Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki kar

MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport

és

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Tudományos Diákköri Dolgozat

Kövek kopásának modellezése iterált függvényrendszerekkel:

- korlátok és lehetőségek –

Készítette: Szesztay Ágoston Péter

Témavezetők:

Dr. Bárány Balázs

Dr. Domokos Gábor

ABSZTRAKT

Ez a dolgozat az "Élein szelt poliéderek kombinatorikus és metrikus tulajdonságai" című TDK munka (BME Építészmérnöki Kar, 2020 [12]) folytatásának eredményeit mutatja be. Az előző dolgozat olyan poliédereket vizsgált, amelyek összes csúcsát újra és újra levágjuk egy-egy síkkal, amely sík csakis az adott csúcsból kiinduló éleket metszheti és a levágott gúlák közül semelyik kettőnek nincs közös pontja. Az így létrejövő egyszerű poliéderek, lapjainak átlagos csúcsszáma hat, lapjainak és csúcsainak száma megadható a kezdeti poliéder élei számának függvényeként, önhasonló lapszerkezetük fraktál tulajdonságokat mutat. A csúcsból kiinduló éleket $\lambda < \frac{1}{2}$ arányban osztó vágó sík esetén, megadható a kiinduló lap és a lap határalakzatának területének aránya. Ugyanakkor szabályos sokszögből kiindulva kör határalakzat csakis a $2\lambda = \frac{1}{1+\cos(\phi)}$ érték esetén lehetséges.

Jelen dolgozat célja az élein szelt poliéderek fraktál tulajdonságainak vizsgálata. Kiegészíti az előző TDK-ban felállított modellt: a csúcsokból kiinduló élek λ_i arányban kerülnek levágásra, míg az újonnan létrehozott éleket γ_i arányban osztja az él határalakzatra kerülő pontja. Az így létrejövő poliéderek geometriája előállítható véletlen iterált függvényrendszerrel (IFS). A meghatározásra kerülő függvényrendszert alkalmazva egy négyzetes csúcs környezetének ábrázolására Matlab algoritmust prezentál.

Az IFS általános esetben csak három dimenzióban működik. Bizonyos esetekben azonban-melynek feltételei és egy példa is bemutatásra kerül - az alakzat valamely síkra vetített képe két dimenzióban is előállítható ilyen módon. A létrejövő alakzat lapjait határoló görbék megfelelően konstruáltak, hogy bármely λ_i, γ_i kombinációra első rendben differenciálhatók legyenek. Magasabb rendű differenciálásuk csakis akkor lehetséges, ha a $\gamma_i = \lambda_i = \frac{1}{2}$.

A poliéder lapszerkezetében fraktál tulajdonságokat eredményez, ha a vágó sík éleket távolít el a kezdeti poliéderről. Ennek az eseménynek a vizsgálata IFS-sel azonban több problémát is felvet.

ABSTRACT

This thesis presents the results on the continuation the TDK thesis "Combinatoric and metric properties of polieders sliced on their edges" (BME, Építészmérnöki Kar, 2020 [12]). In the previous thesis such polieders were examined, of which all vertices are chopped off by planes which can only intersect the edges starting from the vertex to be removed. Removed pyramids can not have common points. Resulting forms are simple polyhedra, their faces have 6 edges in average, the number of their faces and vertices are functions of the initial number of edges, the system of faces present self-similarity which is a common property of fractals. When cutting planes intersect edges according to proportion $\lambda<1/2$, the proportion of the limit area of the faces and the initial area can be determined, whereas starting from a regular polygon the limit of a face can only be circle if $2\lambda = \frac{1}{1+cos(\phi)}$.

The purpose of this thesis is the study of fractal properties of polyhedra sliced on edges. The previous model is extended: edges starting from the vertex to be removed are cut according to λ_i and those points of the created edges which would be the part of the limit set divide the edge according to γ_i. Resulting geometry can be observed using iterated function systems (IFS). To illustrate the usage of the identified IFS in the neighbourhood of one cubic vertex a Matlab code is presented.

In general, the IFS only works is 3D. In some cases, however, - of which the conditions and an example is shown – the image of the 3D form projected onto some planes can be drawn in 2D, using IFS. Border curves of the faces can be differentiated only once to any combination of γ_i, λ_i. Higher differentiability is only possible if $\gamma_i = \lambda_i = \frac{1}{2}$.

The process results in fractal properties combinatorically if the cutting planes may cut down edges of the initial polyhedron. Modelling with IFS the geometry resulting from such events would be rather problematic.

Tartalom

1. BEVEZETÉS ÉS JELÖLÉSEK

1.1. Az előző TDK dolgozat összefoglalása

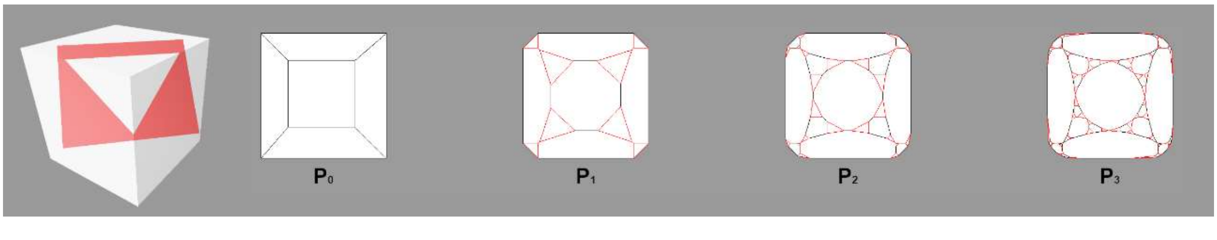
Jelen dolgozat az Élein szelt poliéderek kombinatorikus és metrikus tulajdonságai" című TDK dolgozat (BME Építészmérnöki Kar, 2020) kutatómunkájának folytatásaként létrejövő eredményeket mutatja be. Az előző dolgozat két poliédercsoport kombinatorikus és metrikus tulajdonságainak vizsgálatával foglalkozott. Az egyik csoport olyan poliéderekből áll, amelyek egy kezdeti P_0 poliéder csúcsainak levágásából származnak. Az így létrejövő alakzatok egyszerű poliéderek, lapjaik csúcsaik és éleik száma a poliéder fejlődés későbbi fázisaiban is megadható a kezdeti poliéder éleinek számának függvényében. A lapok csúcsok és élek száma az alakfejlődés során exponenciálisan növekszik, a csúcsok és élek egymáshoz vett aránya azonban 6-hoz konvergál. A csúcsok környezetében létrejövő lapszerkezet önhasonló, amely fraktálok egyik jellemző tulajdonsága. A csonkoló sor metrikus tulajdonságainak vizsgálatára bevezetett modell szerint az összes csúcsot az élek

$$\lambda - (1 - 2\lambda) - \lambda, \qquad \lambda < \frac{1}{2}$$

arány szerinti felosztásával vágjuk le, ennek következményeként az élek határalakzatra kerülő pontjai biztosan a felezőpontjuk lesz. Ebben az esetben nem létezik olyan rögzített λ arány amely szabályos n-szögből kiindulva szabályos $2n$-szöget generálna. A rögzített csonkolási arány és a kiinduló lap geometriájának ismeretében meghatározható a lap határalakzatának területe is.

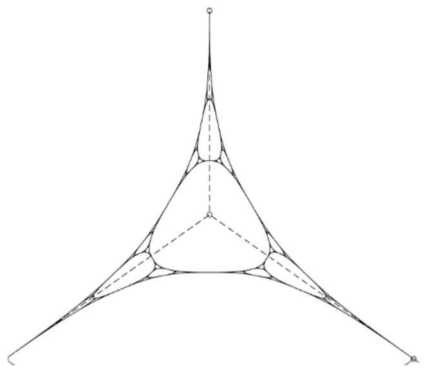
A második poliéder csoport a kiinduló P_0 összes lapjához, mint alaplapokhoz újabb és újabb gúlák illesztésével létrejövő poliéderekből áll, melyek szimpliciális poliéderek, a csonkoló sorozat tagjainak duálisai, így kombinatorikus tulajdonságaik is rendre a csúcsokat levágó poliéder sorozat duálisai.

1.2. Csúcsok levágása: csonkolás



1.ábra Csúcsok levágása

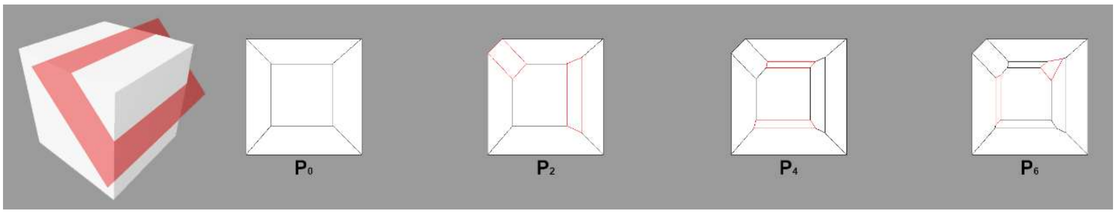
Legyen P_0 egy konvex poliéder. Az első lépésben P_0 összes csúcsát levágjuk egy-egy síkkal oly módon, hogy a metsző sík csak a csúcsból kiinduló éleket metszhesse, és a levágott gúlák közt semelyik kettőnek sincs közös pontja. Az így létrejövő P_1 poliéderen megismételjük ugyanezt a lépést, mellyel létrehozzuk a P_2 poliédert és ezt az eljárást folytatjuk, vizsgálva az illusztrált P_i poliéder-sorozat egyes tulajdonságait és ezek konvergenciáját.



2.ábra Lapszerkezet egy csúcs környezetében

Mivel a csonkolás minden lépésben három fokszámú csúcsokat hoz létre, a határalakzat lapszerkezetében önhasonló struktúra alakul ki. Ennek a struktúrának a modellezése és fraktál tulajdonságainak vizsgálata ennek a dolgozatnak kiemelt célja. A csonkolás lépéseit iterált függvényrendszerekkel modellezzük, ez fraktálok előállításának és ábrázolásának egy lehetséges módja: a csúcsból kiinduló élek megmaradó pontjai $\gamma_i$arányban osztják fel az élt, a csonkoláskor az $(1-\gamma_i)$ hosszúságú szakaszok λ_i arányban kerülnek felosztásra és levágásra.

1.3. Élek levágása:



3.ábra Élek levágása

Legyen P_0 egy konvex poliéder vágjuk le P_0 egy-egy élét olyan síkokkal, amelyek csak az élhez tartozó csúcsokból kiinduló, az eltávolítandó éltől eltérő éleket metszhetik. Ezt a műveletet nem lehet egyszerre P_0 összes élén elvégezni anélkül, hogy a vágó síkok egymással az alakzaton belül metsződnének össze, ezért egy időpontban csak egy él levágását engedjük meg.

1.4. Modellezés iterált függvényrendszerekkel

A csúcsok levágása esetén kézenfekvő, az élek levágása esetén kevésbé hatékony módszer a vizsgált alakzatok élhálózatát iterált függvényrendszerekkel előállítani. Csúcsok levágása esetén a geometriai modellnek megfelelő forma elérése véletlen iterált függvényrendszerekkel lehetséges, a függvényrendszer tagjai háromdimenziós lineáris leképezések. Egy csúcs környezetében kialakuló élhálózat számítására Matlab környezetben írt algoritmust prezentálunk.

Az élek levágásának modellezése esetén a véletlen iterált függvényrendszernek a megfelelő geometria eléréséhez jelentős kiegészítése szükséges. A kiegészítés az iterált függvényrendszerek alkalmazásából származó előnyök elvesztéséhez vezethet.

1.5. A vizsgált alakzatok kapcsolata kopásmodellekkel

Annak ellenére, hogy az itt bemutatott eljárás önmagában nem, vagy csak nagyon különleges esetekben lenne alkalmazható önálló kopásmodellként, kő részecskék kopásának modellezésével több ponton is szoros összefüggésbe hozható: egyrészt interpretálható, S.Redner és P.L. Krapivsky [11] síkbeli kopásmodelljének háromdimenziós analógiájaként, másrészt Domokos Gábor, Sipos András, Várkonyi Péter [5] megállapításai szerint J.F. Bloore differenciál egyenletének [3] egy diszkrét megoldása lehetséges a csúcsok, élek és lapok levágásának megfelelő valószínűséggel vett ismétlésével. A három esemény közül a lapok levágása a lapszerkezet kombinatorikus tulajdonságait nem változtatja meg, a csúcsok és az élek levágásának eseményei határozzák meg a lapszerkezet kombinatorikus tulajdonságait. Ezért lenne célszerű a két esemény közös modellezése iterált függvényrendszerekkel.

Az ebben a dolgozatban bemutatott modell kövek kopásának leírására ugyan csak közvetve alkalmazható, ugyanakkor a fraktál tulajdonságok vizsgálata közelebb vihet a természetben megfigyelt geometria leírásához. A kopás fraktálokkal való modellezésének a hagyományos geometriai vizsgálatokhoz képest egy lehetséges előnye, hogy az így kapott modellek az iterálás miatt erős összefüggésben vannak az alakzatot létrehozó folyamattal, illetve a vizsgálati módszerek olyan szabálytalanságok figyelembevételére is alkalmasak (pl végtelenül kis léptékű változatosság a test felszínén), amelyek figyelembevétele az eddigi módszerekben kényszerűen leegyszerűsítésre kerültek.

1.6. Síkba rajzolás

Az élhálózat tulajdonságainak vizsgálatát leegyszerűsítheti, ha az alakzat alacsonyabb dimenzióban is előállítható. Egy csonkolt csúcs környezete általános esetben iterált függvényrendszerekkel nem állítható elő két dimenzióban, léteznek azonban olyan síkok és paraméter választások, melyekre a háromdimenziós alakzatot vetítve a kép síkban ható iterált függvényrendszerekkel is előállítható. A síkban előállítható esetek megfelelnek a K. J. Falconer által [8][9] megadott feltételeknek, így box dimenziójuk meghatározható.

1.7. Az élek határoló görbéinek simasága

A csúcsok levágásának geometriai modellezése miatt a határalakzat lapjait határoló önaffin görbék első rendben simák. Magasabb rendű simaság csak parabolikus ívek esetén lehetséges [4]. A dolgozatban alkalmazott iterált függvényrendszernek egyetlen paraméterkombinációja létezik, amely esetén a határalakzat lapjait parabolák szegélyezik: $\lambda_i = \gamma_i = \frac{1}{2}$.

1.8. Jelölések, alapfogalmak

1.8.1. Fraktál:

A fraktál kifejezést B. Mandelbrot nevéhez kötjük, aki először használta olyan alakzatok megnevezésére, amelyeket különleges részletezettségük és változatosságuk miatt a kalkulus hagyományos módszereivel nagyon nehézkes, vagy nem is lehet vizsgálni [2]. Az ezzel a névvel híressé vált fraktál geometria, amelyet a káoszelmélet eszközeivel vizsgálnak a matematikának egy igen fiatal tudományterülete. Vizsgálati területét fraktál tulajdonságokkal rendelkező halmazok alkotják. A fraktál fogalmára nem létezik (és elképzelhető, hogy a jövőben sem lesz) általánosan elfogadott definíció. Definiálás helyett bizonyos jellemző tulajdonságok megadásával próbálják meghatározni azokat a halmazokat, amelyeket fraktálnak hívunk. Ezen tulajdonságok között a leggyakoribbak, de nem kizárólagos tulajdonságok:

- Pontosan, vagy többé kevésbé önhasonló halmazok: az alakzat egy része vagy egésze különböző nagyításokban is megtalálható.
- Végtelenül kis méretekben is hagyományos geometriai - analitikai módszerekkel nehézkesen vagy egyáltalán nem analizálható változások mutathatók ki bennük (Például nem értelmezhető rajtuk az érintő sík fogalma).

Ahogy a definiálás nehézkességéből is látható fraktál tulajdonságokkal nagyon sokféle halmaz létezhet, ezek előállításuk módját tekintve több csoportba sorolhatók. A fraktál tulajdonságokkal rendelkező halmazok generálásának egy lehetséges módja iterált függvényrendszerek alkalmazása. Az általunk vizsgált alakzatok leírásához ebben a dolgozatban iterált függvényrendszert alkalmazunk.

1.8.2. Összehúzó leképezés:

Definíció: Ha D az R^n térnek egy részhalmaza (akár maga R^n), akkor f leképezést, amely D-hez D-t rendeli ($f: D \to D$) akkor nevezzük D-n összehúzónak, ha létezik egy $0 < c < 1$ szám, amelyre igaz, hogy bármely $x, y \in D$ -re alkalmazva a f-et a függvényértékek távolsága kisebb vagy egyenlő, mint x és y távolságának a c-szerese, azaz

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

1.8.3. Iterált függvényrendszer

Definíció: Iterált függvényrendszernek (IFS: az angol Iterated function system kifejezésből) nevezzük összehúzó leképezések egy véges halmazát:

$$F = \{f_i: D \to D \mid i = 1, 2, \dots, n\}, n \in N .$$

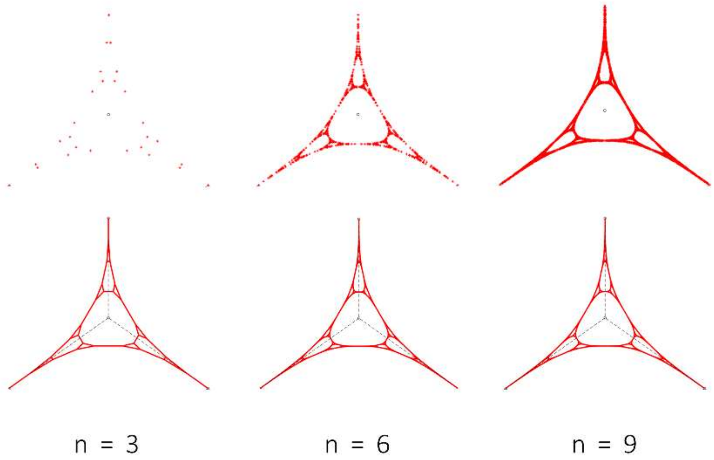
1.8.4. Attraktor

Definíció: Attraktornak (vagy invariáns halmaznak) nevezzük azt a kompakt halmazt, amely az iterált függvényrendszer függvényeivel vett képeinek az uniójaként áll elő:

$$H = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(H).$$

Az IFS definíciója nem tartalmaz konkrét utasítást az iterálásra. Iterálás akkor szükséges, ha a kiinduló tetszőleges H_0 halmazból induktívan definiált $H_k = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(H_{k-1})$ alakzatok sorozatát vizsgáljuk.

Az IFS attraktorát egyértelműen meghatározzák az IFS-t alkotó függvények [6], így a határ-alakzat elegendő iterálás után független a kiinduló halmaztól (4.ábra). Noha az attraktor vizuális elérését meggyorsítja a megfelelően választott kiinduló halmaz, azonban elegendő iterálás azonos képet eredményez.



4.ábra Az attraktor független a kiinduló alakzattól

1.8.5. Nyílt halmaz feltétel:

Definíció: Az $f_1, \dots, f_k$ összehúzó leképezések teljesítik a nyílt halmaz feltételt, hogyha létezik egy korlátos, nem üres U halmaz, amelyre az IFS-t alkalmazva önmaga részhalmazát kapjuk és képei páronként diszjunktak, vagyis:

$$U \supseteq \bigcup_{i=1}^{k} f_i(U) \text{ és } f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$$

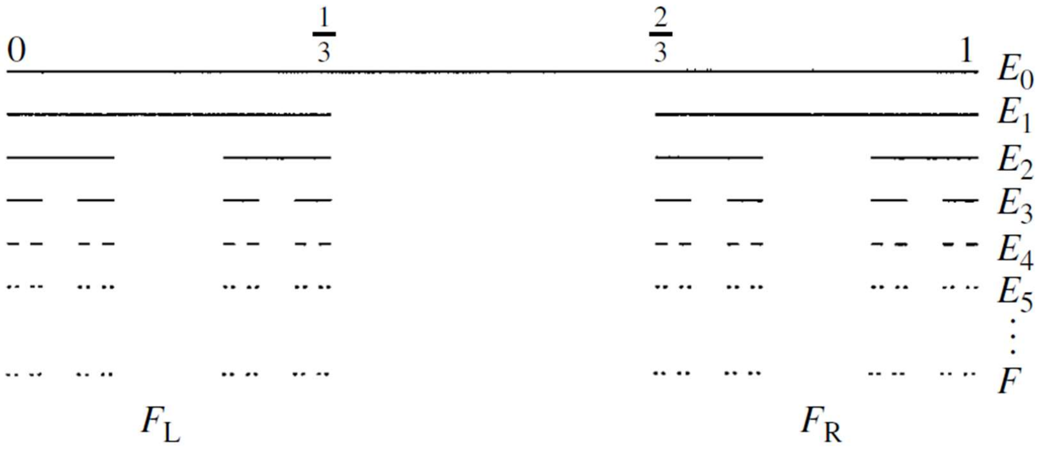
Minden $i \neq j$ esetén.

1.8.6. Fraktál dimenzió

Kitekintés: Ahogy a fraktálokról szóló bevezetőben is szóba került a fraktálok igen összetett alakzatok, amelyek egyes tulajdonságai látszólag ellentétben állnak a geometriáról alkotott hagyományos fogalmakkal. Jó példa lehet erre az a probléma, amely a legegyszerűbb fraktálokkal kapcsolatban is előkerül: a fraktálok dimenziója. Illusztrálásként tekinthetjük az ún. Cantor halmazt. A C Cantor halmaz azon pontok halmaza a $[0,1]$ intervallumban, amelyek triadikus felbontása nem tartalmaz 1 számjegyet, s a

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k, C_k = \bigcup_{i=1}^{2} S_i(C_{k-1}), ahol\ C_0 = [0,1], S_1(x) = \frac{x}{3} \text{ } és\ S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

kifejezés definiálja. Ennek értelmében az iterálás során a halmaz folytonos elemeinek középső harmada minden lépésben eltávolításra kerül.



5.ábra Cantor halmaz

Látható, hogy az alakzat hossza $\lim_{k\to\infty} L_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$, annak ellenére, hogy az megszámlálhatatlanul végtelen sok pontot tartalmaz.

A hagyományos geometriai definíció helyett a fraktálok dimenziója tulajdonképpen az attraktor összetettségének mérőszáma. Kissé más megfogalmazásban annak a mérőszáma, hogy valamely halmaz mennyire tölti ki a rendelkezésre álló teret. Az összetettség mérésének és így a fraktál dimenziónak is több lehetséges meghatározása van, ezek közül a legismertebb és legáltalánosabb a Haussdorff dimenzió, amely bármely halmazon értelmezhető, azonban értékének pontos meghatározása és becslése gyakran nehézkes. Az ún. Box dimenzió (vagy Minkowski dimenzió ($\dim_b$)) – amelyet ebben a dolgozatban is bemutatunk – csak n dimenziós euklideszi tereken értelmezett, azonban könnyebben becsülhető és számolható. Emiatt napjainkban ez egy széleskörben alkalmazott dimenzió.

1.8.7. Box dimenzió:

Definíció: Legyen F egy nem üres, korlátos részhalmaza R^n-nek (R^n: az n dimenziós euklideszi tér) és $N_\delta(F)$ az a legkisebb szám, amely legfeljebb δ átmérőjű halmazokból szükséges F lefedéséhez. Ekkor a felső és alsó box dimenziót a következőképpen definiáljuk:

$$\overline{\dim}_b F = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\underline{\dim}_b F = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Ha az alsó és felső box dimenzió értéke megegyezik a halmaz box dimenzióját kapjuk:

$$\dim_b(F) = \overline{\dim}_b(F) = \underline{\dim}_b(F) =: s$$

Annak ellenére, hogy a Hausdorff dimenziónál egyszerűbb számolásokat igényel a box dimenzió, pontos értékének meghatározása gyakran mégsem triviális. A box dimenzió esetén jellemzően δ átmérőjű n-dimenziós gömbökkel (B^n) lehet elérni optimális fedést. A dolgozatban alkalmazott IFS affin leképezésekből áll, amely a halmazt magába foglaló gömböt egy ellipszis főtengelyei szerint torzítja. Ebben az esetben működik a következőkben bemutatott módszer [9][8], amely az ellipszisek főtengelyeinek nagyságát figyelembe veszi, azonban azok geometriai elhelyezkedését és esetleges átfedését nem. Így általános esetben a box dimenzió felső becslésére alkalmas.

1.8.8. Szinguláris érték:

Definíció: Ha $f: R^n \to R^n$ lineáris leképezés, akkor a f szinguláris értékeinek nevezzük az $f(B^n)$ ellipszoid főtengelyeinek a hosszát, ahol B^n az n dimenziós egység gömb. Az f leképezés szinguláris értékeit a $f^* f$ (f^*az f mátrix adjungáltja) függvény sajátértékeinek pozitív gyökeiként számolhatjuk. A szinguláris értékeket nagyságuk szerint csökkenő sorrendben $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n > 0$ -val jelöljük.

1.8.9. Szinguláris érték függvény

Definíció: Hogyha f_i egy lineáris leképezés, amely felírható $f_i(h) = A_i(h) + a_i$ alakban, ahol $a_i \in R^n$ és A_i leképezés lineáris tagja, akkor f_i szingulárisérték függvényének nevezzük a $\Phi^s(f) = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{m-1}\alpha_m^{s-m+1}$ függvényt, ahol $m - 1 < s < m$.

1.8.10. Affinitási vagy szingularitási dimenzió

Definíció: Affinitási dimenziónak nevezzük és $d(f_1, f_2, \dots, f_i)$ ként jelöljük s-nek azt az értékét, amelyre

$$d(f_1, f_2, \dots, f_i) = \inf\{s: \sum_{i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,i\}} \Phi^s\left(T_{i_1} \dots \mathrm{T}_{i_r}\right) < \infty\} = \sup\{s: \sum_{i_1 \dots i_r \in \{1,\dots,i\}} \Phi^s\left(T_{i_1} \dots T_{i_r}\right) = \infty\}$$

Falconer megmutatta [9], hogy az affinitási dimenzióra igaz a

$$\dim_H F \le \dim_b F \le d(f_1, f_2, \dots, f_i),$$

továbbá igazolta [8], hogy azokban az esetekben, amikora a síkbeli alakzat összefüggő, és teljesíti a nyílt halmaz feltételt, akkor

$$\dim_b(F) = d(f_1, f_2, f_3).$$

2. CSÚCSOK LEVÁGÁSA

2.1. A csonkolási algoritmus leírása

Definíció: Legyen P_0 egy konvex, egyszerű poliéder. Az első lépésben P_0 összes csúcsát levágjuk egy-egy síkkal oly módon, hogy a metsző sík csak a csúcsból kiinduló éleket metszhesse, és a levágott gúlák közt semelyik kettőnek nincs közös pontja, ezt nevezzük a továbbiakban csonkolási algoritmusnak. Az így létrejövő P_1 poliéderen megismételjük ugyanezt a lépést, mellyel létrehozzuk a P_2 poliédert és ezt az eljárást folytatjuk (iteráljuk), vizsgálva az illusztrált P_i poliéder-sorozat egyes tulajdonságait és ezek konvergenciáját.

A csúcsból kiinduló éleket $\lambda_i, (i = 1,2, \dots, n \;\; ahol\, n\, a\, csúcs\, fokszáma)$ arányban osztja fel a vágó sík. Egyszerű csúcs (amelynek a fokszáma 3) esetén a három élen ejtett $\lambda_i, (i = [1, 2, 3])$ szerinti vágás meghatározza a vágás síkját. Abból származóan, hogy P_i bármely élén két irányból, de a két irányban egymástól eltérő értékkel történik a csonkolás, a határalakzat pontjának (vagyis az él soha le nem csonkolt pontjának) helye elmozdul az él felezőpontjából. Vizsgálataink során ezt a pontot az élek a csonkolást megelőző $\gamma_i\,, (i = 1,2, \dots c, c$ acsonkolt csúcs fokszáma) szerinti felosztásával határozzuk meg. A csonkolást pedig a maradék $\gamma_i, (1 - \gamma_i)$ szakaszok λ_i szerinti vágásával végezzük el.

Megjegyzés: A csonkolás síkját meghatározó λ_i értékek bevezetése természetesnek tűnik összevetve az előző TDK egyparaméteres modelljével. Így a vágás síkját nem a vizsgált alakzat geometriája határozza meg, hanem az immár szabadon meghatározható.

A γ_i paramétereket az iterált függvényrendszerek (IFS) alkalmazása teszi indokolttá. A folyamat során a csúcsok környezetét a csúcs valamely függvénnyel vett képeiből illesztjük össze, ezeknek a képeknek a találkozási pontjai olyan pontokká válnak, amelyeket nem távolítunk el a továbbiakban az alakzatról, vagyis biztosan a határalakzat pontjait alkotják majd. Azzal, hogy ezen találkozási pontok éleken elfoglalt helyzetét paraméterezzük tulajdonképpen a csúcsok véletlen síkkal történő levágását kívánjuk közelíteni, mivel könnyen belátható, hogy a véletlen vágások hatására az él megmaradó pontja (amely a határalakzat része lesz) az élen bárhol elhelyezkedhet.

2.2. A csonkolás kapcsolata kopásmodellekkel

Az itt alkalmazott csonkolási algoritmus S. Redner és P.L. Krapivsky kopásmodelljének [11] háromdimenziós analógiája. Ennek a modellnek tulajdonsága, hogy a vizsgált alakzatokról fokozatosan egyre kisebb tetraéderek kerülnek eltávolításra, vagyis az objektum térfogata egy nullánál nagyobb értékhez konvergál. Épp ez a tulajdonsága azonban az is, amely rámutat e modell korlátaira, hiszen minden újonnan kialakított élnek egy pontja biztosan a határalakzat pontja lesz. Ilyen korlátok betartásával ritkán találkozunk a természetben. Emiatt a csonkolás önálló kopásmodellként csak nagyon különleges, természettől idegen körülmények leírására lenne alkalmazható.

A bemutatott eseménynek azonban fontos szerepe lehet pontosabb kopásmodellek részeként. Domokos, Sipos, Várkonyi [5]-ben bemutatja, hogy Bloore parciális differenciálegyenletének [3] eredményei jól közelíthetők három esemény megfelelő valószínűséggel vett ismétlésével, melyek közül az egyik a poliéder csúcsainak levágása, amely megfeleltethető az itt bemutatott csonkolással. (A másik kettő az élek levágása és a lapok levágása)

2.3. Egyetlen csúcs környezetének vizsgálata

Ahogy az előző TDK dolgozat [12] 2.2, 2.8 részeiben bemutatásra került a vágások által létrehozott új csúcsok fokszáma három, vagyis a P_1 poliéderen már csakis három fokszámú csúcsok találhatók. Ezek környezetében a csonkolás kombinatorikus szempontból azonos lapszerkezetet hoz létre.

A továbbiakban a megállapításainkat egy olyan csúcsra vezetjük vissza, amelynek csúcspontja a derékszögű háromdimenziós koordinátarendszer origója, a csúcsból kiinduló élek pedig a tengelyekkel párhuzamosak. Az itt kapott összefüggések bázistranszformációval átalakíthatók P általános csúcsára is.

2.4. Az alakzatot előállító függvények meghatározása:

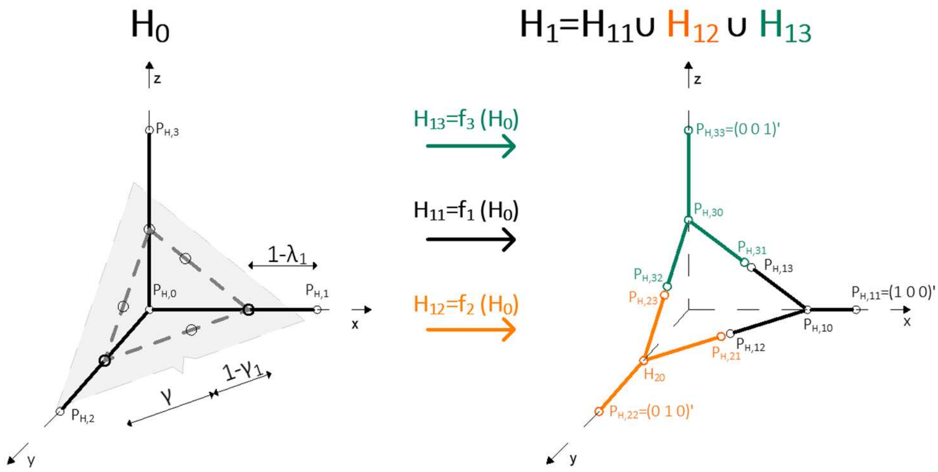
Definíció: Egy csonkolandó négyzetes sarokból kiinduló élek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ szerinti csonkolása, amelyre az újonnan létrejövő három élt határalakzatra kerülő pontjaik $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ arányban osztják fel, megadható az f_1, f_2 $és$ f_3 függvényeket alkalmazva a kiinduló H alakzatra, ahol

$$H = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y, \\ \leftarrow z \end{array} \end{array}$$

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & \lambda_1(\gamma_1 - 1) & \lambda_1(\gamma_2 - 1) \\ 0 & \lambda_2 - \gamma_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \gamma_2\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\lambda_2 & 1-\lambda_2 & \lambda_2(\gamma_3 - 1) \\ 0 & 0 & \lambda_3(1-\gamma_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_2\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_3\lambda_2 & 0\\ -\gamma_2\lambda_3 & -\gamma_3\lambda_3 & (1-\lambda_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_3\end{pmatrix}.$$



6.ábra Csúcs levágása iterált függvényrendszer alkalmazásával

A csonkolással geometriai szempontból megegyező alakzatot eredményez, hogyha az eredeti csúcsot lemásoljuk és torzítjuk, három megfelelően választott függvénnyel, és ezek képeinek összeillesztésével kapjuk meg a keresett formát. A függvényeket az $f_i = F(H) + \underline{t}$, alakban keressük, ahol $F = \begin{pmatrix} f_{i_{11}} & f_{i_{12}} & f_{i_{13}} \\ f_{i_{21}} & f_{i_{22}} & f_{i_{23}} \\ f_{i_{31}} & f_{i_{32}} & f_{i_{33}} \end{pmatrix}$ $és\ t = \begin{pmatrix} t_{i1} \\ t_{i2} \\ t_{i3} \end{pmatrix}$, H a teljes kiinduló halmaz és H_{ii} a H megkülönböztetett pontjai. Ezek a következő feltételeket kell kielégítsék (6.ábra):

- $f_i(P_{H,i}) = P_{H,ii}$, vagyis a transzformáció a $P_{H,i}$ pontot ne mozdítsa el helyéről. (ezek az IFS fix pontjai)
- $f_i(P_{H,0}) = \lambda_i P_{H,i0}$, a transzformáció a koordinátarendszer origójának képe legyen a $\lambda_i P_{H,i0}$ pont
- $f_i(P_{H,k}) = P_{H,ik} = f_k(P_{H,i}) = P_{H,ki}$, a transzformáció hatására a leképezések eredményeiként létrejövő H_{1i} alakzatok (kis „Y"-ok) megfelelő pontjai megegyezzenek.
- $P_{H,ik} = P_{H,ki} = \gamma_i\overline{(P_{H,i0}P_{H,ko})}$: a $P_{H,0}$ csúcsból kiinduló élek végpontjainak képei $P_{H,ik} = P_{H,ki}, i, k \in \{1,2,3\}$ a $\overrightarrow{P_{H,\iota\,0}P_{H,ko}}$ szakaszt γ_i arányban osszák.

H-ra kifejtve a feltételeket az első függvény esetén a másik kettővel analóg módon a következő egyenletekhez jutunk:

(11): $F_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(12):** $F_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(13): $F_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1\gamma_1 \\ \lambda_2(1-\gamma_1) \\ 0 \end{pmatrix}$, **(14)**: $F_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 = \begin{pmatrix} \gamma_2\lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_3(1-\gamma_2) \end{pmatrix}$.

Ebből pedig egyszerű mátrix szorzással jutunk a bemutatott függvényekhez.

2.5. Az iterált függvényrendszer alkalmazása:

A függvények meghatározását követően az alakzat attraktora a kiinduló alakzaton alkalmazva: $H_1 = F_1(H_0) \cup F_2(H_0) \cup F_3(H_0)$. Mivel a függvényeket úgy választottuk meg, hogy fix pontjaik helyben maradjanak a H_1-en az IFS újbóli alkalmazása összefüggő alakzatot eredményez, amelynek végpontjai továbbra is az IFS fix pontjai. Ez a folyamat újra és újra megismételhető, ezt nevezzük az IFS iterálásának.

Természetesen az iterálás akkor is működni fog, ha az $F_1, F_2, és\ F_3$ függvényeket minden iterációkor eltérő paraméterek szerint határozzuk meg, hiszen bármely paraméter kombinációra összefüggő marad az attraktor.

2.6. Önaffin alakzatok

Az eddig bemutatott összefüggések alapján az iterálás minden lépése során H_i minden pontjának három képe lesz, vagyis minden lépésben $3^n(H_i)$ lineáris egyenlet megoldása szükséges, ahol n a H_i alakzat csúcspontjainak száma. Látható, hogy az így keletkező egyenletrendszer mérete exponenciálisan növekszik, a pontok koordinátáinak meghatározása számítástechnikai eszközök alkalmazásával célszerű.

Az ábrázolás céljából a kutatás során Matlab környezetben megírásra került egy program (7.ábra), amely ennek az egyenletrendszernek a megoldását végzi el és ábrázolja a létrejövő alakzatot.

\a kiinduló csúcs és környezete:

```
v_0=[0 0 0]'; e_1=[1 0 0]'; e_2=[0 1 0]'; e_3=[0 0 1]'
hely=[e_1 v_0 e_2 v_0 e_3];
plot3(hely(1,:), hely(2,:), hely(3,:), '--ok'); hold on
```

\a transzformációs mátrixok és vektorok:

```
lambda_1=0.6; lambda_2=0.4; lambda_3=0.3;
gamma_1=0.3; gamma_2=0.4; gamma_3=0.5
A=[1-lambda_1 gamma_1*lambda_1-lambda_1 gamma_2*lambda_1-lambda_1;
    0 lambda_2-gamma_1*lambda_2 0;
    0 0 lambda_3-gamma_2*lambda_3]
B=[gamma_1*lambda_1 0 0;
    -lambda_2*gamma_1 1-lambda_2 gamma_3*lambda_2-lambda_2;
    0 0 lambda_3-gamma_3*lambda_3]
C=[lambda_1*gamma_2 0 0; 0 lambda_2*gamma_3 0;
    -lambda_3*gamma_2 -lambda_3*gamma_3 1-lambda_3]
t_a=[lambda_1 0 0]'; t_b=[0 lambda_2 0]'; t_c=[0 0 lambda_3]';
```

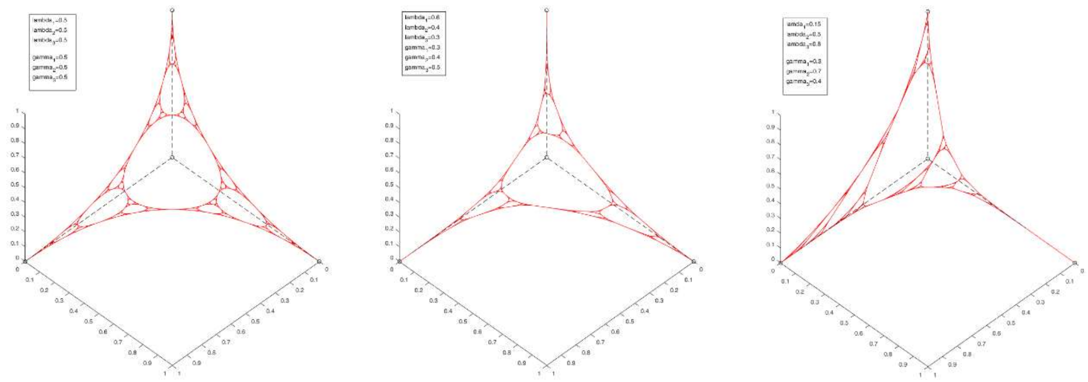
\itt történik a lineáris transzformáció:

```
for i=1:13
    irany_1=A*hely+t_a;
    irany_2=B*hely+t_b;
    irany_3=C*hely+t_c;
    uresoszlop=[nan nan nan]';
    hely=[irany_1 uresoszlop irany_2 uresoszlop irany_3];
end
```

\ábrázolás 3D-ben

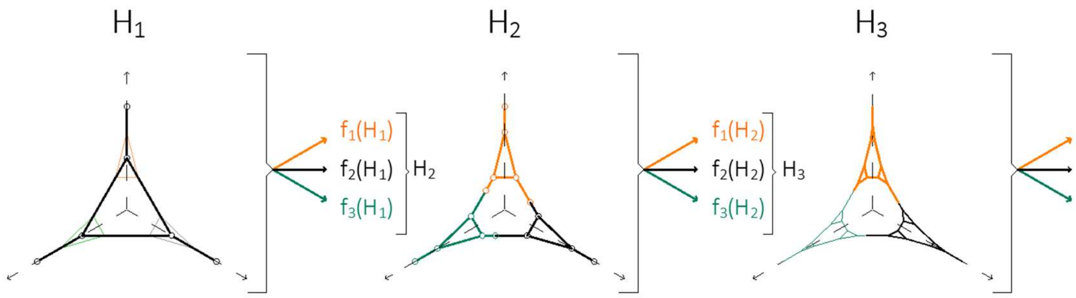
```
plot3(hely(1,:), hely(2,:), hely(3,:), '-k')
view([315 315])
axis equal
hold off
```

7.ábra Matlab algoritmus csúcs környezetének ábrázolására Iterált függvényrendszerrel



8.ábra Szimmetrikusan és asszimterikusan csonkolt sarkok.

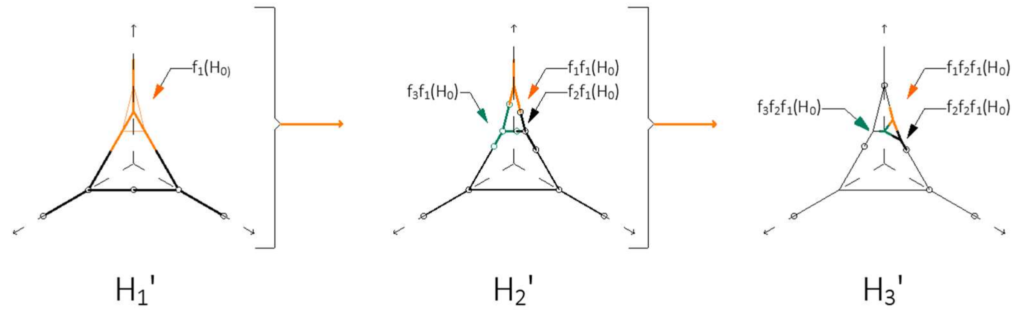
Az itt látható ábrákon a bemutatott programmal meghatározott pontok képeit láthatjuk, ezekkel illusztrálható a program ezen verziójának hiányossága, amit a későbbiekben orvosolni próbálunk. Ez a probléma abban áll, hogy a minden lépésben azonos λ_i *és* γ_i szerint csonkolt alakzatokon alkalmazzuk az F_i függvényeket, amelyekkel az alakzatot összenyomjuk és eltoljuk, úgy, hogy azok egymással illeszkedjenek. Az így létrejövő alakzat ezáltal magán hordozza majd az összes azt megelőző vágást, és azoknak valamilyen torzított képét ábrázolja (vagyis szigorú önaffinitás figyelhető meg a lapok szerkezetében), ez a dolgozat előző részeiben bemutatott modellnek nem megfelelő alakzatokat eredményez.



9.ábra Az iterált függvényrendszer nagyobb elemek összeillesztésével működik

Ezeknek az alakzatoknak a bemutatása azért fontos, mert a továbbiakban bemutatásra kerülő modellek, amelyek *véletlen* iterált függvényrendszerekkel keletkeznek, ezt a fajta önnaffinitást már nem tartalmazzák, azonban ebből származóan sokkal kaotikusabb rendszerek, amelyek a kívánt geometriát pontosabban írják le, azonban vizsgálatukra még igen szűkösen áll rendelkezésre eszközkészlet.

2.7. Véletlen iterált függvényrendszer



10.ábra A véletlen iterált függvényrendszer csúcs specifikus

A véletlen iterált függvényrendszerek abban különböznek jelentősen az eddig bemutatott alakzatoktól, hogy előállításuk során minden csúcs levágásához szabadon választható paraméterkombináció. Az itt bemutatott programban minden lépésben csak egyetlen tetszőlegesen kiválasztott sarokról történik a vágás. Az alakzat minden P csúcspontjához tartozik egy F függvény, hogy F az origót a P pontba képezze: $F(O) = P$.Adatként nem a pontok helyét tároljuk, hanem a pontot leíró függvényt.

Ezen véletlenül választott P csúcs levágását úgy végezzük el, hogy a vágás síkjának megfelelő véletlen választott paraméterekkel meghatározzuk az $f_{P_1}, f_{P_2}, f_{P_3}$ függvényeket. Ekkor a vágás által létrehozott három új csúcs (P_1, P_2 és P_3) rendre az $f_{P_1} = Ff_1$, $f_{P_2} = Ff_2$, $f_{P_3} = Ff_3$ függvényekkel reprezentálhatók, itt f_1, f_2, f_3 a 2.4 részben meghatározott függvények. Az összes csúcsot leíró függvény meghatározása után kerül csak sor a pontok helyének meghatározására.

Ezek alapján a programot a következőképp fejleszthetjük tovább (11.ábra):

\ a bemeneti adatok megadása

```
clear
hely=[1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1];
M_transzf=[]
```

\ az összes transzformációs mátrix előállítása

```
for i=1:100
    lambda_1=rand; lambda_2=rand; lambda_3=rand;
    gamma_1=rand; gamma_2=rand; gamma_3=rand;
    A=[1-lambda_1 gamma_1*lambda_1-lambda_1 gamma_2*lambda_1-lambda_1; 0 lambda_2-gamma_1*lambda_2 0; 0 0 lambda_3-gamma_2*lambda_3];
    B=[gamma_1*lambda_1 0 0; -lambda_2*gamma_1 1-lambda_2 gamma_3*lambda_2-lambda_2; 0 0 lambda_3-gamma_3*lambda_3];
    C=[lambda_1*gamma_2 0 0; 0 lambda_2*gamma_3 0; -lambda_3*gamma_2 -lambda_3*gamma_3 1-lambda_3];
    t_a=[lambda_1 0 0]'; t_b=[0 lambda_2 0]'; t_c=[0 0 lambda_3]';
    M_transzf1=[A t_a B t_b C t_c];
    meret=size(M_transzf);
    if i == 1
    meret=size(M_transzf1);
    M_transzf=M_transzf1;
    end
    i_M=randi(meret(2)/4)*4;
    csereltM=[M_transzf(:,i_M-3) M_transzf(:,i_M-2) M_transzf(:,i_M-1)];
    cserelt_t=M_transzf(:,i_M);
    csereltbol1=[csereltM*A csereltM*t_a+cserelt_t];
    csereltbol2=[csereltM*B csereltM*t_b+cserelt_t];
    csereltbol3=[csereltM*C csereltM*t_c+cserelt_t];
    M_transzf=[M_transzf(:,1:i_M-4) csereltbol1 csereltbol2 csereltbol3 M_transzf(:,i_M+1:meret(2))];
end
```

\ a pontok valós koordinátáinak meghatározása

```
HELY=[]; uresoszlop=[nan nan nan]';
meret=size(M_transzf); i_max=meret(2)/4
for i=1:i_max
    oszlop=i*4;
    M=[M_transzf(:,oszlop-3) M_transzf(:,oszlop-2) M_transzf(:,oszlop-1)];
    t=[M_transzf(:,oszlop)];
    hol=M*hely+t;
    HELY=[HELY hol uresoszlop];
end
```

\ ábrázolás

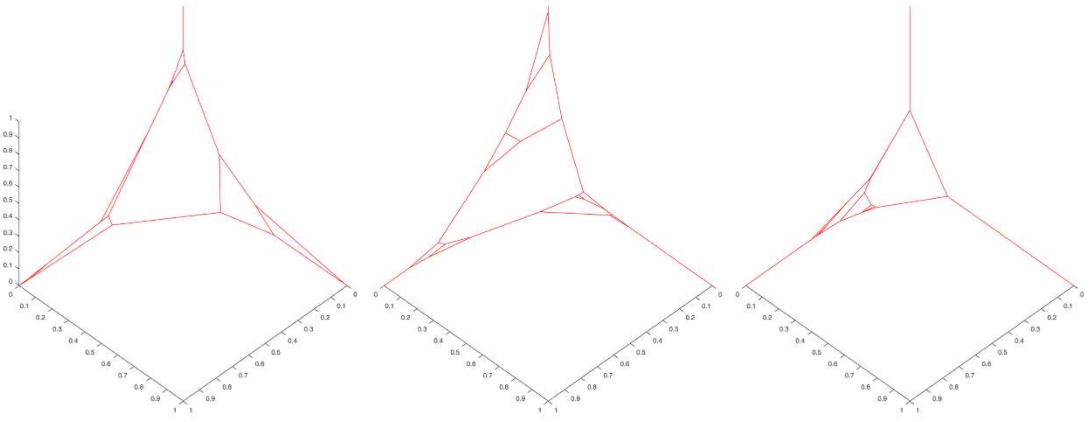
```
plot3(HELY(1,:), HELY(2,:), HELY(3,:), 'r-')
axis equal
view([315 315])
```

\2d-ben

```
M=[1 0; 0 1; -1 -1]
vetito=M*inv(M'*M)*M'
hely_2d=vetito*HELY
Forg=[1/sqrt(6) 1/sqrt(6) -2/sqrt(6); -sqrt(2)/2 sqrt(2)/2 0; sqrt(3)/3 sqrt(3)/3 sqrt(3)/3]
hely_2d_xy=Forg*hely_2d
plot(hely_2d_xy(1,:), hely_2d_xy(2,:), '-b')
axis equal
```

11.ábra Matlab algoritmus csúcs környezetének ábrázolására véletlen iterált függvényrendszer alkalmazásával

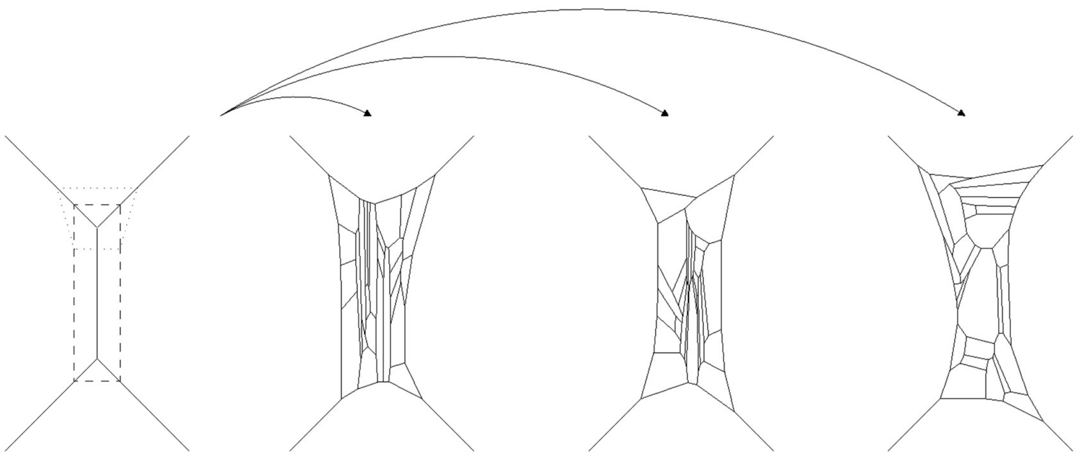
Ebben a verzióban a csúcsok levágására vonatkozó definíciónak megfelelően az „Y”-ok illesztése minden csúcsra individuálisan választott paraméterkombinációk szerint történik.



12.ábra Véletlen iterált függvényrendszer alkalmazása a csúcsok levágásakor

3. ÉLEK LEVÁGÁSA

A csúcslevágásnak és az élek levágásának közös modellben való egyesítése azért lenne felettébb kívánatos, mert ekkor a lapok levágásával kiegészítve (a vágósík csak a laphoz tartozó csúcsokból kiinduló éleken haladhat át, mely esemény csak a modell metrikus tulajdonságait változtatja, kombinatorikusakat nem) könnyen modellezhetővé válna a [5]-ben bemutatott diszkrét események bármelyike, így egy széleskörű alkalmazási területét megnyitva a dolgozatban bemutatott iterált függvényrendszernek.

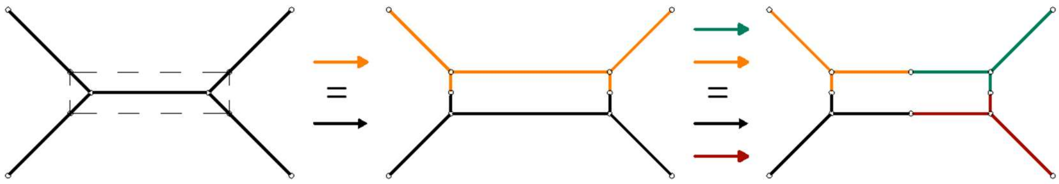


13.ábra Élek levágása

Definíció: legyen V_i és V_{i+1} egy konvex poliéder két csúcsa e_{12} pedig a köztük található él. Távolítsuk el e_{12} -t egy olyan síkkal, amely csakis azokon az éleken haladhat át, amelyek az e_{12} végpontjain található csúcsokból indulnak ki. Ezt az eseményt nevezzük az él levágásának. Az alakzaton újra és újra megismételve az él levágást vizsgáljuk a létrejövő alakzatot.

Az élek levágása nem végezhető el ugyanabban az időpillanatban minden egyes élen. Ezen eseményre a csúcsok levágásához hasonlóan igaz az, hogy a vágások által egyre rövidebbé váló élek meghatározzák a vágások által eltávolítható térfogatot. Ez azt is jelenti, hogy fokozatosan egyre kisebb térfogatok távolíthatók el, így a teljes test térfogata az élek levágásának hatására valamely értékhez konvergál. Az egyre kisebb vágások pedig fokozatosan végtelenül kis változásokat jelentenek majd az alakzat felületén.

A véletlen iterált függvényrendszereken alkalmazott technikával látszólag jól lekövethető a folyamat: kombinatorikailag az él levágásával megegyező eredményt kapunk, ha az élt és a végpontjaiból kiinduló további két-két csúcsot (~ >---<: nyereg) kétszer lemásoljuk, eltoljuk, torzítjuk majd összeillesztjük, oly módon, hogy az illesztési pontok csatlakozzanak az elvágott élek megfelelő pontjaihoz, a két torzított nyereg pedig egymáshoz illeszkedjen (.ábra középső része). A „nyergek” négy szárának megfelelő illesztését azonban háromdimenziós affin transzformációk nem garantálják.



14.ábra Él levágásának lehetséges modellezési alapelemei

Az élek levágása a csúcsok levágásához hasonlóan három fokszámú csúcsokat hoz létre, vagyis ennek az esetnek a modellezése is elképzelhető lenne a csúcsok levágásánál alkalmazott „Y”-ok sokszorosításával, torzításával és összeillesztésével. A megfelelő geometriához négy „Y” összeillesztése szükséges, amely esetben már nem egyértelműen meghatározott a vágás síkja. (a negyedik élen vett λ értéket az első három meghatározza, a negyedik λ értékét az első három ismeretében kell meghatározni). Hasonló problémát okoz a tény, hogy a vágandó alakzat ebben az esetben két „Y”-ból áll, amelyek egymással vett kapcsolatainak számon tartása is szükségszerűvé válik. Ebből származóan az alakzat tagjainak helyzetét leíró függvények módosításához sok előzetes számítás elvégzésére van szükség.

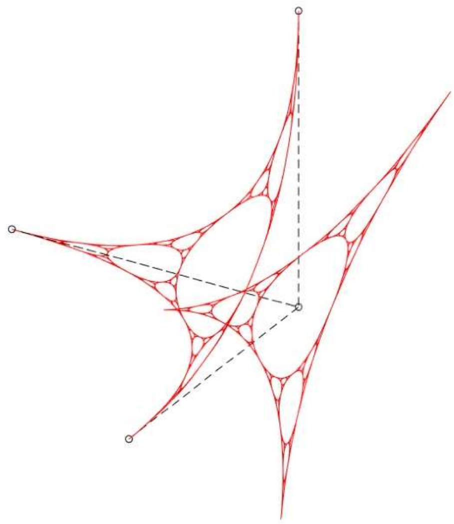
Az alakfejlődés iterált függvényrendszerekkel történő követésének egyik legnagyobb előnye és szépsége épp abban áll, hogy olyan rendszereket tudunk beazonosítani, amelyek alapján a vizsgált alakzatot egyszerű és gyors számításokkal tudjuk ábrázolni. Noha az éllevágás véletlen iterált függvényrendszerekkel nyilvánvalóan lehetséges, a modell egyszerűségéből származó előnyök csakhamar elvesznek.

4. AZ ALAKZAT SÍKBA RAJZOLHATÓSÁGA

Az alakzat geometriai tulajdonságainak vizsgálatát jelentősen megkönnyíti, ha a probléma redukálható alacsonyabb dimenzióra. Így merül fel a kérdés, hogy lehetséges-e és ha igen, milyen feltételek mellett lehetséges az alakzat valamely síkra vetített képét a síkban működő IFS-vel előállítani.

A síkba rajzolható eset azért is állhat az érdeklődés fókuszában, mert jelenleg csak ezek fraktál dimenziójára ismerünk általános összefüggést.[8] -Proposition 4 szerint azon síkbeli önaffin alakzatok Box dimenziója meghatározható, amelyek

1. A függvények hatására létrejövő alakzat nem átfedő: Teljesítik a nyílt halmaz feltételt (**1.8.5**)
2. Az alakzat bármely pontjából bármely másikba el lehet jutni a halmazon (vagyis a halmaz összefüggő)



15.ábra Alakzat és síkra vetített képe

Megjegyzés: A második feltétel az általunk vizsgált alakzatokon biztosan teljesül, hiszen a modellre való tekintettel úgy határoztuk meg a függvényeket, hogy azok összefüggőek legyenek

A paraméterek jelentős száma okán a síkba rajzolhatóság és a dimenzió meghatározáshoz szükséges feltételeket nem zárt képletben adjuk meg, hanem négy feltételként fogalmazzuk meg, amelyek együttes teljesülése esetén az alakzat síkban is megrajzolható és box dimenziója ismert.

4.1. A síkba rajzolás feltétele:

Állítás 1: Egy csonkolt csúcs környezetének valamely $\boldsymbol{n}$ normálvektorú síkra vetített képe előállítható ugyanazon síkban ható IFS-vel, hogyha az IFS f_1, f_2, f_3 függvényeinek két kisebb abszolút értékű sajátértékei függvényenként megegyeznek, s ezen sajátértékekhez tartozó sajátaltereinek normálvektoraiból képzett mátrix determinánsa $|n_1\; n_2\; n_3| = 0$. Ekkor a vetítési sík normálvektora $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2}$. Azaz

$$\lambda_2(1-\gamma_1) = \lambda_3(1-\gamma_2) < 1-\lambda_1 \text{ és } \gamma_1\lambda_1 = \lambda_3(1-\gamma_3) < 1-\lambda_2 \text{ és } \gamma_2\lambda_1 = \gamma_3\lambda_2 < 1-\lambda_3$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) & -\gamma_1\lambda_2 & -\gamma_1\lambda_2 \\ -\lambda_1(1-\gamma_1) & 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 & 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 \\ -\lambda_1(1-\gamma_2) & \lambda_2(\gamma_3-1) & \lambda_2(\gamma_3-1) \end{vmatrix}.$$

Ahhoz, hogy az alakzat a síkban megrajzolható legyen a térbeli függvény vetítés utáni hatásának meg kell egyeznie egy síkban ható függvénnyel, így jutunk a $P\,A_i = B_i\,P$ egyenlethez, ahol P lineáris ortogonális projekció mátrixa arra a síkra, amelyen meg szeretnénk rajzolni az alakzatot, A_i az F_i függvények mátrix tagja, míg B_i a síkban ható IFS valamely függvényének mátrixa.

Hogyha $\boldsymbol{v}$ annak a V síknak a normálvektora, amelyben meg akarjuk rajzolni az alakzat képét, akkor $B_i\,P\,\boldsymbol{v} = B_i\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ (mivel a síkra merőleges alakzatok képe merőleges vetítés esetén 0) és hogyha ez igaz, akkor $P\,A_i\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ is igaz kell legyen, vagyis az $A_i\,\boldsymbol{v}$ vektor párhuzamos $\boldsymbol{v}$-vel. Vagyis a $\boldsymbol{v}$ az A_i mátrixnak a sajátvektora kell legyen. A három függvényhez tartozó sajátvektorok irányainak meg kell egyeznie, hogy azonos síkba legyen írható a teljes alakzat.

A bemutatott függvények sajátértékei

A_1:	$a_{11} = 1-\lambda_1$	$a_{12} = \lambda_2(1-\gamma_1)$,	$a_{13} = \lambda_3(1-\gamma_2)$
A_2:	$a_{21} = 1-\lambda_2$	$a_{22} = \gamma_1\lambda_1$,	$a_{23} = \lambda_3(1-\gamma_3)$
A_3:	$a_{31} = 1-\lambda_3$	$a_{32} = \gamma_2\lambda_1$,	$a_{33} = \gamma_3\lambda_2$.

Sajátvektorai pedig:

$$A_1: \quad v_{a1_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{a1_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\lambda_1-\lambda_2+\gamma_1\lambda_2}{\lambda_1(\gamma_1-1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{a1_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1-\lambda_1-\lambda_3+\gamma_2\lambda_3}{\lambda_1(\gamma_1-1)} \end{pmatrix}$$

$$A_2: \quad v_{a2_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{a2_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1-\lambda_2-\lambda_3(1-\gamma_3)}{\lambda_2(1-\gamma_3)} \end{pmatrix} \quad v_{a2_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_1\lambda_2}{1-\lambda_2-\gamma_1\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3: \quad v_{a3_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{a3_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\gamma_2\lambda_3}{1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1} \end{pmatrix} \quad v_{a3_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\gamma_3\lambda_3}{1-\lambda_3-\gamma_3\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Feltételünk miatt $a_{i2} = a_{i3} < a_{i1}$, így a mátrixok kisebb sajátaltérhez tartozó sajátaltereit az $\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{v}_{i2} \times \boldsymbol{v}_{i3}$ normálvektorokkal adhatjuk meg. Az így kapott $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ $\acute{e}s$ $\boldsymbol{n}_3$ normálvektorok által meghatározott síkoknak pedig csakis akkor lehet közös metszete, ha a normálvektorok által meghatározott mátrix determinánsa nulla: (ekkor a három normálvektor egy síkban vagy egy egyenesen fekszik) $\det(n_1\, n_2\, n_3) = 0$. Mivel $a_{i2} = a_{i3}$ és a közös sajátvektor bármely függvény sajátvektora ezért $(A_i - a_{i2}I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, az első függvényre:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) & -\lambda_1(\gamma_1-1) & -\lambda_1(\gamma_2-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0}$$

A sajátvektor normálvektorral vett skaláris szorzata 0:

$$\boldsymbol{n_1}\, \boldsymbol{v_1} = 0 \to \boldsymbol{n_1} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) \\ -\lambda_1(\gamma_1-1) \\ -\lambda_1(\gamma_2-1) \end{pmatrix}.$$

A másik két függvény esetén nagyon hasonlóan:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\lambda_2 & 1-\lambda_2-\gamma_1\lambda_1 & \lambda_2(\gamma_3-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v_2} = 0 \to \boldsymbol{n_2} = \begin{pmatrix} -\gamma_1\lambda_2 \\ 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 \\ \lambda_2(\gamma_3-1) \end{pmatrix}$$

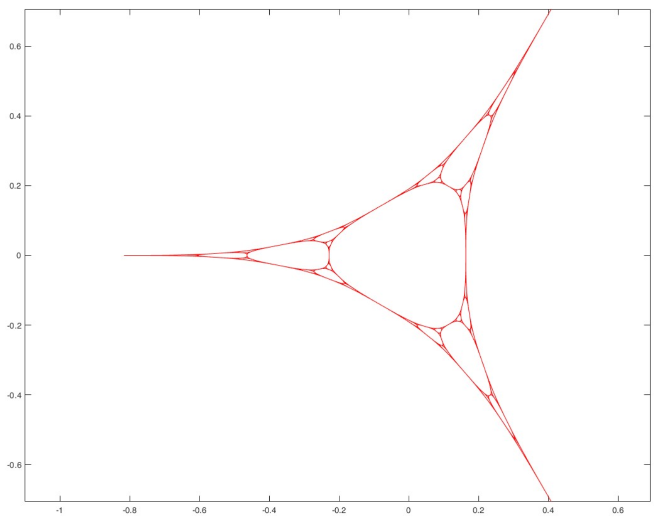
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\lambda_3 & -\gamma_3\lambda_3 & 1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v_2} = 0 \to \boldsymbol{n_3} = \begin{pmatrix} -\gamma_2\lambda_3 \\ -\gamma_3\lambda_3 \\ 1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) & -\gamma_1\lambda_2 & -\gamma_1\lambda_2 \\ -\lambda_1(1-\gamma_1) & 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 & 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 \\ -\lambda_1(1-\gamma_2) & \lambda_2(\gamma_3-1) & \lambda_2(\gamma_3-1) \end{vmatrix}$$

A vetítés iránya a megfelelő vektorokra: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2}$.

4.2. Egy síkba rajzolható eset bemutatása:

Állítás 2: Hogyha $\lambda_i = \lambda$ és $\gamma_i = \frac{1}{2}$, akkor az egyetlen olyan λ paraméter, melynek a vetülete előállítható síkbeli iterált függvényrendszerrel a $\lambda = \frac{2}{5}$, a sík pedig az $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normálisú sík.



16.ábra $\lambda = \frac{1}{2}$ *arányú csonkolás képe a síkban*

A speciális csonkolási paraméterkombináció esetén az f_1, f_2, f_3 függvények és sajátaltereinek normálvektoraia következőkre változnak:

$$f_1 \to n_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) \\ \lambda_1(\gamma_1-1) \\ \lambda_1(\gamma_2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_2 \to n_2 = \begin{pmatrix} -\gamma_1\lambda_2 \\ 1 - \lambda_2 - \gamma_1\lambda_1 \\ \lambda_2(\gamma_3 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_3 \to n_3 = \begin{pmatrix} -\gamma_2\lambda_3 \\ -\gamma_3\lambda_3 \\ 1 - \lambda_3 - \gamma_3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix}$$

A normálvektorokból konstruált mátrix determinánsa 0,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} & 1 - \frac{3}{2}\lambda \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)^3 - 3\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right) - \frac{\lambda^3}{4}.$$

Amelyből a következő harmadfokú egyenlethez jutunk:

$$-\frac{5}{2}\lambda^3 + 6\lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + 1 = 0$$

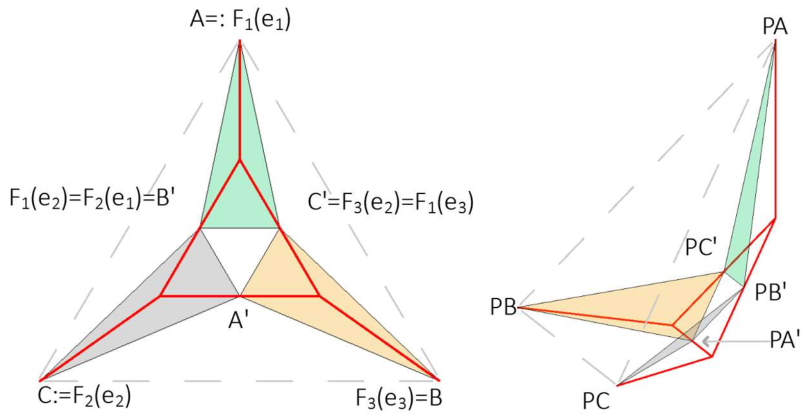
Ennek a gyökei: $\lambda = \frac{2}{5}$ ($és\ \lambda = 1$), ezek közül az utóbbit geometriai megfontolásokból kizárható. Ebből a vetítő sík normális vektora $v = n_1 \times n_2$,

$$\begin{vmatrix} i & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ j & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ k & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} \to v = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Nyílt halmaz feltétel:

Állítás 3: A csonkolt csúcs környezete a 4.1 rész szerinti ***v*** normálvektorú síkra vetített képe teljesíti a nyílthalmazfeltételt, és affinitási dimenziója megegyezik box dimenziójával, ha teljesülnek az *Állítás 1* (4.1) feltételei és

$$\gamma_2\lambda_3\lambda_1(1 - \gamma_2) < \big(1 - \lambda_1 - \lambda_2(1 - \gamma_1)\big)(1 - \lambda_3 - \gamma_2\lambda_1).$$



17.ábra Önmagát nem metsző és önmagát metsző vetítés

Az állítás igazolásához ki kell zárni a vetítés azon degenerált eseteit, amikor a képalakzat önmagát metsző részeket tartalmaz a vetítés után (.ábra). Ez akkor fordulhat elő, ha a külső ABC és belső képháromszög $A'B'C'$ körüljárási iránya ellentétes. Ekkor a vetítés irányában nézve belső és a külső háromszögek azonos vektoraiból és vektori szorzatukból ($\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{ab}} \times \overline{\boldsymbol{ac}}$) indukált bázis ellentétes sodrású, a szorzatvektorok előjele ellentétes. Ebből a feltétel:

$$sign\left(\det\left(\overline{\boldsymbol{ab}}\ \ \overline{\boldsymbol{ac}}\ \boldsymbol{v}\right)\right) = sign\left(det\left(\overline{\boldsymbol{a'b'}}\ \overline{\boldsymbol{a'c'}}\ \boldsymbol{v}\right),\right.$$

$$sign\left(\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & v_1 \\ 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 1 & v_3 \end{pmatrix}\right) = sign\left(\det\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_1 - 1 & v_1 \\ 1-\lambda_2 & 0 & v_2 \\ 0 & 1-\lambda_3 & v_3 \end{pmatrix}\right).$$

A determináns a harmadik oszlop szerint kifejtve

$$\begin{aligned} &sign(v_1 + v_2 - v_3) = \\ &= sign(v_1(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) - v_2(\lambda_1 - 1)(1-\lambda_3) - v_3(1-\lambda_2)(\lambda_1 - 1)) \end{aligned}$$

A fenti egyenletekben mivel $0 < \lambda_i < 1$ezért az első két oszlop elemeinek előjele tagonként megegyezik. Ha az $\overline{\boldsymbol{v}}$ vektor összes értéke azonos előjelű, akkor a determinánsok előjele megegyezik. Az $\boldsymbol{n}_3 \times \boldsymbol{n}_1$ szorzatból kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & -\gamma_2\lambda_3 & 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) \\ \boldsymbol{j} & -\gamma_3\lambda_3 & -\lambda_1(1-\gamma_1) \\ \boldsymbol{k} & 1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1 & -\lambda_1(1-\gamma_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_3\lambda_3\lambda_1(1-\gamma_2) + \lambda_1(1-\gamma_1)(1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1) \\ -\gamma_2\lambda_3\lambda_1(1-\gamma_2) + \big(1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1)\big)(1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1) \\ \gamma_2\lambda_3\lambda_1(1-\gamma_1) + \gamma_3\lambda_3\big(1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1)\big) \end{pmatrix}.$$

Ahol ***i,j,k*** a természetes bázis. Itt az első a harmadik koordinátához tartozó értékek a korábbi megkötések miatt biztosan pozitívak, a második koordináta, pedig nagyobb nullánál, ha

$$\gamma_2\lambda_3\lambda_1(1-\gamma_2) < \big(1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1)\big)(1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1).$$

Ennek a feltételnek a teljesülése esetén a síkba rajzolt alakzat teljesíti a nyílthalmaz feltételt, és az összefüggőségre vonatkozó feltételt is, vagyis a síkbeli iterált függvényrendszer (Î) box dimenziója megegyezik a síkbeli függvényrendszerhez tartozó függvények mátrixainak $(\breve{A}_1, \breve{A}_2 . \breve{A}_3)$ affinitási dimenziójával.

$$d\big(\breve{A}_1, \breve{A}_2 . \breve{A}_3\big) = \dim_{\mathrm{b}}(\hat{\mathrm{I}}).$$

4.4. Box dimenzió meghatározása

Állítás 4: A csonkolt csúcs környezetének affinitási dimenziója, amely a box dimenziójának felső korlátja megegyezik a síkbeli alakzat dimenziójával, amely a térbeli alakzat box dimenziójának alsó korlátja, ha teljesülnek az *Állítás 1* (4.1) és az *Állítás 3* (4.3) feltételei, valamint

$$(1-\lambda_1)\lambda_3(1-\gamma_2) + (1-\lambda_2)\lambda_3(1-\gamma_3) + (\gamma_3\lambda_2)(1-\lambda_3) < 1.$$

Az általunk vizsgált síkbarajzolható alakzatok dimenziójának meghatározásához felhasználjuk azt, hogy a síkban megrajzolható ábra affinitási dimenziója legfeljebb akkora, mint a háromdimenziósé, és legfeljebb 2 ([7]: 3.fejezet), így egy alsó korlátját adva a Box dimenzió becslésének. Ugyanakkor a háromdimenziós affinitási dimenzió a térbeli alakzat box dimenziójának felső korlátját jelenti [9]. Ha találunk olyan paraméterkombinációt, amelyre az alsó és a felső korlát megegyezik, akkor a megfelelő paraméterkombinációval létrehozott alakzatoknak ismert a dimenziója is:

$$d\big(\breve{A}_1, \breve{A}_2 . \breve{A}_3\big) \leq \dim_{\mathrm{b}}(F) \leq d(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$$

Ahol $\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}$ a síkban rajzoló függvények mátrixait jelenti, míg A_i a háromdimenziós függvényekét.

A síkba rajzolható alakzat dimenziója a szingulárisérték függvény tulajdonságai miatt kisebb vagy egyenlő, mint 2, az egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha a térbeli alakzat dimenziója legfeljebb 2:

$$d\big(\hat{\underset{.}{A}}_1, \hat{\underset{.}{A}}_2, \hat{\underset{.}{A}}_3\big) = \mathrm{d}\big(\breve{A}_1, \breve{A}_2, \breve{A}_3\big) = d(A_1, A_2, A_3) < 2.$$

Ennek igazolásához a $d(A_i)$ definíciójából származóan elegendő belátnunk, hogy az összes lehetséges szinguláris érték függvény összege egy véges nagy szám: $\alpha_1(\hat{A})\alpha_2(\hat{A}) = det(\hat{A})$, ami megegyezik két legnagyobb sajátértékének szorzatával, ami konstans szorzó erejéig összehasonlítható a $\phi^2(A)$-val [10], hiszen az általunk vizsgált függvények lineáris tagjai felső háromszög mátrixok.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_n} \phi^2(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) < \infty$, akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{3} \det(\hat{A}_i)\right)^n < \infty$, ami akkor és csak akkor lehetséges, ha $\sum_{i=1}^{3} \det(\hat{A}_i) < 1$.

Legyen P annak a vetítésnek a mátrixa, amely a síkban is megrajzolható alakzat függvényeinek közös normálvektorát a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorba forgatja a háromdimenziós alakzat pontjait pedig az xy síkra vetíti. P-t alkalmazva A_i-n A_i-nek a síkban található megfelelőjét $\hat{A}_{i_{ii}}$-t a következő alakban keressük: $\hat{A}_i = PA_iP^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{i_{11}} & \tilde{A}_{i_{12}} & 0 \\ \tilde{A}_{i_{21}} & \tilde{A}_{i_{12}} & 0 \\ w_1 & w_2 & a_{ii} \end{pmatrix}$, ahol a_{ii} a közös sajátvektorhoz tartozó sajátaltér valamely vektora. (w_1 *és* w_2 pedig a transzformációhoz szükséges valós számok). Ebben az esetben $\det(PA_iP^{-1}) = \det(P)\det(A_i)\left(\frac{1}{\det(P)}\right) = \det(A_i)$ugyanakkor a determináns a harmadik oszlop szerint kifejtve $\det(PA_iP^{-1}) = a_{ii}\det(\tilde{A}_{i_{ii}})$ vagyis $\det(\tilde{A}_{i_{ii}}) = \frac{\det(A_i)}{a_{ii}}$ ez a három függvény esetén:

$$A_1 \to \frac{\det(A_1)}{a_{12}} = (1 - \lambda_1)\lambda_3(1 - \gamma_2)$$

$$A_2 \to \frac{\det(A_2)}{a_{22}} = (1 - \lambda_2)\lambda_3(1 - \gamma_3)$$

$$A_3 \to \frac{\det(A_3)}{a_{23}} = (\gamma_3\lambda_2)(1 - \lambda_3)$$

A determinánsokból megállapítható összefüggés tehát:

$$(1 - \lambda_1)\lambda_3(1 - \gamma_2) + (1 - \lambda_2)\lambda_3(1 - \gamma_3) + (\gamma_3\lambda_2)(1 - \lambda_3) < 1$$

A 4. rész állításait összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a vizsgálataink tárgyát képző térbeli alakzatok affinitási dimenziója azon paraméterkombinációk esetén megegyezik box dimenziójukkal, amelyek

1. $a_{i2} = a_{i3} < a_{i1}$, az f_i függvények két kisebb abszolút értékű sajátértékei függvényenként megegyeznek

$$\lambda_2\,(1-\gamma_1\,) = \lambda_3\,(1-\gamma_2\,) < 1-\lambda_1 \qquad \text{és}$$

$$\gamma_1\,\lambda_1 = \lambda_3\,(1-\gamma_3\,) < 1-\lambda_2 \qquad \text{és}$$

$$\gamma_2\,\lambda_1 = \gamma_3\,\lambda_2 < 1-\lambda_3 \qquad \text{és.}$$

2. A két kisebb sajátértékhez tartozó sajátaltér normálvektoraiból képzett mátrix determinánsa 0:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1) & -\gamma_1\lambda_2 & -\gamma_1\lambda_2 \\ -\lambda_1(1-\gamma_1) & 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 & 1-\lambda_2-\lambda_1\gamma_1 \\ -\lambda_1(1-\gamma_2) & \lambda_2(\gamma_3-1) & \lambda_2(\gamma_3-1) \end{vmatrix}.$$

3. A síkbeli alakzat box dimenziója és affinitási dimenziója megegyezik, vagyis a síkba vetített képek is teljesítik a nyílt halmaz feltételt.

$$\gamma_2\lambda_3\lambda_1(1-\gamma_2) < \big(1-\lambda_1-\lambda_2(1-\gamma_1)\big)(1-\lambda_3-\gamma_2\lambda_1)$$

4. Ha a térbeli alakzat és a síkba rajzolható alakzat affinitási domenziójának értéke azonos.

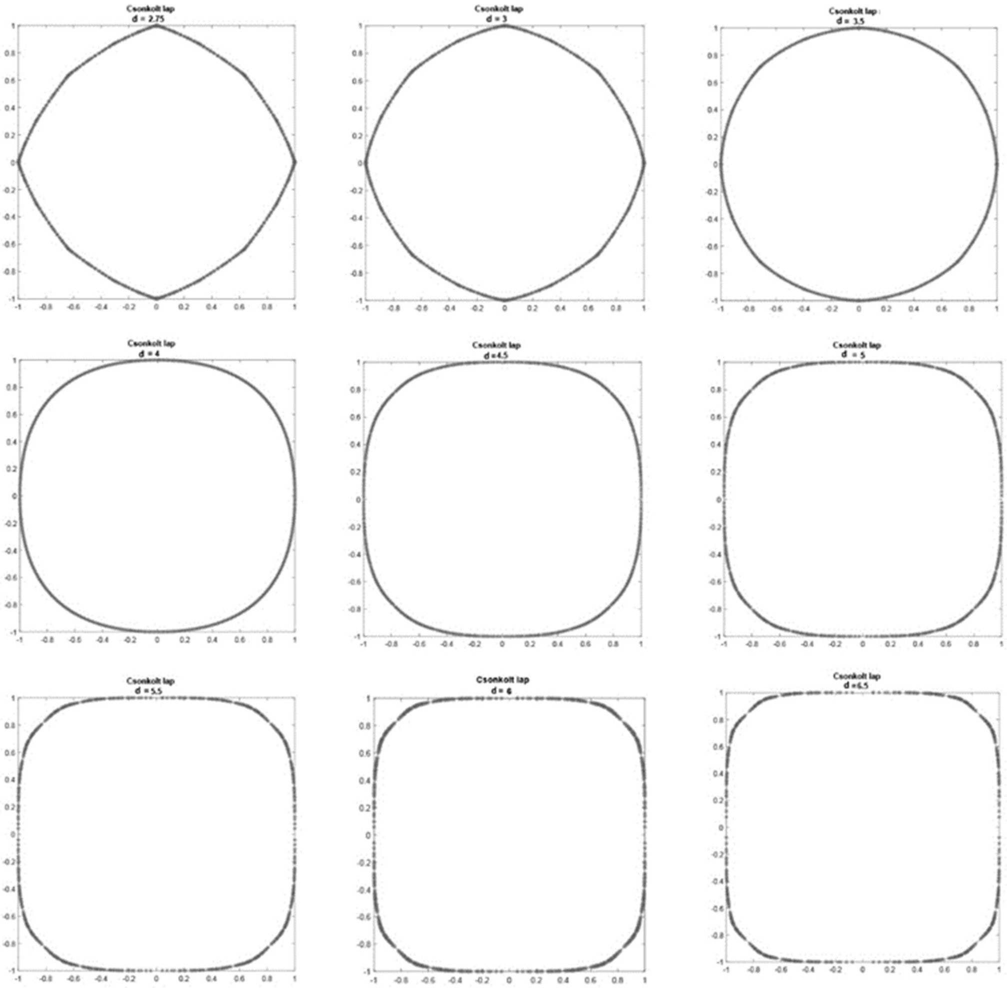
$$(1-\lambda_1)\lambda_3(1-\gamma_2) + (1-\lambda_2)\lambda_3(1-\gamma_3) + (\gamma_3\lambda_2)(1-\lambda_3) < 1$$

Ekkor

$$\dim_b(H) = d(A_1, A_2, A_3).$$

5. AZ ALAKZAT LAPJAIT HATÁROLÓ GÖRBÉK SIMASÁGA

Az előző dolgozatban bemutatásra került, hogy szimmetrikus csonkolás esetén nem létezik olyan rögzített λ arány, amely szabályos sokszögből újabb és újabb csúcsok levágása során kört adna határalakzatként. Rögzített paraméterkombinációk esetén az alakzat lapjait határoló görbék önaffinok, azonban hogyha minden vágáskor szabadon választhatjuk meg a paramétereket ez nem feltétlenül igaz. A 18.ábra négyzet kiinduló lapból eltérő, szimmetrikus csonkolások esetén kialakuló határalakzatatokat mutat. Ezek között csak a d=4-hez tartozó érték (amely ezen dolgozat jelöléseit használva megfelel a $\lambda = \frac{1}{2}$ esetnek) érezhető teljesen simának az ettől eltérő értékű csonkolások kisebb hibákat okoznak a görbében. Ennek oka az, hogy ezek a görbék csak első rendben differenciálhatók, míg a $\lambda = \frac{1}{2}$-höz tartozó érték magasabb rendben is.

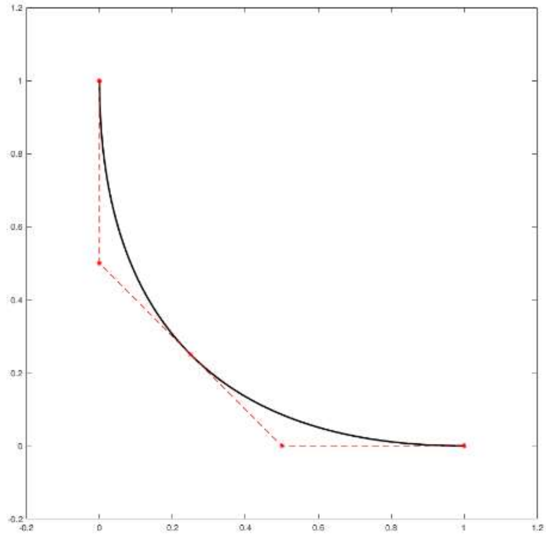


18.ábra Négyzet kiinduló lap határalakzata eltérő λ értékekre.

A. Kravchenko és C. Bandt cikke [4] alapján az általunk vizsgált görbék mindegyike első rendben differenciálható, mivel a modell alapján a függvények úgy kerültek meghatározásra, hogy a csatlakozási pontokban (γ-pontok) az összeillesztett darabok érintői megegyezzenek (hiszen egy élt alkot a két darab). Ugyanezen cikk szerint másodrendben folytonosan differenciálható önaffin görbe csakis a parabola lehet.

Most bemutatjuk, hogy az ebben a dolgozatban alkalmazott modell alapján az oldalak határoló görbéi csakis akkor lehetnek parabolák, hogyha a paraméterek $\lambda_i = \gamma_i = \frac{1}{2}$.

5.1. A határoló parabola alakjának meghatározása



19.ábra Parabolához illeszkedő csúcslevágás

A határoló görbe meghatározásához az általános parabola egyenletéből indulunk ki: $G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}at^2+bt+c\\dt^2+et+f\end{pmatrix}$. A parabola át kell menjen azokon a pontokon, amiket sosem vágunk le az alakzatról (ezek a függvények fix pontjai és az élek végpontjai), így a könnyebb kezelhetőség érdekében a parabola egyenlet átparaméterezhető.

$$G(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow c = 0, f = 0 \qquad\qquad G(1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow a + 1 = b, d = 1 - e$$

ez a görbe $G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bt^2-(b+1)t+1\\(1-e)t+et^2\end{pmatrix}$ alakjára vezet.

Mivel a görbék egymáshoz illesztésének pontjában is differenciálhatók kell legyenek, emiatt a fix pontokban a görbe érintője meg kell egyezzen a kiinduló lap eredeti élének irányával: $G'(0) = \begin{pmatrix}h\\0\end{pmatrix}$ és $G'(1) = \begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}$, $h \in R$ valamely h értékre. Így a görbe csak a következő lehet

$$G(t) = \begin{bmatrix}(t-1)^2\\t^2\end{bmatrix}.$$

5.2. A simaság paraméterkombinációjának meghatározása:

A kollázs-tétel szerint [1] hogyha az állandó paraméterkombinációval csonkolt alakzat attraktora rajta van a parabolán, akkor az attraktor határalakzata maga a parabola. Ez azt jelenti, hogy állandó csonkolás esetén elegendő meghatározni, hogy mely paraméter értékekre lesz az IFS első képe rajta az imént meghatározott görbén, a későbbi képek biztosan a görbére kerülnek majd. Hasonlóan hogyha az IFS első képének érintője a görbe érintője, akkor a későbbi képek is érintenek majd. Így az IFS kiinduló csúcsra vett képeinek végpontjai rajta kell legyenek a görbén. Mivel a függvények fixpontjain biztosan áthalad a görbe és ezekben a pontokban vett érintője biztosan megegyezik az eredeti él irányával (így paramétereztük) a következő egyenleteket kell igazzá tenni valamely t értékre:

$$F_i\big(G(1)\big) = G(t) \text{ és } A_i\big(G'(1)\big) = h\, G'(t).$$

Az általunk vizsgált három függvény a következő síkokban hoznak létre görbét:

	F_1	F_2	F_3
F_1	-	xy	xz
F_2	xy	-	yz
F_3	xz	yz	-

Amelyből a megoldandó függvények a következők:

$$1{:}\ F_{1,xy} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & \lambda_1(\gamma_1 - 1) \\ 0 & \lambda_2(1-\gamma_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2{:}\ F_{1,xz} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & \lambda_1(\gamma_2 - 1) \\ 0 & \lambda_3(1-\gamma_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3{:}\ F_{2,xy} = \begin{pmatrix} \gamma_1\lambda_1 & 0 \\ -\gamma_1\lambda_2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$4{:}\ F_{2,yz} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & \lambda_2(\gamma_3 - 1) \\ 0 & \lambda_3(1-\gamma_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5{:}\ F_{3,xz} = \begin{pmatrix} \gamma_2\lambda_1 & 0 \\ -\gamma_2\lambda_3 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$6{:}\ F_{3,yz} = \begin{pmatrix} \gamma_3\lambda_2 & 0 \\ -\gamma_3\lambda_3 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Ezekből az F_1 függvényre az xy síkban:

$1{:}\ \lambda_1\gamma_1 = (1-t)^2,$ $\qquad$ $2{:}\ \lambda_2(1-\gamma_1) = t^2,$

$3{:}\ \lambda_1(\gamma_1 - 1) = h\,(t-1),$ $\qquad$ $4{:}\ \lambda_2(1-\gamma_1) = ht$

Amely egyenletek a $\gamma_1 = 1 - h,\ \lambda_1 = 1 - h,\ \lambda_2 = h$ megoldásra vezetnek.

Az 1, 2, és 4, egyenletekben színessel kiemelve a változók egymással analógok, ezek mellett a konstansok is azok. Vagyis a 4, egyenlet alapján $\lambda_1 = 1 - h,\ \lambda_3 = h$ és $\gamma_2 = 1 - h,$ az ötödik egyenlet szerint pedig: $\lambda_2 = 1 - h,\ \lambda_3 = h$ és $\gamma_3 = 1 - h.$

Emellett a nem színezett 2, 3, és 6, függvények is azonos alakra hozhatók konjugálással. Elvégezve a $P\,F_i\,P + P\,t_i = \dot{\mathrm{F}}_i$ ahol $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, F_i a függvény mátrix része, t_i pedig a függvény eltolás tagja és bevezetve a $\bar{\Upsilon}_i = 1 - \gamma_i$ összefüggést:

$$2 \rightarrow \dot{\mathrm{F}}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & \lambda_2(\bar{\Upsilon}_1 - 1) \\ 0 & \lambda_1(1 - \bar{\Upsilon}_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \rightarrow \dot{\mathrm{F}}_3 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_3 & \lambda_3(\bar{\Upsilon}_2 - 1) \\ 0 & \lambda_1(1 - \bar{\Upsilon}_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$6 \rightarrow \dot{\mathrm{F}}_6 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_3 & \lambda_3(\bar{\Upsilon}_3 - 1) \\ 0 & \lambda_2(1 - \bar{\Upsilon}_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezeknek az első négy egyenlettel vett megoldásai tehát hasonlóan az 1, 4, 5-höz:

$$2 \rightarrow \lambda_2 = 1 - h,\ \lambda_1 = h, \bar{\Upsilon}_1 = 1 - h,$$

$$3 \rightarrow \lambda_3 = 1 - h, \lambda_1 = h, \bar{\Upsilon}_2 = 1 - h,$$

$$6 \rightarrow \lambda_3 = 1 - h, \lambda_2 = h, \bar{\Upsilon}_3 = 1 - h$$

Az 1, 4, 5-ből és a 2, 3, 6-ból bármely lambda értékre igaz kell legyen a $\lambda_i = 1 - h = h,$ amelyből $h = \frac{1}{2} = \lambda_i$, és bármely γ_i-re $\gamma_i = 1 - h$ és $\bar{\Upsilon}_i = 1 - h = 1 - \gamma_i = 1 - (1 - h)$, amelyből:

$$\bar{\Upsilon}_i = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma_i = \frac{1}{2}.$$

Az imént meghatározott λ_i és γ_i értékek alkalmazásával az F_1függvény függvényértékei a parabolára valóban invariánsok:

$$F_{1,xy}\big(G(t)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (t-1)^2 \\ t^2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-1)^2 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2 \\ (\frac{t}{2})^2 \end{pmatrix}.$$

ÖSSZEGZÉS

A dolgozat olyan poliéderek fraktál tulajdonságaival foglalkozott, amelyek a kiinduló P_0 poliéder csúcsainak vagy éleinek ismételt levágásából származnak. Az így létrejövő alakzatok vizsgálatának legfőbb indoka, hogy összefüggésbe hozhatók kövek kopásának modellezésével, egyrészt a csúcsok levágásának eseménye S.Redner és P.L. Krapivsky [11] kopásmodelljének háromdimenziós analógiája, másrészt az élek és a csúcsok levágásának megfelelő valószínűséggel vett ismétlésével diszkrét módon közelíthető J.F Bloore differenciálegyenletének eredménye [3][5]. Bár a dolgozatban vizsgált eset kő részecskék alakfejlődésének csak egy nagyon szűk csoportjával foglalkozik, a fraktálgeometriai szemlélet alkalmazhatóságának vizsgálata általános alakfejlődés modellezési kérdésekben is célszerű lehet.

Bemutattuk a kezdeti poliéder egy egyszerű csúcsának környezetében kialakuló élszerkezetet létrehozó véletlen iterált függvényrendszert, és a függvényrendszer paramétereinek azon kombinációit, amelyek esetén az alakzat valamely síkra vetített képe a síkban működő kétdimenziós iterált függvényrendszerrel is előállítható. A vizsgált alakzatok síkban is előállítható eseteinek vizsgálata kisebb számítás igényű vizsgálatokat tesz lehetővé, ezen kívül eleget tesznek azoknak a feltételeknek, amelyek teljesülése esetén ismert általános képlet önhasonló alakzatok box dimenziójának meghatározására.

A határalakzat lapjait szegélyező görbék egyszeres differenciálása lehetséges bármely paraméterkombináció esetén a csúcsok levágásának geometriai feltételei miatt. Magasabb rendű differenciálásra azonban csak akkor van lehetőség, ha a határoló görbék parabolák, amelyet a dolgozat modelljének egyetlen paraméter kombinációja állít elő: $\lambda_i = \gamma_i = \frac{1}{2}$.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Hálásan köszönöm a dolgozat készítése során nyújtott folyamatos és inspiráló, szakmai vezetést konzulenseimnek dr. Bárány Balázs és dr. Domokos Gábor tanár uraknak!

IRODALOMJEGYZÉK:

[1] M. Barnsley, M. Fielding: „Fractal Functions and Interpolation." *Constructive approximation*, 1986: 303-329.

[2] Benoit B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman and Co, San Francisco, Calif, 1982

[3] F.J. Bloore: The Shape of Pebbles, *Mathematical Geology,* **9** (1977), 113-120.

[4] C. Bandt and A. Kravchenko: Differentiability of fractal curves *Nonlinearity* **24** (2011), 2717-2728.

[5] G. Domokos, A. Sipos, P. Várkonyi: „Continuous and discrete models for abrasion processes", *Periodica Polytechnica*, **40/1** (2009), 3-8.

[6] John E. Hutchinson: Fractals and self similarity, *Indiana University Mathematical Journal* **30** (1981) no.5, 713-747.

[7] K. J. Falconer: *Fractal geometry,* Second Edition, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, 2003., 3. Fejezet

[8] K. J. Falconer: The dimension of self-affine fractals II, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **111** (1992), 169-179.]

[9] K.J. Falconer: „The Haussdorf dimension of self affine fractals" *Mathematical Proceedings of the Philosophical Society,* **103** (1988): 339-350.

[10] J.Miao, K.J. Falconer. „Dimension of self affine fractals and multifractals generated by upper triangular matrices." *Fractals*, (2007): 289-299.

[11] S. Redner, Krapivsky, Smoothing a rock by chipping, Physical Review E, 75 031119, (2007)

[12] Szesztay Ágoston: *„Élein szelt poliéderek kombinatorikus és metrikus tulajdonságai"* Tudományos Diákköri dolgozat, BME, 2021.

ÁBRAJEGYZÉK:

Ábra felirata és forrása, saját ábrák készítéséhez felhasznált program