan $y \in [E]_\delta$, hogy $x = S(y)$, valamint $z \in E$, amire $||y - z|| \leq \delta$. Tehát

$$||x - S(z)|| = ||S(y) - S(z)|| \leq r \cdot ||y - z|| \leq r \cdot \delta.$$

Ekkor $x \in [S(E)]_{r\cdot\delta}$ minden $x \in S([E]_\delta)$ pontra, így $S([E]_\delta) \subseteq [S(E)]_{r\cdot\delta}$. Továbbá tudjuk, hogy $S(F) \subseteq S([E]_\delta)$, így $S(F) \subseteq S([E]_\delta) \subseteq [S(E)]_{r\cdot\delta}$, azaz $d_H(S(E); S(F)) \leq r \cdot d_H(E; F)$. □

1.2. Önhasonló- és önaffin iterált függvényrendszerek

7. Definíció. *Önhasonló iterált függvényrendszernek (röviden önhasonló IFR-nek) nevezzük kontraktív hasonlóságok egy véges $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ halmazát.*

Ez azt jelenti, hogy a leképezések minden irányba ugyanannyira húzzák össze a halmazokat. Ennél általánosabb, ha ezt a megkötést elengedjük, így jutunk a következőhöz:

8. Definíció. *Önaffin IFR-nek nevezzük leképezések egy véges $\mathcal{S}$ halmazát, ha $\mathcal{S} = \{S_i(x) = \mathbf{A}_i x + t_i\}_{i=1}^m$, ahol $x, t_i \in \mathbb{R}^d$ valós vektorok, az $\mathbf{A}_i$-k pedig minden i esetén olyan $d \times d$-es, valós elemű, invertálható mátrixok, amikre $\|\mathbf{A}_i\| < 1$ teljesül.*

9. Definíció. *Egy Λ nemüres, kompakt halmazt, az $\mathcal{S}$ (önhasonló vagy önaffin) IFR attraktorának nevezzük, ha teljesül rá $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n S_i(\Lambda)$.*

2. Állítás. *Az attraktor létezik és egyértelmű.*

Bizonyítás. Jelölje $\overline{B}_R(O)$ az R sugarú, O középpontú zárt gömböt. Legyen

$B := \overline{B}_R(O)$, ahol $R = \max_i \left\{ \frac{||t_i||}{1-r_i} \right\}$. Ekkor

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n} S_{i_1,\ldots,i_n}(B)$$

éppen $\mathcal{S}$ IFR attraktora.

Itt egy kitérőt kell tennünk, hogy belássuk, valóban létezik az attraktor. Ehhez először vizsgáljuk meg egy tetszőleges x pont S_i szerinti képének távolságát az origótól:

$$||S_i(x)|| \leq ||S_i(x) - S_i(0)|| + ||S_i(0)|| \leq r_i||x - 0|| + ||S_i(0)||.$$

A háromszög egyenlőtlenség miatt felülről becsülhetjük az első normát, majd S_i kontrakció volta miatt az első tagot $r_i||x - 0||$-val. Az első tagot tovább becsülhetjük, hiszen $x \in B_R(0)$, így $||x-0|| \leq R$, míg a második tag definíció szerint éppen t_i. Tehát ekkor:

$$||S_i(x)|| \leq r_i R + t_i.$$

Mivel $r_i < 1$ és t_i fix, így R definíciója miatt $r_i R+t_i \leq R$. Tehát $||S_i(x)|| \leq R$, azaz korlátos és S_i folytonossága miatt zárt is, így kompakt. Kompakt halmazok véges uniója szintén kompakt. Nyilvánvalóan $\bigcup_{|\mathsf{i}|=n} S_\mathsf{i}(B) \subseteq \bigcup_{|\mathsf{i}|=m} S_\mathsf{i}(B)$, ha $n > m$, és ekkor az egész metszet egymásba ágyazott kompakt halmazok egy csökkenő sorozata. Ekkor alkalmazható a Cantor-tétel, ami szerint ez a metszet nemüres, azaz az attraktor valóban létezik.

Legyen E olyan, hogy kielégíti az $E = \bigcup_{i=1}^n S_i(E)$ egyenletet. Legyen $\mathcal{C}$ a B-ben levő nemüres, kompakt halmazok halmaza. Definiáljuk a $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

leképezést a következőképpen:

$$\Phi(K) := \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K).$$

Ekkor Φ kontrakció a $\mathcal{C}$ téren, amihez az 1. állítást kell felhasználnunk. Vegyünk két általános pontot $\mathcal{C}$-ből, és vizsgáljuk meg a képeik távolságát:

$$d_H(\Phi(A);\Phi(B)) = d_H\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i(A);\bigcup_{i=1}^{N} S_i(B)\right) \leq$$

$$\leq \max_i d_H(S_i(A);S_i(B)) \leq (\max_i r_i)\cdot d_H(A;B).$$

Az első egyenlőtlenség az 1. összefüggés miatt teljesül, hiszen

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i(A);\bigcup_{i=1}^{N} S_i(B)\right) = d_H\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} S_i(A)\cup S_N(A);\bigcup_{i=1}^{N-1} S_i(B)\cup S_N(B)\right) \leq$$

$$\leq \max\left(d_H\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} S_i(A);\bigcup_{i=1}^{N-1} S_i(B)\right); d_H(S_N(A);S_N(B))\right).$$

Az első tagban szereplő uniót így lebontva, azt kapjuk, hogy

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i(A);\bigcup_{i=1}^{N} S_i(B)\right) \leq \max_i d_H(S_i(A);S_i(B)).$$

Ekkor felhasználva a 2. tulajdonságot:

$$\max_i d_H(S_i(A);S_i(B)) \leq \max_i r_i\cdot d_H(A;B).$$

Tehát $d_H(\Phi(A);\Phi(B)) \leq \max_i r_i \cdot d_H(A;B)$, azaz Φ valóban kontrakció. Mivel E és Λ is fixpontja a Φ leképezésnek, viszont a Banach-fixpont tétel miatt pontosan egy fixpont van, ezért $E = \Lambda$ és így az attraktor egyértelmű. $\square$

1.3. A Hausdorff-dimenzió

Ebben a szakaszban bevezetjük F. Hausdorff [7] által definiált dimenzió fogalmát. Ez természetes kiterjesztése az általános dimenzió fogalmának, azaz az $\mathbb{R}^d$-ben pozitív d-dimenziós Lebesgue-mértékű halmazokra a Hausdorff-dimenzió éppen d, valamint rendelkezik a természetesen elvárt tulajdonságokkal.

10. Definíció. *Egy E halmazra definiáljuk a következő függvényt:*

$$\mathcal{H}^d_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d : \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ } E\text{-nek } \delta\text{-fedése} \right\}.$$

Egy $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ halmazrendszert az E halmaz δ-fedésének nevezzük, ha $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ fedése E-nek, azaz $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq E$ és minden A_i halmaz átmérője legfeljebb δ. Ezen függvény segítségével tudjuk definiálni egy E halmaz d-dimenziós Hausdorff-mértékét. Legyen ez:

$$\mathcal{H}^d(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^d_\delta(E).$$

11. Definíció. *A mérték segítségével definiálható a halmaz Hausdorff-dimenziója:* $\dim_H(E) := \inf\{d : \mathcal{H}^d(E) = 0\} = \sup\{d : \mathcal{H}^d(E) = \infty\}$.

3. Állítás. *A Hausdorff-dimenzió tulajdonságai:*

- *Ha $X \subset Y$, akkor $\dim_H(X) \leq \dim_H(Y)$.*
- *Ha $X_1, X_2, \ldots$ halmazok egy megszámlálható sorozata, akkor*

$$dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{dim_H(X_i)\}.$$

- *Ha X megszámlálható halmaz, akkor $dim_H(X) = 0$.*

- *Ha* $X \subset \mathbb{R}^d$, *akkor* $\dim_H(X) \leq d$.

12. Definíció. *Legyen* E *egy korlátos, nemüres halmaz, és legyen* $N_\delta(E)$ *az* E δ *átmérőjű halmazokkal való lefedéséhez szükséges minimális mennyiség. Ekkor*

$$\underline{\dim}_B(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log\delta},$$
$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log\delta}$$

az E *halmaz alsó és felső dobozdimenziója. Ha a két határérték megegyezik, akkor a közös értéket az* E *halmaz dobozdimenziójának nevezzük.*

1.4. Lineáris algebrai eszközök

13. Definíció. *Egy* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrix sajátértékének nevezzük a* λ *számot, ha létezik olyan* $\mathbf{x}$ *nem nulla vektor, amire fennáll* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$*. Ekkor* $\mathbf{x}$*-et az* $\mathbf{A}$ *mátrix,* λ *sajátértékéhez tartozó, sajátvektorának nevezzük.*
Egy $\mathbf{A}$ *mátrix szinguláris értékének nevezzük a* α *számot, ha léteznek olyan* u, v *vektorok, amire fennáll*

$$\mathbf{A}\mathsf{u} = \alpha\mathsf{v}$$
$$\mathbf{A}^*\mathsf{v} = \alpha\mathsf{u},$$

ahol $\mathbf{A}^*$ *jelöli az* $\mathbf{A}$ *mátrix konjugált transzponáltját.*
Egy $\mathbf{A}$ $d \times d$*-es mátrixnak, multiplicitással számolva,* d *szinguláris értéke van, ezeket rendezzük csökkenő (nem növekvő) sorrendbe és jelöljük a következőképpen:*

$$\alpha_1(\mathbf{A}) \geq \alpha_2(\mathbf{A}) \geq \cdots \geq \alpha_d(\mathbf{A}).$$

Jelölés. *Mostantól konkrét számokat döntött kisbetűk jelölnek, míg vektorokat vastagon szedettek, azaz a következő definícióban $i \in \{1, \ldots, m\}$, míg* $\mathsf{i} \in \{1, \ldots, m\}^n$, *azaz n-hosszú vektor. A vektorok hosszát jelölje* $|\mathsf{i}|$.
Jelöljük a mátrixok egy adott szorzatát az alsó indexben a tényezők fordított sorrendben való felsorolásával, például $\mathbf{A}_{256} = \mathbf{A}_6\mathbf{A}_5\mathbf{A}_2$. *Általánosan*

$$\mathbf{A}_{\mathsf{i}} = \mathbf{A}_{\mathsf{i}_n}\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{n-1}} \ldots \mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}.$$

Legyenek $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m\}$ 2×2-es, szigorúan pozitív elemű kontraktív mátrixok.
Ekkor általánosan $\mathbf{A}_i := \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, ahol a_i, b_i, c_i, d_i pozitív valós számok.
Definiáljuk minden mátrixhoz a következő egyváltozós függvényt:

$$\overline{A_i} : [0,1] \to [0,1],\ \overline{A_i}(t) = \frac{a_i t + b_i(1-t)}{(a_i + c_i)t + (b_i + d_i)(1-t)}.$$

14. Definíció. *Jelölje* $D\overline{A}_i$ *az* $\overline{A_i}$ *függvény deriváltját, azaz*

$$\begin{aligned} D\overline{A}_i(t) :=& \frac{(a_i - b_i)[(a_i + c_i)t + (b_i + d_i)(1-t)] - [a_i t + b_i(1-t)](a_i + c_i - b_i - d_i)}{[(a_i + c_i)t + (b_i + d_i)(1-t)]^2} = \\ =& \frac{(a_i - b_i)[(a_i + c_i)t + (b_i + d_i)(1-t)] - [a_i t + b_i(1-t)](a_i + c_i - b_i - d_i)}{[(a_i + c_i)t + (b_i + d_i)(1-t)]^2} = \\ =& \frac{a_i d_i - b_i c_i}{[(a_i + c_i)t + (b_i + d_i)(1-t)]^2}. \end{aligned}$$

A könnyebb olvashatóság kedvéért jelöljük $\mathbf{x}(t)$-vel a következő vektort: $\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$.

2. Megjegyzés. *A derivált kifejezhető tömörebb alakban is:*

$$D\overline{A}_i(t) = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t)||^2}.$$

Itt a norma a vektor 1-normáját jelöli, azaz a koordináták abszolút értékeinek összegét, de az abszolútérték elhagyható a pozitivitás miatt.

4. Állítás. $\overline{A_i}$ *a* $[0,1]$ *intervallumot a* $[0,1]$ *intervallumon belülre képezi.*

Bizonyítás. Először is vizsgáljuk meg a két végpont képét, legyen $\overline{p}_i$ a 0 $\overline{A_i}$ általi képe és legyen $\overline{q}_i$ az 1 képe. Ekkor $\overline{p}_i = \frac{b_i}{b_i+d_i}$, amire b_i és d_i pozitivitása miatt

$$0 = \frac{0}{b_i+d_i} \leq \frac{b_i}{b_i+d_i} \leq \frac{b_i+d_i}{b_i+d_i} = 1 \,\text{teljesül.}$$

Hasonlóan $\overline{q}_i = \frac{a_i}{a_i+c_i}$, és erre

$$0 = \frac{0}{a_i+c_i} \leq \frac{a_i}{a_i+c_i} \leq \frac{a_i+c_i}{a_i+c_i} = 1 \,\text{teljesül.}$$

A leképezés racionális törtfüggvény, ezért csak ott lehet szakadása, ahol a nevező 0, most pedig megmutatjuk, hogy $[0,1]$ intervallumbeli t-k esetén ez nem áll fenn.

A szakadáshoz az kell, hogy $(a_i+c_i)t + (b_i+d_i)(1-t) = 0$. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $b_i + d_i - a_i - c_i = 0$. Ezt visszahelyettesítve az előző egyenletbe, azt kapjuk, hogy ez $0 = b_i + d_i$ esetén van. Ez pedig nem lehet, hiszen b_i és d_i is pozitívak voltak. Tehát ekkor t-től függetlenül nem 0 az eredeti nevező.

Most tegyük fel, hogy $b_i + d_i - a_i - c_i \neq 0$, így kifejezhetjük t-t a következő módon:

$$t = \frac{b_i+d_i}{b_i+d_i-a_i-c_i}.$$

Ekkor a nevező lehet pozitív vagy negatív:

- A nevező pozitív. Ekkor, mivel a_i és c_i külön-külön is pozitívak voltak, így $b_i + d_i - a_i - c_i \leq b_i + d_i$, azaz a következő becslés teljesül:

$$\frac{b_i + d_i}{b_i + d_i - a_i - c_i} \geq \frac{b_i + d_i}{b_i + d_i} = 1.$$

- A nevező negatív. Ekkor, mivel a számláló pozitív, a hányadosnak is negatívnak kell lennie.

Tehát a függvénynek a $[0,1]$ intervallumon belül nincs szakadása, azaz itt folytonos. A leképezés deriváltja mindenhol nemnegatív, így a függvény monoton. Mivel a két végpontot az intervallumon belülre képzi az $\overline{A_i}$, ezért ezekből már következik, hogy az egész $[0,1]$ intervallumot a $[0,1]$ intervallumon belülre képzi. □

15. Definíció. *Legyen t_i az $\overline{A}_i$ leképezés fixpontja, azaz $\overline{A}_i(t_i) = t_i$.*

3. Megjegyzés. *A fixpont egyértelmű, ha az $\overline{A}_i$ leképezés deriváltja szigorúan kisebb 1-nél.*

5. Állítás. *Minden $t \in [0,1]$ esetén $\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)}{||\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)||} = \mathbf{x}(\overline{A_i}(t))$ fennáll.*

Bizonyítás. Egyszerűen fejtsük ki a szorzatokat:

- A baloldal:

$$\begin{pmatrix} a_i t + b_i(1-t) \\ c_i t + d_i(1-t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a_i t + b_i(1-t) + c_i t + d_i(1-t)}.$$

- A jobboldal:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_i t + b_i(1-t)}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \\ 1 - \frac{a_i t + b_i(1-t)}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_i t + b_i(1-t)}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \\ \frac{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)-a_i t - b_i(1-t)}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_i t + b_i(1-t)}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \\ \frac{c_i t + d_i(1-t)}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(a_i+c_i)t+(b_i+d_i)(1-t)} \begin{pmatrix} a_i t + b_i(1-t) \\ c_i t + d_i(1-t) \end{pmatrix}. \quad \square$$

1. Következmény. *Tehát az* $\mathbf{x}(t_i)$ *vektor sajátvektora az* $\mathbf{A}_i$ *mátrixnak, ugyanis* $\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i)}{||\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i)||} = \mathbf{x}(\overline{A}_i(t_i)) = \mathbf{x}(t_i)$, t_i *definíciója miatt. Ekkor*

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i) = \|\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i)\| \mathbf{x}(t_i).$$

Tehát ekkor $\lambda_1(\mathbf{A}_i) = \|\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i)\|$, *és így a 2. megjegyzés alapján*

$$D\overline{A}_i(t_i) = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{||\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i)||^2} = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\lambda_1(\mathbf{A}_i)^2}.$$

1. Lemma. *Vezessük be a következő jelölést:*

$$\max_{i,t} ||D\overline{A}_i(t)|| := \tau.$$

Tegyük fel, hogy $\tau < 1$, *ekkor létezik olyan* $c > 0$ *valós szám, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget bármely* $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{i} \in \{1, \ldots, m\}^n$, *valamint bármely* $t_1, t_2 \in [0,1]$ *esetén:*

$$\frac{||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_1)||}{||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_2)||} \leq e^{c|t_1 - t_2|}.$$

Bizonyítás. A Lagrange-középérték tétel szerint: Ha A folytonos leképezés a $[t_2, t_1]$ zárt, és differenciálható a $]t_2, t_1[$ nyílt intervallumon, akkor létezik olyan ξ pont a $[t_2, t_1]$ intervallumban, amire $D\overline{A}_{\mathsf{i}}(\xi) = \frac{\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_1) - \overline{A}_{\mathsf{i}}(t_2)}{t_1 - t_2}$.
Általánosan a következő igaz:

$$|\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_1) - \overline{A}_{\mathsf{i}}(t_2)| \leq (D\overline{A}_{\mathsf{i}}(\xi))|t_1 - t_2| \leq \tau|t_1 - t_2|.$$

Vizsgáljuk meg az állításbeli hányados logaritmusát:

$$\ln \frac{||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_1)||}{||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_2)||} = \ln ||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_1)|| - \ln ||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_2)|| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln ||A_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-1}}\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-2}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_1}(t_1))|| - \ln ||A_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-1}}\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-2}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_1}(t_2))|| \Big).$$

Erre a különbségre felhasználva a középérték tételt, $\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-1}}\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-2}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_1}(t_1)$-t és $\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-1}}\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-2}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_1}(t_2)$-t rövidítve rendre t'_1 és t'_2-vel, a következőt kapjuk:

$$\ln \frac{||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(t'_1)||}{||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(t'_2)||} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\ln ||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\xi)||\right) \cdot |t'_1 - t'_2| = \frac{\frac{\partial}{\partial t}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\xi)||}{||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\xi)||} \cdot |t'_1 - t'_2|.$$

Ekkor visszahelyettesítve t'_1-t és t'_2-t:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial t}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\xi)||}{||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_k}\mathbf{x}(\xi)||} \cdot |\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-1}}\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-2}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_1}(t_1) - \overline{A}_{\mathsf{i}_{k-1}}\overline{A}_{\mathsf{i}_{k-2}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_1}(t_2)|.$$

Az abszolútértékbeli különbséget a korábbi középérték tétel miatt felülről becsülhetjük τ^k-val, a számlálóbeli derivált és a nevező is konstans, így kiemelve $\max_{\xi,\mathsf{i}} \frac{\frac{\partial}{\partial t}||A_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(\xi)||}{||A_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(\xi)||} \cdot |t_1 - t_2|$-t, az összegzés felülről becsülhető τ geometriai sorával. Ezen geometriai sor összege $\frac{a_1}{1-\tau}$, ahol a_1 a sor első eleme. Tehát

$$\ln \frac{||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_1)||}{||\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_2)||} \leq \sum_{k=1}^{n} \max_{\xi,i} \frac{\frac{\partial}{\partial t}||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(\xi)||}{||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(\xi)||} \cdot |t_1 - t_2| \cdot \tau^k = \max_{\xi,i} \frac{\frac{\frac{\partial}{\partial t}||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(\xi)||}{||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(\xi)||} \cdot |t_1 - t_2|}{1 - \tau} \leq c'|t_1 - t_2|$$

egy megfelelő c' konstansra.

Így mindkét oldalt e, mint alapra emelve, éppen a keresett egyenlőtlenséget kapjuk. $\square$

2. Lemma. *Legyen ε olyan, hogy $\bigcup_i \overline{A}_i([0,1]) \subseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Ekkor létezik egy olyan $c > 0$ valós szám, hogy minden $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ valós paraméter és minden*

$\mathsf{i} \in \{1,\ldots,m\}^n$ *véges szó esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(t)\| \geq c\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\|.$$

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy nem létezik ilyen c. Ekkor létezik olyan (t_n) valós elemű sorozat és (i_n) szósorozat, amire

$$\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}_n}\mathbf{x}(t_n)\| \leq \frac{1}{n}\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}_n}\|$$

teljesül, valamint $t_n \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ fennáll minden $n \in \mathbb{N}$-re. Vizsgáljuk ekkor az $\frac{\mathbf{A}_{i_n}}{\|\mathbf{A}_{i_n}\|}$ 1-normájú mátrixok sorozatát. Mivel az 1-normájú mátrixok kompakt halmazt alkotnak, így minden benne futó sorozatnak van konvergens részsorozata, és a határérték is eleme a halmaznak, tehát létezik olyan $\mathbf{B}$ 1-normájú mátrix, amire $\lim_{n'\to\infty} \frac{\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{n'}}}{\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{n'}}\|} = \mathbf{B}$ teljesül valamilyen $(\mathsf{i}_{n'})$ részsorozatra. A valós számokra hasonlóan, $\lim_{n'\to\infty} t_{n'}$ legyen egy konvergens részsorozat, a határértékét jelölje t^*. Ekkor $\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t^*)\| = 0$, ami azonban nem lehet, hiszen $\mathbf{B}$ nemnegatív elemű, míg (t^*) pozitív elemű. Ez ellentmondás, így létezik a lemmában megadott tulajdonságú c konstans. $\square$

1.5. Szingulárisérték- és nyomás függvény

Ebben a részben ismertetjük a szingulárisérték-függvényt, majd ennek segítségével definiáljuk a nyomás függvényt, ami a Hausdorff-dimenzió definíciójában szereplő természetes fedés növekedésének sebességére ad jó közelítést. Ezeket K. J. Falconer vezette be az 1988-as cikkében. [3]

16. Definíció. *Legyen* $0 < t \leq d$ *valós szám és legyen* $\varphi^t : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ *a* *következő, $d \times d$-es mátrixokon értelmezett, függvény:*

$$\varphi^t(A) := \min_{1 \le k \le d} \alpha_1(A) \dots \alpha_{k-1}(A) \cdot \alpha_k(A)^{t-(k-1)} = \alpha_1(A) \dots \alpha_{\lfloor t \rfloor}(A) \cdot \alpha_{\lceil t \rceil}(A)^{t-\lfloor t \rfloor},$$

ahol $\alpha_i(A)$ jelöli az A mátrix i-edik legnagyobb szinguláris értékét. Ezt a φ^t leképezést nevezzük szingulárisérték-függvénynek.

4. Megjegyzés. *A fenti definíció csak $t \le d$-re van értelmezve. Mivel* $\det(A) = \alpha_1(A) \dots \alpha_{d-1}(A) \cdot \alpha_d(A)$, *így természetes a definíció következő kiterjesztése:*

$$\varphi^t(A) := \begin{cases} \alpha_1(A) \dots \alpha_{\lfloor t \rfloor}(A) \cdot \alpha_{\lceil t \rceil}(A)^{t-\lfloor t \rfloor} & ha \quad t \le d \\ |\det(A)|^{\frac{t}{d}} & ha \quad t > d. \end{cases}$$

17. Definíció. *Legyen $P(t) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(A_{\mathsf{i}})$ a nyomás függvény.*

5. Megjegyzés. *A definícióbeli határérték létezik, hiszen a szingulárisérték-függvény szubmultiplikativitása miatt fennáll a következő egyenlőtlenség*

$$\sum_{|\mathsf{k}|=p+q} \varphi^t(A_{\mathsf{k}}) = \sum_{|\mathsf{i}|=p} \sum_{|\mathsf{j}|=q} \varphi^t(A_{\mathsf{i}} \cdot A_{\mathsf{j}}) \le \sum_{|\mathsf{i}|=p} \sum_{|\mathsf{j}|=q} \varphi^t(A_{\mathsf{i}}) \cdot \varphi^t(A_{\mathsf{j}}).$$

A $\left\{ \log \sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(A_{\mathsf{i}}) \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szubadditív a logaritmus tulajdonságaiból következően, így a Fekete-lemma szerint létezik határértéke a sorozatnak. Tehát a nyomás függvény definíciója értelmes.

6. Állítás. *A nyomás függvény szigorúan monoton csökkenő és bi-Lipschitzes, azaz létezik olyan C_1 és C_2 negatív konstans, hogy bármely $s < t$ számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$C_1(t-s) \le P(t) - P(s) \le C_2(t-s)$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a következő átalakítás megtehető minden $t > s$ esetén:

$$\begin{aligned}\varphi^t(A) =&\alpha_1(A)\dots\alpha_{\lfloor t\rfloor}(A)\cdot\alpha_{\lceil t\rceil}(A)^{t-\lfloor t\rfloor} =\\ =&\alpha_1(A)\dots\alpha_{\lfloor s\rfloor}(A)\cdot\alpha_{\lceil s\rceil}(A)^{s-\lfloor s\rfloor}\cdot\alpha_{\lceil s\rceil}(A)^{\lfloor s\rfloor-s}\cdot\alpha_{\lceil s\rceil}(A)\dots\alpha_{\lceil t\rceil}(A)^{t-\lfloor t\rfloor} =\\ =&\varphi^s(A)\cdot\alpha_{\lceil s\rceil}(A)^{\lfloor s\rfloor-s}\cdot\alpha_{\lceil s\rceil}(A)\dots\alpha_{\lceil t\rceil}(A)^{t-\lfloor t\rfloor} =\\ =&\varphi^s(A)\cdot\alpha_{\lceil s\rceil}(A)^{\lfloor s\rfloor-s+1}\dots\alpha_{\lceil t\rceil}(A)^{t-\lfloor t\rfloor}.\end{aligned}$$

Mivel $\alpha_k(A) \leq \alpha_1(A)$ és $\alpha_k(A) \geq \alpha_d(A)$ minden k esetén, így az előző egyenletben minden tényezőt, az $\varphi^s(A)$ kivételével, egyesével lehet alulról vagy felülről becsülni rendre $\alpha_d(A)$-val vagy $\alpha_1(A)$-val. Ekkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\varphi^s(A)\cdot\alpha_d(A)^{t-s} \leq \varphi^t(A) \leq \varphi^s(A)\cdot\alpha_1(A)^{t-s}.$$

Leosztva $\varphi^s(A)$-vel:

$$\alpha_d(A)^{t-s} \leq \frac{\varphi^t(A)}{\varphi^s(A)} \leq \alpha_1(A)^{t-s}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket, legyen

$$\beta_1 := \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \alpha_1(A_i)$$

és

$$\beta_d := \min_{i\in\{1,\dots,m\}} \alpha_d(A_i).$$

Így ha $|\mathsf{i}| = n$, akkor

$$\alpha_1(A_{\mathsf{i}}) = \max_{|\mathbf{v}|=1} ||A_{\mathsf{i}}\mathbf{v}|| = \max_{|\mathbf{v}|=1} ||A_{\mathsf{i}_n}\dots A_{\mathsf{i}_1}\mathbf{v}|| \leq \max_{|\mathbf{v}_1|=1,\dots,|\mathbf{v}_n|=1} ||A_{\mathsf{i}_1}\mathbf{v}_1||\dots||A_{\mathsf{i}_n}\mathbf{v}_n|| \leq \beta_1^n$$

a maxinorma szubmultiplikativitása miatt és

$$\alpha_d(A_{\mathsf{i}}) = \min_{|\mathbf{v}|=1} ||A_{\mathsf{i}}\mathbf{v}|| = \min_{|\mathbf{v}|=1} ||A_{\mathsf{i}_n 1} \dots A_{\mathsf{i}_1}\mathbf{v}|| \geq \min_{|\mathbf{v}_1|=1,\dots,|\mathbf{v}_n|=1} ||A_{\mathsf{i}_1}\mathbf{v}_1|| \dots ||A_{\mathsf{i}_n}\mathbf{v}_n|| \geq \beta_d^n$$

a mininorma szupermultiplikativitása miatt.

Az állításban szereplő különbséget kifejtve:

$$P(t)-P(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(A_{\mathsf{i}}) - \log \sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathsf{i}}) \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \frac{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(A_{\mathsf{i}})}{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathsf{i}})} \right).$$

Bővítsük a számlálóban minden tagot a megfelelő $\varphi^s(\mathsf{i})$-vel:

$$P(t) - P(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \frac{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(A_{\mathsf{i}}) \cdot \frac{\varphi^s(A_{\mathsf{i}})}{\varphi^s(A_{\mathsf{i}})}}{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathsf{i}})} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \frac{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\varphi^t(A_{\mathsf{i}})}{\varphi^s(A_{\mathsf{i}})} \cdot \varphi^s(A_{\mathsf{i}})}{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathsf{i}})} \right).$$

Ekkor a $\frac{\varphi^t(A_{\mathsf{i}})}{\varphi^s(A_{\mathsf{i}})}$ hányadost tudjuk becsülni az előzők alapján felülről és alulról rendre $\beta_1^{n(t-s)}$-nel és $\beta_d^{n(t-s)}$-nel.

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \frac{\sum_{|\mathsf{i}|=n} (\beta_d^n)^{t-s} \cdot \varphi^s(A_{\mathsf{i}})}{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathsf{i}})} \right) \leq P(t)-P(s) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \frac{\sum_{|\mathsf{i}|=n} (\beta_1^n)^{t-s} \cdot \varphi^s(A_{\mathsf{i}})}{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(A_{\mathsf{i}})} \right).$$

Mivel $(\beta_d^n)^{t-s}$ és $(\beta_1^n)^{t-s}$ független i-től, így kiemelhető az összegzésből. A maradék hányados pedig éppen 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\log(\beta_d^n)^{t-s}\right) \le P(t)-P(s) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\log(\beta_1^n)^{t-s}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n(t-s)\log(\beta_d)\right) \le P(t)-P(s) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n(t-s)\log(\beta_1)\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \left((t-s)\log(\beta_d)\right) \le P(t)-P(s) \le \lim_{n\to\infty} \left((t-s)\log(\beta_1)\right)$$

Ekkor már $\lim_{n\to\infty}\left(\log(\beta_d)\right)$ és $\lim_{n\to\infty}\left(\log(\beta_1)\right)$ is független n-től, ezért a határérték elhagyható. Jelölje $\log(\beta_d)$ és $\log(\beta_1)$ konstansokat C_1 és C_2, és így az állítást beláttuk. □

1.6. Szingularitási- és hasonlósági dimenzió

A következő definíciót K.J. Falconer [3] vezette be:

18. Definíció. *Legyen $\mathcal{F} = \{\mathbf{A}_i x + t_i\}_{i=1}^n$ egy önaffin IFR. Nevezzük $\mathcal{F}$ halmazrendszer szingularitási dimenziójának a következőt:*

$$\dim_S(\mathcal{F}) := \inf\left\{t > 0 : \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}) < \infty\right\}.$$

3. Lemma. *Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer szingularitási dimenziója a nyomás függvény zérushelye, azaz $P(\dim_S(\mathcal{F})) = 0$.*

Bizonyítás. A fenti 6. állításban beláttuk, hogy a nyomás szigorúan monoton csökkenő, továbbá, hogy $P(0) = \log m > 0$ és $P(t) \to -\infty$, ha $t \to \infty$. Ezeket felhasználva alkalmazható a Bolzano folytonossági tétel, így lesz gyöke a nyomás függvénynek, és a monotonitás miatt ez a zérushely egyértelmű is. Legyen ez a pont t_0. A gyökteszt alapján tudjuk, hogy ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^t(A_{\mathsf{i}})} < 1,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^t(A_{\mathsf{i}})$ sor konvergens, ha pedig

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^t(A_{\mathsf{i}})}>1,$$

akkor divergens.

Legyen $\delta>\dim_S(E)$ tetszőleges. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^{\delta}(A_{\mathsf{i}})<\infty$ konvergens $\dim_S(E)$ definíciója miatt. Tehát $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^{\delta}(A_{\mathsf{i}})}\leq 1$, a gyökteszt miatt. Mivel

$$\begin{aligned}
e^{P(\delta)} &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^t(A_{\mathsf{i}})\right)= \\
&= \exp\left(\log\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^{\delta}(A_{\mathsf{i}})}\right)= \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^{\delta}(A_{\mathsf{i}})},
\end{aligned}$$

így $e^{P(\delta)}\leq 1$. Tehát $P(\delta)\leq 0$. Mivel t_0-ban a nyomás 0, így a nyomás szigorú monoton csökkenése miatt így $\delta\geq t_0$. Mivel ez tetszőleges $\delta>\dim_S(E)$-ra igaz, így $\dim_S(E)\geq t_0$.

Hasonlóan, tetszőleges $\delta^*<\dim_S(E)$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^{\delta^*}(A_{\mathsf{i}})=\infty$ divergens. Tehát a másik irányú gyökteszt miatt $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{|\mathsf{i}|=n}\varphi^{\delta^*}(A_{\mathsf{i}})}\geq 1$ teljesül, és így $P(\delta^*)\geq 0$, amiből pedig $\delta^*\leq t_0$ következik. Mivel ez az egyenlőtlenség tetszőleges $\delta^*<\dim_S(E)$ esetén fennáll, ezért $\dim_S(E)\leq t_0$. Tehát $\dim_S(E)\geq t_0$ és $\dim_S(E)\leq t_0$, amiből az következik, hogy $\dim_S(E)=t_0$, és éppen ezt akartuk bizonyítani. □

19. Definíció. *Az E önhasonló halmaz hasonlósági dimenziója az az s szám, amire teljesül $\sum_{i=1}^{m}r_i^s=1$.*

6. Megjegyzés. *Önhasonló esetben egy halmaz szingularitási dimenziója éppen megegyezik a hasonlósági dimenziójával, hiszen ekkor a leképezések mátrixainak minden szinguláris értéke megegyezik, és így* $\varphi^t(\mathbf{A}) = \alpha_1(\mathbf{A})^t$. *Mivel* $\mathbf{A}_i$ *leképezés skálázása* r_i, *így* $\varphi^t(\mathbf{A}_i) = r_i^t$. *Mivel hasonlósági leképezések felírhatóak a következő alakban:* $\mathbf{A}_i = r_i\mathbf{O}_i$, *ahol* $\mathbf{O}_i$ *ortonormált mátrix, így*

$$\mathbf{A}_{\mathsf{i}} = r_{\mathsf{i}_1} \dots r_{\mathsf{i}_n} \mathbf{O}_{\mathsf{i}_1} \dots \mathbf{O}_{\mathsf{i}_n},$$

ahol i *az* $\mathsf{i}_1 \dots \mathsf{i}_n$ *sorozat. Ekkor a nyomás függvény a következőképpen átalakítható:*

$$P(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{|\mathsf{i}|=n} \varphi^s(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{|\mathsf{i}|=n} r_{\mathsf{i}}^s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^{m} r_i^s \right)^n.$$

Ez már független n*-től, így*

$$P(s) = \log \sum_{i=1}^{m} r_i^s.$$

A szingularitási dimenzió az az s *érték, ahol a nyomás 0 értéket vesz fel, ez pedig pontosan akkor teljesül, ha* $\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$. *Ez pedig éppen a hasonlósági dimenzió definíciója.*

2. Összefüggések a definiált dimenziók között

Ebben a fejezetben megismerkedünk olyan feltételekkel, amelyek teljesülése esetén a korábban definiált dimenziófogalmak megegyeznek egymással, valamint megvizsgáljuk milyen egyenlőtlenségek igazak általában a különböző dimenziók között.

1. Tétel (Falconer-tétel)**.** *[4] Legyen* $\mathcal{S}$ *önhasonló IFR, attraktora* Λ. *Ekkor* *létezik a* $\dim_B(\Lambda)$ *doboz dimenzió és* $\dim_B(\Lambda) = \dim_H(\Lambda)$.

20. Definíció. *$\mathcal{F}$ teljesíti a nyílt halmaz feltételt (OSC), ha létezik olyan korlátos, nyílt $V \subset \mathbb{R}^d$ halmaz, amelyre*

- *$S_i(V) \subset V$ fennáll minden i esetén, és*
- *$S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$, ha $i \neq j$.*

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ teljesíti az erős nyílt halmaz feltételt (SOSC), ha létezik olyan $V \subset \mathbb{R}^d$, amire fennállnak a korábbi feltételek, valamint $V \cap \Lambda = \emptyset$.

2. Tétel (Hutchinson-tétel)**.** *[9] Legyen $\mathcal{S}$ olyan önhasonló IFR, ami teljesíti az OSC-t. Legyen s az $\mathcal{S}$ hasonlósági dimenziója. Ekkor* $0 < \mathcal{H}^s(\Lambda) < \infty$ *teljesül a Λ attraktorra. Továbbá* $\dim_B(\Lambda) = \dim_H(\Lambda) = s$.

Önaffin esetben az szingularitási dimenzió és a Hausdorff-dimenzió nem feltétlenül egyezik meg, ehhez extra feltételek szükségesek. Általánosságban csak a következőt mondhatjuk:

7. Állítás (Falconer-tétel)**.** *[4] Legyen* $\mathcal{S} = \{\mathbf{A}_i x + t_i\}_{i=1}^m$ *önaffin IFR* $\mathbf{R}^d$*-ben, attraktora pedig legyen* Λ*. Ekkor*

$$\overline{\dim}_B(\Lambda) \leq \min\{d, \dim_S(\mathcal{S})\}.$$

3. Tétel (Solomyak-tétel)**.** *[14] Legyen $m \geq 2$ és $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ olyan $d \times d$-es nemszinguláris mátrixok halmaza, amikre teljesül a következő feltétel:*

$$||A_i|| < \frac{1}{2}$$

mindegyik $i \in \{1, \ldots, m\}$-re. Legyen

$$\mathcal{T} = (\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_m)$$

d-dimenziós vektorok egy halmaza, valamint legyen

$$\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \{\mathbf{A}_i x + \mathsf{t}_i\}_{i=1}^m$$

önaffin IFR $\mathbb{R}^d$ *felett és* $\Lambda^{\mathcal{T}}$ *az attraktora.*
Ekkor $\mathcal{L}^{md}$*-majdnem minden* $\mathcal{T}$ *esetén teljesül a következő egyenlet:*

$$\dim_H(\Lambda^{\mathcal{T}}) = \dim_B(\Lambda^{\mathcal{T}}) = \dim_S(\mathcal{F}^{\mathcal{T}}).$$

21. Definíció. *Legyen* $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m\}$ *nemszinguláris* $d \times d$*-es mátrixok egy véges halmaza. Azt mondjuk, hogy* $\mathcal{A}$ *irreducibilis, ha nincs olyan nemtriviális altere* $\mathbb{R}^d$*-nek, amit minden* $\mathcal{A}$*-ban lévő mátrix fixen hagy.*
Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ *erősen irreducibilis, ha nincs olyan* $V_1, \ldots, V_k$ *nemtriviális alterek véges halmaza* $\mathbb{R}^d$*-nek, amit minden* $\mathcal{A}$*-ban lévő mátrix fixen hagy, azaz amire*

$$\mathbf{A}_i \left(\bigcup_{j=1}^k V_j \right) = \bigcup_{j=1}^k V_j$$

teljesül minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ *esetén.*

22. Definíció (Hueter–Lalley-feltétel)**.**
Legyen $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^k$ 2×2*, valós elemű, invertálható mátrixok egy* k*-elemű halmaza, legyen* $\{\mathsf{b}_i\}_{i=1}^k$ $\mathbb{R}^2$*-beli vektorok halmaza, továbbá definiáljuk az* S_i*,* $\mathbb{R}^2$*-ből* $\mathbb{R}^2$*-be menő leképezéseket a korábbiakhoz hasonlóan, azaz* $S_i(x) := \mathbf{A}_i x + \mathsf{b}_i$ *minden* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy az* $\{A_i\}_{i=1}^k$ *mátrixok teljesítik a Hueter–Lalley-feltételt, ha a következők igazak:*

1. $||A_i|| < 1$ *minden* $i = \{1, \ldots, k\}$ *esetén.*

2. $\alpha_1(A_i)^2 < \alpha_2(A_i)$ *minden* $i = \{1, \ldots, k\}$ *esetén.* *(*$\alpha_1(A_i)$ *jelöli a legnagyobb, míg* $\alpha_2(A_i)$ *a második legnagyobb szinguláris értékét az* A_i

mátrixnak.)

3. $A_1^{-1}Q_2, \ldots, A_k^{-1}Q_2$ *páronként diszjunktak, ahol* Q_2 *a második kvadráns, azaz* $Q_2 = \{(x,y) \,:\, y \leq 0, y \geq 0\}$.

4. *Létezik egy olyan* V *korlátos, nyílt halmaz, amelyre az* $\overline{S_i(V)}$ *halmazok diszjunktak, ha* $i = \{1,\ldots,k\}$. *(*$\overline{S_i(V)}$ *a* V *halmaz* S_i *általi képének lezártja.)*

4. Tétel (Hueter–Lalley-tétel)**.** *[8] Ha a Hueter–Lalley-feltétel teljesül, akkor*

$$0 < \dim_H(\Lambda) = \dim_S(\Lambda) < 1.$$

A Hueter–Lalley-feltétel 2-ik és 3-ik pontja erős megkötéseket ad a mátrixokra, a 4-ik pontja pedig a leképezések képei közötti bármilyen átfedést tiltja. A következő tétel ezeken a feltételeken enyhít.

5. Tétel (Bárány–Hochman–Rapaport-tétel)**.** *[1] Legyen*

$$\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \{f_i(x) = \mathbf{A}_i x + \mathsf{t}_i\}_{i=1}^{m}$$

olyan kétdimenziós önaffin IFR, ami teljesíti az SOSC-t és a mátrixok $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_m\}$ *halmaza erősen irreducibilis. Ekkor*

$$\dim_H(\Lambda) = \dim_B(\Lambda) = \dim_S(\mathcal{F}^{\mathcal{T}}),$$

ahol Λ *az* $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ *attraktora.*

3. Pollicott–Vytnova-, és Morris-módszer

Ebben a fejezetben operátorelméletbeli tételek segítségével közelítjük halmazok Hausdorff-dimenzióját. A továbbiakban feltesszük, hogy minden mátrix pozitív elemű. M. Pollicott és P. Vytnova a [12] cikkükben bevezette a következő operátort:

23. Definíció. *Legyen $t \in \mathbb{C}$ komplex paraméter és $\mathcal{F} = \{\mathbf{A}_i x + t_i\}_{i=1}^n$ önaffin IFR adott, ekkor definiáljuk az $\mathcal{L}_t : B \to B$ transzfer operátor a következőképpen:*

$$\mathcal{L}_t(w(z)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k \psi_i(z)^t w(\overline{A}_i z) & ha \quad 0 < \dim_S(\mathcal{F}) < 1 \\ \sum_{i=1}^k \psi_i(z)^{2-t} |\det(\mathbf{A}_i)|^{t-1} w(\overline{A}_i z) & ha \quad 1 < \dim_S(\mathcal{F}) < 2, \end{cases}$$

ahol

$$\psi_i(z) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A}_i)}{D\overline{A}_i(\overline{A}_i z)}}.$$

A. Grothendieck 1955-ös cikkében bevezette a következő definíciót és látta be a 8. tételt, lásd [5]. Ő egy operátorosztályt vizsgált, ám az előbb definiált transzfer operátor is ezen osztálybeli:

24. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{L} : B \to B$ lineáris operátor nukleáris a B Banach-téren, ha a következők teljesülnek:*

- *léteznek olyan v_n vektorok B-ben, amikre $||v_n|| = 1$,*
- *léteznek olyan $l_n : B \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések, amikre $||l_n|| = 1$,*
- *létezik egy abszolút összegezhető λ_n komplex sorozat, amire*

$$\mathcal{L}(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n l_n(v)$$

teljesül minden B-beli v vektorra.

I. D. Morris [11] cikkében a következő definíciót alkalmazta. Később belátjuk, hogy minden nyom-osztályú operátor nukleáris, így Grothendieck által belátott tétel igaz lesz az ilyen operátorokra.

25. Definíció. *Egy $\mathcal{L} : H \to H$ végtelen dimenziós Hilbert-téren ható operátort nyom-osztályúnak (angolul* trace-class*-nak) nevezünk, ha az $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat összegezhető, ahol*

$$s_n(\mathcal{L}) = \inf\{||\mathcal{L} - F|| : rank(F) < n\}.$$

6. Tétel. *[11] Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{C}^k$ egy nemüres, nyílt halmaz, és legyen $\Omega_0 \subset \Omega$ nemüres, nyílt részhalmaza. Legyenek $\phi_1, \ldots, \phi_m : \Omega \to \Omega_0$ holomorf leképezések, és $\psi_1, \ldots, \psi_m : \Omega \to \Omega_0$ holomorf és korlátos leképezések. Ekkor a következőképpen definiált $\mathcal{L} : A^2(\Omega) \to A^2(\Omega)$ operátor*

$$\mathcal{L}f(z) := \sum_{j=1}^{m} \psi_j(z) f(\phi_j(z))$$

korlátos, lineáris operátor $A^2(\Omega)$-n és léteznek olyan $C, \gamma > 0$ csak Ω, Ω_0-tól függő konstansok, amikre

$$s_n(\mathcal{L}) \leq C \left(\sum_{j=1}^{m} \sup_{z \in \Omega} |\phi_j(z)| \right) \exp(-\gamma n^{\frac{1}{k}})$$

teljesül minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor $\mathcal{L}$ nyom-osztályú operátor.

7. Tétel (Lidskii-tétel)**.** *[13] Legyen $\mathcal{L}$ egy H komplex, szeparábilis Hilbert-téren ható, nyom-osztályú operátor és legyen $(\lambda_n)_{n=1}^{M}$ az $\mathcal{L}$ operátor nem-nulla sajátértékeinek sorozata ismétlésekkel, azaz minden sajátérték az algebrai multiplicitásaszor szerepeljen. $M \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Ekkor H minden $(e_n)_{n=1}^{\infty}$*

ortonormált bázisa esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathcal{L} e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{M} \lambda_n .$$

Mindkét sorozat abszolút konvergens, és a közös értéket az $\mathcal{L}$ operátor nyomának nevezzük. Jelölés: $Tr(\mathcal{L})$.

8. Tétel (Grothendieck-tétel)**.** *Minden pozitív t számra az $\mathcal{L}_t : B \to B$ operátor nukleáris és az operátor n-edik hatványának nyoma a következő összeggel írható le:*

$$Tr(\mathcal{L}_t^n) = \begin{cases} \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{(\Psi_n(\mathsf{i}))^t}{1 - D\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_{\mathsf{i}})} & ha \quad 0 < \dim_S(\mathcal{F}) < 1 \\ \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{(\Psi_n(\mathsf{i}))^{2-t} |\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})|^{t-1}}{1 - D\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_{\mathsf{i}})} & ha \quad 1 < \dim_S(\mathcal{F}) < 2, \end{cases}$$

minden 1-nél nem kisebb n természetes számra, ahol

$$\Psi_n(\mathsf{i}) := \prod_{j=1}^{n-2} \psi_{\mathsf{i}_j}(\overline{A}_{\mathsf{i}_{j+1}} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_{n-1}}(t_{\mathsf{i}})) \cdot \psi_{\mathsf{i}_{n-1}}(t_i).$$

2. Következmény. *Így a 23. definícióban meghatározott transzfer operátor nyom-osztályú, ezért teljesíti a 7. és a 8. tételt.*

7. Megjegyzés. *Ha $0 < t \leq 1$, akkor a nyomás függvény éppen $\lambda_1(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})$. A 2. megjegyzés szerint*

$$D\overline{A}_{\mathsf{i}}(t_{\mathsf{i}}) = \frac{\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})}{\lambda_1(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})^2},$$

így

$$\Psi_n(\mathsf{i}) = \lambda_1(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}).$$

Ugyanis

$$\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) = \left(\frac{\det(\mathbf{A}_\mathsf{i})}{D\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{i})}\right)^{1/2} = \left(\frac{\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}) \cdot \det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}_2}) \dots \det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{n-1}})}{D\overline{A}_{\mathsf{i}_1}(\overline{A}_{\mathsf{i}_2} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_{n-1}} t_\mathsf{i}) \cdot D\overline{A}_{\mathsf{i}_2}(\overline{A}_{\mathsf{i}_3} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_{n-1}} t_\mathsf{i}) \dots D\overline{A}_{\mathsf{i}_{n-1}}(t_\mathsf{i})}\right)^{1/2} =$$

$$=\psi_{\mathsf{i}_1}(\overline{A}_{\mathsf{i}_2} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_{n-1}}(t_\mathsf{i})) \cdot \psi_{\mathsf{i}_2}(\overline{A}_{\mathsf{i}_3} \dots \overline{A}_{\mathsf{i}_{n-1}}(t_\mathsf{i})) \dots \psi_{\mathsf{i}_{n-1}}(t_\mathsf{i}) = \Psi_n(\mathsf{i}).$$

Ha pedig $1 < t \leq 2$, *akkor*

$$\Psi_n(\mathsf{i}) = \left(\frac{\det(\mathbf{A}_\mathsf{i})}{D\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{i})}\right)^{1/2},$$

míg a szingulárisérték-függvény

$$\varphi^t(\mathbf{A}_\mathsf{i}) = \alpha_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \cdot \alpha_2(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{t-1},$$

ami pedig uniform konstans erejéig összehasonlítható a következővel

$$\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \cdot \lambda_2(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{t-1}.$$

Azaz létezik olyan C *konstans, amire* $\frac{1}{C}\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \leq \alpha_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \leq C\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i})$ *teljesül minden* $\mathsf{i} \in \{1, \dots, m\}^n$ *vektor esetén. Lásd 2. lemma. Ekkor vegyük a következő átalakítást:*

$$\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \cdot \lambda_2(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{t-1} = \big(\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \cdot \lambda_2(\mathbf{A}_\mathsf{i})\big)^{t-1} \cdot \lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{2-t} = \det(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{t-1} \cdot \left(\left(\frac{\det(\mathbf{A}_\mathsf{i})}{D\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{i})}\right)^{1/2}\right)^{2-t}.$$

Tehát ilyenkor

$$\varphi^t(\mathbf{A}_\mathsf{i}) \asymp \det(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{t-1} \cdot \left(\left(\frac{\det(\mathbf{A}_\mathsf{i})}{D\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{i})}\right)^{1/2}\right)^{2-t} = \det(\mathbf{A}_\mathsf{i})^{t-1} \cdot \big(\Psi_n(\mathsf{i})\big)^{2-t}.$$

26. Definíció. *Legyen $\mathcal{L}$ nyom-osztályú operátor, $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ az $\mathcal{L}$ sajátértékei az algebrai multiplicitásuknak megfelelő mennyiségben. Ekkor* $\det(I - z\mathcal{L})$*-t definiáljuk a következő szorzatként:*

$$\det(I - z\mathcal{L}) := \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z\lambda_n).$$

8. Megjegyzés. *Grothendieck [6] belátta, hogy létezik olyan $0 < \theta < 1$ paraméter, amire*

$$\det(\mathbf{I} - z\mathcal{L}_t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) z^k,$$

ahol $|a_k(t)| = O(\theta^{k^2})$, egészen pontosan a következő:

$$a_k(t) = \frac{(-1)^k}{k!} \det \begin{pmatrix} Tr(\mathcal{L}_t) & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Tr(\mathcal{L}_t^2) & Tr(\mathcal{L}_t) & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ Tr(\mathcal{L}_t^3) & Tr(\mathcal{L}_t^2) & Tr(\mathcal{L}_t) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Tr(\mathcal{L}_t^{n-1}) & Tr(\mathcal{L}_t^{n-2}) & Tr(\mathcal{L}_t^{n-3}) & \dots & Tr(\mathcal{L}_t) & 1 \\ Tr(\mathcal{L}_t^{n}) & Tr(\mathcal{L}_t^{n-1}) & Tr(\mathcal{L}_t^{n-2}) & \dots & Tr(\mathcal{L}_t^2) & Tr(\mathcal{L}_t) \end{pmatrix}.$$

$z = 1$ esetén ezen sorozat gyöke éppen a szingularitási dimenziót adja. Ha az összegzés azonban nem ∞-ig megy, akkor jó közelítést kapunk a szingularitási dimenzióra, erről szól a következő tétel.

9. Tétel (Pollicott–Vytnova-tétel)**.** *[12] Ha a Hueter–Lalley-feltétel teljesül, és d_N jelöli az $1 + \sum_{k=1}^{N} a_k(d) = 0$ egyenlet megoldását, akkor létezik egy olyan $0 < \theta < 1$ valós szám, amire $|dim_S(\Lambda) - d_N| = O(\theta^{N^2})$ teljesül minden $N \geq 1$ esetén.*

I. Morris kiterjesztette a Pollicott és Vytnova eredményeit magasabb dimenziókra, most ezeket az eredményeket ismertetjük és a hozzájuk szükséges feltételeket.

27. Definíció. *Legyen* $\mathbf{A}$ *valós értékű,* $d \times d$ *méretű mátrixok halmaza. Azt mondjuk, hogy a* $(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m)$ *az* $\mathbf{A}$ *multikúpja, ha a következők teljesülnek:*

1. *Minden* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *esetén* $\mathcal{K}_j$ *konvex, zárt részhalmaza* $\mathbb{R}^d$*-nek, nemüres belsővel úgy, hogy* $\lambda \mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{K}_j$ *fennáll minden nemnegatív, valós* λ*-ra.*

2. *Létezik egy olyan* $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^d$ *egységvektor, amire* $\langle \mathsf{u}, \mathsf{w} \rangle > 0$ *teljesül minden* $\mathsf{u} \in \bigcup_{j=1}^m \mathcal{K}_j$ *esetén.*

3. *Minden* A *mátrixhoz, amire* $A \in \mathbf{A}$ *és minden* j *egészhez, amire* $j \in \{1, \ldots, m\}$*, létezik egy olyan* l*, amire* $A(\mathcal{K}_j \setminus \{0\}) \subset (\operatorname{Int} \mathcal{K}_l) \cup (-\operatorname{Int} \mathcal{K}_l)$

4. *Bármely* $j, k \in \{1, \ldots, m\}$*-re teljesül* $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_k = \{0\}$*, ha* $j \neq k$*.*

Ha $\mathbf{A}$*-nak létezik multikúpja, akkor azt mondjuk, hogy* $\mathbf{A}$ *multipozitív. Akkor mondjuk, hogy* $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m)$ *valós értékű,* $d \times d$ *méretű mátrixok halmaza* k*-szorosan multipozitív, ha a* $\{\mathbf{A}_1^k, \ldots, \mathbf{A}_m^k\}$ *halmaz multipozítiv.*

10. Tétel (Morris-tétel)**.** *[11] Legyenek* $2 \geq d, N$ *és* $0 \leq k < d$ *természetes számok,* $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_N)$ $d \times d$*-es, valós értékű mátrixok. Tegyük fel, hogy* $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_N)$ k*-szorosan és* $k+1$*-szeresen is multipozitív. Minden* $n \geq 1$ *természetes számra és* s *valós számra definiáljuk a következő függvényt:*

$$t_n(s) := \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1 \left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}\right)^{\binom{d}{k}-1} \lambda_1 \left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}\right)^{\binom{d}{k+1}-1} \varrho\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}\right)^{k+1-s} \varrho\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}\right)^{s-k}}{p'_{\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}\right)\right) p'_{\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}\right)\right)}$$

ahol $\varrho(\mathbf{B})$ *jelöli a* $\mathbf{B}$ *mátrix spektrálsugarát,* $\mathbf{B}^{\wedge k}$ *a* $\mathbf{B}$ *mátrix saját magával vett* k*-adik külső szorzatát,* $p'_{\mathbf{B}}(x_0)$ *pedig a karakterisztikus polinom első de-*

riváltjának, azaz

$$p_{\mathbf{B}}(x) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{B})$$

függvény deriváltjának, az x_0 *pontban felvett értékét. Ekkor* $t_n(s)$ *éppen* $Tr(\mathcal{L}_s^n)$*. Ezen kívül definiáljunk egy másik függvényt,* $a_n(s)$*-et. Ez* $n = 0$ *esetén a vegyen fel 1-et minden* s *értékre, és minden* $n \leq 1$ *természetes számra pedig legyen a következő:*

$$a_n(s) := \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \det \begin{pmatrix} t_1(s) & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_2(s) & t_1(s) & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ t_3(s) & t_2(s) & t_1(s) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1}(s) & t_{n-2}(s) & t_{n-3}(s) & \dots & t_1(s) & 1 \\ t_n(s) & t_{n-1}(s) & t_{n-2}(s) & \dots & t_2(s) & t_1(s) \end{pmatrix}.$$

Minden $s \in [k, k+1]$ *esetén jelölje* $r_n(s)$ *a* $p_{n,s}(x) := \sum_{i=0}^{n} a_n(s)x^i$ *polinom legkisebb pozitív valós gyökét. Ekkor létezik olyan* n_0 *természetes szám, amire* $r_n(s)$ *jól definiált minden* $s \in [k, k+1]$ *esetén, továbbá minden* $n \geq n_0$*-ra fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\left| e^{P(\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_N;s)} - \frac{1}{r_n(s)} \right| \leq K e^{-\gamma n^{\alpha}},$$

ahol $K, \gamma > 0$ *megfelelő,* s*-től független konstansok és* $\alpha = \frac{\binom{d+1}{k+1}-1}{\binom{d+1}{k+1}-2} > 1$*. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy olyan* $|||.|||$ *norma* $\mathbb{R}^d$*-n, hogy*

$$\max_{1 \leq i \leq N} |||\mathbf{A}_i||| < 1,$$

és $\dim_s(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N) \in (k, k+1)$*. Ekkor minden elég nagy* n *esetén, az* $s \mapsto \frac{1}{r_n(s)}$ *függvény szigorúan monoton csökkenő és konvex a* $[k, k+1]$ *halma-*

zon, valamint létezik és egyértelmű az az $s_n \in [k, k+1]$, amire $r_n(s_n) = 1$. Továbbá a K' és γ' pozitív konstansokat meg lehet választani úgy, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_N$-től függően, hogy minden n esetén a következő egyenlőtlenség fennálljon:

$$\left|\dim_s(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_N) - s_n\right| \leq K' e^{-\gamma' n^\alpha}.$$

9. Megjegyzés. *A tételben definiált $t_n(s)$ függvény éppen $Tr(\mathcal{L}_s^n)$. Két dimenziós esetben a tétel eredménye sokkal egyszerűbb alakban is felírható, hiszen ha d=2, akkor $\mathbf{A}^{\wedge 0} = 1$, $\mathbf{A}^{\wedge 1} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\wedge 2} = \det(\mathbf{A})$ teljesül, így $\varrho(\mathbf{A}^{\wedge 0}) = 1$, $\varrho(\mathbf{A}^{\wedge 1}) = \lambda_1(\mathbf{A})$ és $\varrho(\mathbf{A}^{\wedge 2}) = |\det(\mathbf{A})|$. Továbbá tudjuk, hogy*

$$p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 0}}\left(\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 0})\right) = \left(\det(x\mathbf{I} - 1)\right)'(1) = ((x-1))'(1) = 1,$$
$$p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 1}}\left(\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 1})\right) = \left(\det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_\mathsf{i})\right)'(\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i})) = 2 \cdot \lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) - Tr(\mathbf{A}_\mathsf{i}) = \lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) - \lambda_2(\mathbf{A}_\mathsf{i}),$$

és

$$p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 2}}(\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 2})) = (\det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 2}))'(\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 2})) = (x - \det(\mathbf{A}_\mathsf{i}))'(\det(\mathbf{A}_\mathsf{i})) = 1.$$

Ekkor esetszétválasztással:
Ha $0 < s < 1$, akkor $k = 0$ és így t_n a következő:

$$t_n(s) = \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge k}\right)^{\binom{d}{k}-1} \lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge(k+1)}\right)^{\binom{d}{k+1}-1} \varrho\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge k}\right)^{k+1-s} \varrho\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge(k+1)}\right)^{s-k}}{p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge k}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge k}\right)\right) p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge(k+1)}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge(k+1)}\right)\right)} =$$
$$= \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 0}\right)^{\binom{2}{0}-1} \lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 1}\right)^{\binom{2}{1}-1} \varrho\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 0}\right)^{1-s} \varrho\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 1}\right)^{s}}{p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 0}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 0}\right)\right) p'_{\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 1}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}^{\wedge 1}\right)\right)} =$$
$$= \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{1 \cdot \lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}\right) \cdot 1 \cdot \lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i})^s}{1 \cdot (\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) - \lambda_2(\mathbf{A}_\mathsf{i}))} = \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_\mathsf{i}\right)^{s+1}}{\lambda_1(\mathbf{A}_\mathsf{i}) - \lambda_2(\mathbf{A}_\mathsf{i})} = \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\Psi_n(\mathsf{i})^s}{1 - D\overline{A}_\mathsf{i}}.$$

Ha pedig $1 < s < 2$, *akkor* $k = 1$ *és a következő igaz:*

$$
\begin{aligned}
t_n(s) &= \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}\right)^{\binom{d}{k}-1} \lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}\right)^{\binom{d}{k+1}-1} \varrho\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}\right)^{k+1-s} \varrho\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}\right)^{s-k}}{p'_{\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge k}\right)\right) p'_{\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge(k+1)}\right)\right)} = \\
&= \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 1}\right)^{\binom{2}{1}-1} \lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 2}\right)^{\binom{2}{2}-1} \varrho\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 1}\right)^{2-s} \varrho\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 2}\right)^{s-1}}{p'_{\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 1}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 1}\right)\right) p'_{\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 2}}\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}^{\wedge 2}\right)\right)} = \\
&= \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\right) \cdot 1 \cdot \lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\right)^{2-s} |\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})|^{s-1}}{(\lambda_1(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}) - \lambda_2(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})) \cdot 1} = \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{\lambda_1\left(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\right)^{3-s} |\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})|^{s-1}}{\lambda_1(\mathbf{A}_{\mathsf{i}}) - \lambda_2(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})} = \\
&= \sum_{|\mathsf{i}|=n} \frac{(\Psi_n(\mathsf{i}))^{2-s} |\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})|^{s-1}}{1 - D\overline{A}_{\mathsf{i}}}.
\end{aligned}
$$

4. McMullen-módszer

Ebben a fejezetben egy másik közelítési módszert adunk a Hausdorff-dimenzióra, amit McMullen más környezetben alkalmazott módszerén alapul. [10]
Legyen $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^m$ pozitív elemű mátrixok egy m elemű halmaza, legyen $\overline{A}_i$ a 14. definícióban megadott függvény minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén, valamint teljesüljön $\max_{i,t} ||D\overline{A}_i(t)|| < 1$, ezt a maximumot jelöljük τ-val.

28. Definíció. *Definiáljuk az* $\mathbf{U}_n^{(s)}$ *mátrixot elemeivel, az* s *értékétől függően. Ha* $0 < s < 1$, *a mátrix legyen a következő:*

$$\mathbf{U}_n^{(s)} := \left(||\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(t_{\mathsf{j}})||^s\right)_{\mathsf{i},\mathsf{j} \in \{1,\ldots,m\}^n},$$

ha pedig $1 < s < 2$, *akkor*

$$\mathbf{U}_n^{(s)} := \left(\det(\mathbf{A}_{\mathsf{i}})^{s-1} ||\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(t_{\mathsf{j}})||^{2-s}\right)_{\mathsf{i},\mathsf{j} \in \{1,\ldots,m\}^n}.$$

8. Állítás. *Legyen s_n a megoldása a következő egyenletnek:*

$$\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s_n)}\right) = 1.$$

Ekkor [10] alapján $s_n \to \dim_H(\Lambda)$, méghozzá exponenciális sebességgel, azaz létezik olyan $0 < C < 1$ konstans, amire teljesül:

$$\left|\dim_H(\Lambda) - s_n\right| \leq C\frac{\tau^n}{n}.$$

9. Állítás. *Létezik olyan $c > 0$ valós szám, hogy minden n, m természetes számra teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$e^{-\tau^n mc} \leq \frac{Tr\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m}{Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)} \leq e^{\tau^n mc}.$$

Bizonyítás. Csak a $0 < s < 1$ esetre fogjuk belátni az állítást, $1 < s < 2$ esetén hasonlóan bizonyítható.

Először is vegyünk észre egy hasznos átalakítást:

$$||\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})|| = ||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})|| \cdot ||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(\overline{A_k}t_{i,k})||.$$

Hiszen $\mathbf{A}_k\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k}) = \lambda\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})$, mivel $\mathbf{x}(t_{i,k})$ sajátvektora $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k$-nak, viszont definíció szerint $\mathbf{A}_k\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t_{k,i}) = \lambda\mathbf{x}(t_{k,i})$. Azaz $\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})$ és $\mathbf{x}(t_{k,i})$ is sajátvektora $\mathbf{A}_k\mathbf{A}_i$-nek, így az egyértelműség miatt azonos irányúak. $\mathbf{x}(t_{k,i})$ definíció szerint 1-normájú, így a másik sajátvektort normálva egyenlőséget kapunk:

$$\frac{\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})}{||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||} = \mathbf{x}(t_{k,i})$$

Tehát ekkor:

$$||\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})|| = \frac{||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||}{||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||}\cdot||\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})|| = ||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||\cdot\frac{||\mathbf{A}_i\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||}{||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||} =$$
$$=||\mathbf{A}_k\mathbf{x}(t_{i,k})||\cdot||\mathbf{A}_i\mathbf{x}(\overline{A_k}t_{i,k})||.$$

Ekkor $Tr\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right) = \sum_{|\mathsf{i}|=n}||\mathbf{A}_\mathsf{i}\mathbf{x}(t_\mathsf{i})||^s$, hiszen

$$\left[\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right]_{i,j} = \sum_{|\mathsf{i}_1|,\cdots,|\mathsf{i}_{m-1}|=n}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_i}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_1})||^s\cdot||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_2})||^s\dots||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{m-1}}\mathbf{x}(t_j)||^s,$$

így

$$Tr\left[\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right] = \sum_{|\mathsf{i}_1|,\cdots,|\mathsf{i}_m|=n}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_m}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_1})||^s\cdot||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_2})||^s\dots||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{m-1}}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_m})||^s.$$

Továbbá

$$Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right) = \sum_{|\mathsf{i}|=m\cdot n}||\mathbf{A}_\mathsf{i}\mathbf{x}(t_\mathsf{i})||^s = \sum_{|\mathsf{i}_1|,\dots,|\mathsf{i}_m|=n}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}\dots\mathbf{A}_{\mathsf{i}_m}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_m})||^s =$$
$$= \sum_{|\mathsf{i}_1|,\dots,|\mathsf{i}_m|=n}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_m}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_m})||^s\cdot||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}\dots\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{m-1}}\mathbf{x}(\overline{A_{\mathsf{i}_m}}t_{\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_m})||^s =$$
$$= \sum_{|\mathsf{i}_1|,\dots,|\mathsf{i}_m|=n}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_m}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_m})||^s\cdot||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_1}\dots\mathbf{A}_{\mathsf{i}_{m-1}}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_m,\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_{m-1}})||^s =$$
$$= \sum_{|\mathsf{i}_1|,\dots,|\mathsf{i}_m|=n}\left(\prod_{j\in\{1,\dots,m\}}||\mathbf{A}_{\mathsf{i}_j}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}_{j+1},\dots,\mathsf{i}_m,\mathsf{i}_1,\dots,\mathsf{i}_j})||^{2s}\right).$$

Az 1. lemma miatt $\frac{||\mathbf{A}_\mathsf{i}\mathbf{x}(t_\mathsf{i})||}{||\mathbf{A}_\mathsf{i}\mathbf{x}(\mathbf{A}_\mathsf{i}t_\mathsf{j})||} \le e^{c|t_\mathsf{i}-\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{j})|}$, viszont

$$|t_\mathsf{i}-\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{j})| = |\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{i})-\overline{A}_\mathsf{i}(t_\mathsf{j})| = (D\overline{A}_\mathsf{i})|t_\mathsf{i}-t_\mathsf{j}| \le c\tau^n,$$

hiszen t_i fixpontja $\overline{A}_\mathsf{i}$-nek , $|t_\mathsf{i}-t_\mathsf{j}|\le 1$, valamint a deriváltról feltettük, hogy kisebb τ-nál.

$$Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)=\sum_{|\mathrm{i}_1|,\dots,|\mathrm{i}_m|=n}\left(||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_1}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_m,\dots,\mathrm{i}_1})||^s\cdot\prod_{i\in\{1,\dots,m\}}||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_i}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_1,\dots,\mathrm{i}_m})||^s\right)\leq$$

$$\leq e^{mc\tau^n}\sum_{|\mathrm{i}_1|,\dots,|\mathrm{i}_m|=n}\ \prod_{i\in\{1,\dots,m-1\}}||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_i}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_{i+1}})||^s\cdot||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_m}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_1})||^s.$$

Ekkor a hányados:

$$\frac{Tr\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m}{Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)}=\frac{\sum_{|\mathrm{i}_1|,\cdots,|\mathrm{i}_m|=n}||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_m}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_1})||^s\cdot||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_1}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_2})||^s\dots||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_{m-1}}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_m})||^s}{\sum_{|\mathrm{i}_1|,\dots,|\mathrm{i}_m|=n}\left(\prod_{j\in\{1,\dots,m\}}||\mathbf{A}_{\mathrm{i}_j}\mathbf{x}(t_{\mathrm{i}_{j+1},\dots,\mathrm{i}_m,\mathrm{i}_1,\dots,\mathrm{i}_j})||^{2s}\right)}\leq e^{mc\tau^n}.$$

Az alsó becslés hasonlóan bizonyítható.

$\square$

4. Lemma. *Adott s és n pozitív egész számok esetén*

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right)-\log\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)\right]=0.$$

Bizonyítás. A Perron–Frobenius-tétel alapján fix s és n esetén

$$\frac{\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m}{\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m}\to\underline{vw}^T,$$

ha m-mel tartunk a pozitív végtelenbe, ahol $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a megfelelő jobb és baloldali sajátvektor.

A mivel elemenként igaz ez a határérték, így az összegükre, azaz a nyomra is:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)}{\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m} = Tr(\underline{vw}^T).$$

Ekkor logaritmusát véve és elosztva m-mel az egyenletet:

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right) - \frac{1}{m}\log\left(\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right] = \lim_{m\to\infty}\frac{\log Tr(\underline{vw}^T)}{m}.$$

A második tag 0-hoz tart, az első pedig egyszerűsíthető. Így a következő határértéket kapjuk:

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right) - \log\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)\right] = 0.$$

Ez pedig éppen az amit bizonyítani akartunk. □

10. Állítás.

$$\left\|\log\left(\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)\right) - nP(s)\right\| \leq \boldsymbol{\tau}^n.$$

Bizonyítás. A 9. állítás miatt tudjuk, hogy

$$e^{-\boldsymbol{\tau}^n mc} \leq \frac{Tr\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m}{Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)} \leq e^{\boldsymbol{\tau}^n mc},$$

így

$$\left\|\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right) - \frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)\right)\right\| \leq c\boldsymbol{\tau}^n.$$

A 4. lemma alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right)-\log\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)\right]=0,$$

ami szerint bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$ valós szám esetén van olyan N természetes szám, hogy ha $m > N$, akkor a következő teljesül

$$\log\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)=\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right)+\varepsilon.$$

Szükséges belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)\right)=nP(s)$$

teljesül. Tudjuk, hogy $Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)=\sum_{|\mathsf{i}|=m\cdot n}\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}})\|^s$, valamint hogy a következő egyenlőtlenségek fennállnak:

$$c\sum_{|\mathsf{i}|=m\cdot n}\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\|^s\leq\sum_{|\mathsf{i}|=m\cdot n}\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\mathbf{x}(t_{\mathsf{i}})\|^s\leq\sum_{|\mathsf{i}|=m\cdot n}\|\mathbf{A}_{\mathsf{i}}\|^s,$$

az alsó becslés a 2. lemma miatt teljesül, a felső becslés pedig a norma definíciója miatt. Ekkor logaritmusát véve és $n\cdot m$-mel leosztva az egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$cP(s)\leq\frac{1}{m\cdot n}\log\left(Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)\right)\leq P(s).$$

Ekkor n-nel beszorozva és határértéket véve már következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)\right)=nP(s).$$

Tehát megfelelő N esetén a háromszög egyenlőtlenséget használva:

$$\begin{aligned}
\left\| \log\left(\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)\right) - nP(s) \right\| &= \left\| \frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right) + \varepsilon - \frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)\right) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)^m\right)\right) - \frac{1}{m}\log\left(Tr\left(\mathbf{U}_{m\cdot n}^{(s)}\right)\right) \right\| + \|\varepsilon\| \leq \\
&\leq c\boldsymbol{\tau}^n + \varepsilon
\end{aligned}$$

Mivel ez bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén fennáll, így

$$\left\| \log\left(\varrho\left(\mathbf{U}_n^{(s)}\right)\right) - nP(s) \right\| \leq c\boldsymbol{\tau}^n,$$

és így az állítást beláttuk. □

10. Megjegyzés. *s^*-ot a következő egyenlet megoldásaként definiálva jó közelítést kaptunk empirikusan a szingularitási dimenzióra:*

$$Tr(\mathbf{U}_n^{(s)}) = 1.$$

5. Példák

Ebben a fejezetben megvizsgálunk két példát az önaffin IFR-ekre és az attraktoraik Hausdorff-dimenziójának közelítésére alkalmazzuk a korábban megemlített módszereket.

11. Megjegyzés (A Barnsley-probléma). *Az eredeti Barnsley-páfrány a* *következő négy transzformáció attraktora:*

$$f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$f_3(x,y) = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix},$$

$$f_4(x,y) = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Az utolsó transzformáció mátrixa szinguláris, ezért ezt elhagyjuk. Emiatt a páfrány szárát nem kapjuk meg, ez látható az ábrán is.

Az általunk belátott tételek azonban csak szigorúan pozitív elemű mátrixokra érvényesek, így egy másik, hasonló fraktált kell vizsgálnunk.

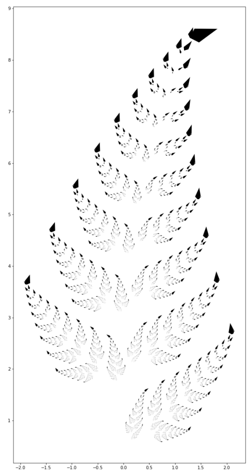
Az egyszerűség kedvéért az eltolási vektorokat válasszuk (0,0)-nak, ekkor a leképezések egy-egy mátrixnak feleltethetőek meg.

Pollicott és Vytnova a cikkükben a következő mátrixokat alkalmazzák:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{60} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

Legyen ezen rendszer attraktora Λ_1.

(a) A Barnsley-páfrány

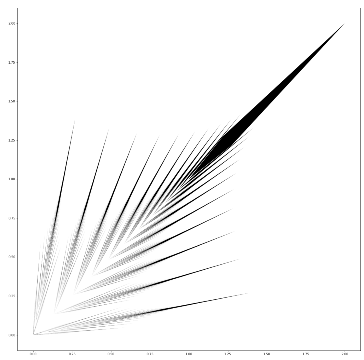


(b) A Barnsley-páfrány közelítése a mi programunkkal, 10 lépés után

A mi általunk használt mátrixok:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{101}{120} & \frac{11}{120} \\ \frac{11}{120} & \frac{101}{120} \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0.35830115 & 0.33581409 \\ 0.00961823 & 0.1253041 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0.1253041 & 0.00961823 \\ 0.33581409 & 0.35830115 \end{pmatrix}.$$

Ennek a rendszernek az attraktorát pedig jelölje Λ_2.



2. ábra. A mi általunk használt rendszer attraktorának közelítése, 10 lépés után

Az ilyen módon kapott mindkét attraktor az eredeti Barnsley-páfrány egy mutációjának tekinthető.
A Pollicott–Vytnova cikkben bebizonyított állítások alapján minden olyan leképezésre, amiben csak szigorúan pozitív elemű mátrixok vannak, exponenciálisan gyorsan kellene közelíteni a szingularitási dimenziót módszerükkel, de a tapasztalatok azt mutatják, hogy a tételekben szereplő konstansok nagyban befolyásolhatják a közelítés hatékonyságát az első néhány lépés során. Ez az eset áll fenn a mi példánkban használt leképezésekre is, a bizonyított módszer rossz közelítést ad. Ezért kellett keresnünk egy másik közelítési módszert, ami ha nem is exponenciálisan gyorsan tart az szingularitási dimenzióhoz, viszont egyszerűen számolható és a még számítógéppel realisztikusan kiszámítható tartományon jobban közelíti a szingularitási dimenziót a Pollicott–Vytnova-módszernél.

A McMullen-módszer által adott közelítés az attraktorok Hausdorff-dimenziójára, n lépés után:

n	$\dim_H(\Lambda_1)$	$\dim_H(\Lambda_2)$
1	0.4107175827768427	1.5781890980503768
2	0.3772782016077863	1.583531633302853
3	0.3758875544130228	1.5865866477169386
4	0.37580390830965843	1.588440440847464

A Pollicott–Vytnova-módszer által adott közelítés n lépés után:

n	$\dim_H(\Lambda_1)$	$\dim_H(\Lambda_2)$
1	0.4107175827768427	1.5781890980503768
2	0.3752117324412299	1.58352213761133
3	0.3757991072207352	1.5865694830181873

Ennyi lépés volt az, aminél a program még kivárható időn belül lefutott, de már itt is látszik a McMullen-módszer exponenciális és a Pollicott–Vytnov-módszer szuperexponenciális gyors közelítési sebessége.

Hivatkozások

[1] B. Bárány, M. Hochman, A. Rapaport, *Hausdorff dimension of planar self-affine sets and measures*, Invent. Math. vol. 216, no. 3, 601–659. (2019)

[2] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press (1985)

[3] K. J. Falconer, *The Hausdorff dimension of self-affine fractals*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 103, no. 2, 339–350. (1988)

[4] K. J. Falconer, *Dimensions and measures of quasi self-similar sets*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 106, no. 2, 543–554. (1989)

[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc. vol. 16, 1–140. (1955)

[6] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm* Bull. Soc. Math. vol. 84, 319–384. (1956)

[7] F. Hausdorff, *Dimension and äusseres Mass.* Math. Ann. vol. 79, 157–179. (1918)

[8] I. Hueter, S. P. Lalley, *Falconer's formula for the Hausdorff dimension of a self-affine set in* $\mathbb{R}^2$, Ergodic Theory Dynam. Systems, vol. 15, no. 1, 77–97. (1995)

[9] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. vol. 30, no. 5, 713–747. (1981)

[10] C. McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics. III. Computation of dimension*, Amer. J. Math. vol. 120, 691–721. (1998)

[11] I. D. Morris, *Fast approximation of the affinity dimension for dominated affine iterated function systems*, arXiv:1807.09084 [math.DS] (2018)

[12] M. Pollicott, P. Vytnova, *Estimating singularity dimension*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. vol. 158, 223–238. (2015)

[13] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, vol. 35, (1979)

[14] B. Solomyak, *Measure and dimension for some fractal families*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. 124, no. 3, 531–546. (1998)