

Differenciálegyenletek gyakorlat házi feladatok

2011/12/2

Barta Zsuzsanna

1. HF (beadási határidő: február 15. szerda 10:15)

1.1.

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} x(t) \ln |x(t)| & \text{ha } x(t) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x(t) = 0 \end{cases}$$

- Oldja meg a következő differenciálegyenletet (a jobboldal 0-ban is folytonos!) és vázolja a megoldásokat!
- Teljesülnek-e az egzisztencia- és unicitástétel feltételei?
- Minden kezdetiérték feladathoz egyértelmű megoldás tartozik? Ezek alapján mire következtethetünk a Lipschitz-feltétellel kapcsolatban?

1.2.

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

- Oldja meg (esetszétválasztás: $x(t) > 0, x(t) = 0, x(t) < 0$)!
- Minden kezdetiérték feladathoz egyértelmű megoldás tartozik?
- Teljesülnek-e az egzisztencia- és unicitástétel feltételei?

Mj.: Mivel $\dot{x}(t) \geq 0 \Rightarrow x(t)$ monoton növekedő kell legyen (és differenciálható).

1.3. ••• Oldja meg a következő egyenletet!

$$x \, dy = y(\ln y - \ln x) \, dx$$

1.4. (Korlátos növekedés modellje) Gyakorlaton szerepelt a korlátlan növekedés modellje ($\dot{x}(t) = rx(t)$). De az exponencialitás nem lehet állandó: általában rövid életű, a populációnövekedés első szakaszára jellemző, így P.F. Verhulst 1838-ban kidolgozott egy ennek megfelelő modellt, amely ma a leginkább használt egyszereplős populációdinamikai modell. A modellben szerepel egy új paraméter a K , a környezet teherbíró képessége, mely azt mondja meg, hogy maximum hány egyedet képes a környezet eltartani.

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

- Oldja meg a differenciálegyenletet!
- Érveljünk amellet, hogy miért jó ez a modell a megoldásgörbék feltérképezése segítségével (matematikai programcsomagot is lehet használni)!

2. HF (beadási határidő: február 22. szerda 10:15)

2.1. ●●● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$\dot{y} = \frac{6x + y - 1}{4x + y - 2}$$

2.2. ●●●● Oldja meg mindkét tanult módszerrel a következő differenciálegyenletet!

$$t\dot{x}(t) - 2t^2\sqrt{x(t)} = 4x(t)$$

2.3. ●●● Legyen $x : [0; \infty) \mapsto (0, \infty)$ egy differenciálható függvény, amelyről ismert, hogy minden $t_0 > 0$ esetén az $(t_0, x(t_0))$ pontba húzott érintő, a $t = t_0$ egyenes és a koordinátengelyek által meghatározott trapéz területe állandó. Mi lehet az $x(t)$ függvény?

2.4. ●●● Törpicur egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából 1 cm/s sebességgel menekül Hókuszpók elől a szalag rögzített bal végpontja felé. Hókuszpók ezzel egyidejűleg a szalag jobb végpontját 100 cm/s sebességgel húzza hátra. Eljut-e valamikor Törpicur a szalag másik végére (és ha igen, mikor)?

3. HF (beadási határidő: február 29. szerda 10:15)

3.1. ●●● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$x^2y'(x) - x^2y^2(x) - xy(x) = 1$$

3.2. ●●● Bizonyítsa be a gyakorlaton szereplő tételt (egzaktság szükséges és elégséges feltétele)!

3.3. ●● Mutassa meg, hogy a $(3xy + 2y^2)dx + (3xy + 2x^2)dy = 0$ differenciálegyenletnek létezik $g(x + y)$ szerkezetű integrálótényezője!

● Oldja meg a differenciálegyenletet!

●● Ha egy egyenlethez létezik két lineárisan független integrálótényező ($m_1(x, y)$ és $m_2(x, y)$), akkor az általános megoldás felírható $\frac{m_1(x, y)}{m_2(x, y)} = C$ alakban. Ellenőrizze, hogy ez jelen esetben is így van-e (órai $f(xy)$ alakú integrálótényezővel)! Mi lehet ennek az oka?

3.4. ●●● Határozza meg az $x^2 + y^2 = c$ koncentrikus körsereget 45° -ban metsző görbesereget!

4. HF (beadási határidő: március 7. szerda 10:15)

4.1. ●● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$xy''(x) = y'(x) + x^2 \sin x$$

- 4.2. ● ● ● Oldja meg a következő differenciálegyenletet a megadott kezdeti feltételek figyelembe vételével!

$$y''(x)(y(x) - 1) = 2y'(x), \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 0$$

- 4.3. ● ● ● ● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$x(x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x) = -1$$

- 4.4. ● ● ● ● ● Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

i. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

ii. $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$

iii. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

iv. $x^{(4)}(t) - x(t) = 0$

v. $x^{(3)}(t) - 2x^{(2)}(t) - 3\dot{x}(t) = 0$

vi. $x^{(4)}(t) - 2x^{(3)}(t) + 2x^{(2)}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$

Megjegyzés: Érdemes felírni a homogén egyenletek általános megoldását, mert a következő feladatsorban inhomogén egyenletek általános megoldását kell majd keresni.

5. **HF** (beadási határidő: **március 14. szerda 10:15**)

- 5.1. ● ● ● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2x^2 - \sin x \cos x + \cosh x$$

- 5.2. ● ● ● ● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = x \sin x + \cos(3x - 1)$$

- 5.3. ● ● ● ● Oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x + \frac{e^x}{x} + x - 1 + e^x \cos x$$

- 5.4. ● ● Egy 50 l-es tartály kezdetben 10 l vizet tartalmaz. Egy csövön 4 l/s sebességgel olyan víz folyik bele, melyben 1 kg/l só van feloldva. Az oldat 2 l/s sebességgel hagyja el a tartályt. Határozzuk meg azt az időt, amikor a tartály megtelik és ebben az időpillanatban azt, hogy mennyi só van a tartályban!

- 5.5. ● ● Egy origón áthaladó görbe tetszőleges $P(x, y)$ pontján keresztül húzzunk párhuzamosakat az x , illetve az y tengellyel ($x > 0, y > 0$). Az így kapott téglalapot a görbe két olyan részre osztja, melyek területének aránya 1 : 3. Határozzuk meg a görbét!
-

6. HF (beadási határidő: március 21. szerda 10:15)

- 6.1. Határozza meg az $y'(x) = xy(x)$, $y(0) = 1$ kezdeti érték feladat megoldásának közelítését
- Newton módszerrel (negyedfokú tagig)
 - határozatlan együtthatók módszerével (negyedfokú tagig)
 - szukcesszív approximációval (első három közelítés)!

Adja meg a megoldást zárt alakban is!

•• Írja fel a teljes hatványsort is Newton módszerrel vagy a határozatlan együtthatók módszerével!

Megj.: A határozatlan együtthatók módszerével most egyszerűbb dolgozni, ebből a hatványsor együtthatóira közvetlenül adódik egy rekurzív formula.

- 6.2. ••••• Oldja meg a következő differenciálegyenletet minél többféleképpen (legalább két megoldási módszer)! Minden további megoldásért pluszpont jár, megoldásonként 2 pont. Az egyik megoldási módszer legyen a határozatlan együtthatók módszere, írjuk fel a teljes hatványsort. A hatványsorból felismerhető a zárt alakú megoldás.

$$x^2 y''(x) + xy'(x) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

- 6.3. •••• Adja meg a következő differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását és az $x(0) = 2, y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldást is!

$$\dot{x} - 2x - y = 0$$

$$\dot{y} - 2y - x = 0$$

Oldja meg a feladatot kétféleképpen (másodrendű egyenletté átírva és rendszerként tekintve is)!

7. HF (beadási határidő: március 29. csütörtök 8:30)

- 7.1. ••• Bizonyítsa be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok kommutálnak ($AB = BA$), akkor $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$. Hol használjuk a bizonyításban a kommutativitási feltételt?
- 7.2. Adja meg a következő differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását:

i. •••

$$\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t + 1$$

$$\dot{y} = -x + \operatorname{tg} t$$

ii. ••

$$\dot{x} = y + t$$

$$\dot{y} = -x + 2e^t$$

Az (i) részben az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandók variálásával lehet meghatározni, a (ii) részben érdekesebb próbafüggvény módszert alkalmazni. Mielőtt számolnánk, gondoljuk meg, hogy milyen alakban érdemes a partikuláris megoldást keresni. (Figyelem: x és y nem egymástól függetlenül fejlődik.)

7.3. •• Igazoljuk, hogy ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

Így ezt az At mátrixra alkalmazva $e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$.

7.4. ••••• Adjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!

$$\dot{x} = 3x - y - 2z$$

$$\dot{y} = -8x + 6y + 10z$$

$$\dot{z} = 5x - 3y - 5z$$

8. HF (beadási határidő: április 4. szerda 10:15)

8.1. Tegyük fel, hogy valamely populáció két részre osztható: azokra akik megkaptak egy bizonyos betegséget és képesek megfertőzni másokat, és azokra akik a betegséget még nem kapták meg de hajlamosak arra, hogy a betegséget megkapják. Az utóbbiaknak a teljes populációhoz viszonyított arányát nevezzük x -nek és az előbbinek a teljes populációhoz viszonyított arányát y -nak ($0 \leq x, y \leq 1$). Tehát $x + y = 1$. Tegyük fel, hogy a betegség azáltal terjed, hogy egészséges és beteg egyének találkoznak és a betegség terjedésének $\frac{dy}{dt}$ sebessége arányos ezen találkozások számával. Tegyük fel, hogy az egészséges és beteg emberek szabadon mozognak egymás között, tehát az egymással való találkozásaik száma arányos xy -nal. Mivel $x = 1 - y$ kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0,$$

ahol $\alpha > 0$ arányossági tényező és y_0 a beteg egyének aránya a teljes populációban kezdetben.

- i. •• Határozzuk meg az egyensúlyi állapotokat és osztályozzuk őket aszerint, hogy aszimptotikusan stabilak vagy instabilak-e (+ábra)!
- ii. •• Oldjuk meg a fenti kezdeti érték problémát és ezáltal igazoljuk, hogy az előző pontban levont következtetésünk helyes volt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty,$$

vagyis a betegség az egész populációt megfertőzi.

- iii. ●● Rajzoljuk fel a trajektóriákat a síkban! (Számítógépes programot is használhatunk.)
- iv. ● Melyik már tanult modellre hasonlít ez a járványterjedési modell? Ott mi a válasz az (i) kérdésre?

Mj.: Daniel Bernoulli 1760-ban már használt matematikai módszereket a himlő terjedésének vizsgálatára. Hasonló modelleket használnak a rémhírek terjedésének modellezésére és bizonyos árucikkek terjedésének vizsgálatára.

- 8.2. ●● Az $\dot{x} = -x^2 + \mu x$ egyenlet mely egyensúlyi pontjai stabilak, aszimptotikusan stabilak, ill. instabilak? Adjuk meg a választ a $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter minden lehetséges értékére. (A megoldás explicit alakjára nincs szükség, elég a fázisképek alapján megválaszolni a kérdést.)
- 8.3. ●●● Ljapunov értelemben stabilisak illetve aszimptotikusan stabilisak-e a következő differenciálegyenlet megoldásai: $\dot{x} = -x + t$?
- 8.4. ●●● Legyen $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, f az egész $\mathbb{R}$ -en analitikus függvény. Határozzuk meg a következő mátrixot:

$$f(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} J^n.$$

9. HF (beadási határidő: április 11. szerda 10:15)

- 9.1. ●●●●● Rajzoljuk fel a következő differenciálegyenlet-rendszerek fázisképeit! Ahol szükséges, ott a nullklínákat is rajzoljuk be! (1 pont feladatonként)
Adjuk meg a (0,0) egyensúlyi pont típusát (ha lehet) illetve azt is, hogy stabil, instabil vagy aszimptotikusan stabil!
A fázisportrékat ábrázoljuk számítógép segítségével is (ellenőrzésképpen) és nyomtassuk ki őket (0.5 pont feladatonként)!
Mathematicában az újabb verziókban a *StreamPlot* parancs (szebb), míg a régebbiekben a *VectorFieldPlot* parancs használható erre a célra. A *VectorFieldPlot* parancs használatához be kell tölteni a *VectorFieldPlots* csomagot a következőképpen:
`Needs["VectorFieldPlots"]`.

i. $\dot{x} + 2x = 2y$

$\dot{y} + 3y = x$

ii. $\dot{x} = -3x + 2y$

$\dot{y} = -2x + y$

iii. $\dot{x} = -2x + 6y$

$\dot{y} = x - 3y$

iv. $\dot{x} = x + 2y$

$\dot{y} = -4x + 5y$

9.2. ● ● ● ●

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 2\alpha + 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Milyen α értékekre lesz a fenti differenciálegyenlet-rendszer 0 egyensúlyi helyzete

i. nyeregpont

ii. stabil

iii. aszimptotikusan stabil

iv. instabil?

9.3. ● ● Keressük meg a következő rendszer egyensúlyi helyzetait, vizsgáljuk azok stabilitását és adjuk meg a típusukat linearizálás segítségével. Rajzoljuk fel a lokális fázisképet az egyensúlyi helyzetek közelében illetve amennyire tudjuk a globális fázisképet is.

$$\dot{x} = 5 - x^2 - y^2$$

$$\dot{y} = 1 + y^2 - x$$

9.4. ● ● ● Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, azok jellegét linearizálás (vagy egyéb módszerek /pl.: nullklínák/) segítségével, majd vázoljuk a fázisportrét!

$$\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$$

$$\dot{y} = 2x$$

10. **HF** (beadási határidő: **április 18. szerda 10:15**)

10.1. ● ● ● Adjuk meg a következő rendszer fázisképét: $\dot{x} = -xy^4, \dot{y} = x^6y$.

(A sumák módszer segítségével adjuk meg a fázisgörbék egyenletét avagy adjuk meg a rendszer egy első integrálját, azaz keressünk olyan függvényt, ami a megoldások mentén állandó! A fázisgörbék e függvény szintvonalain haladnak.)

10.2. ● ● ● Adjuk meg a következő nemlineárisan csillapított rezgés fázisképét: $\ddot{x} + (\dot{x})^2 + x = 0$. (Írjuk át az egyenletet rendszerré, majd a sumák módszer segítségével adjuk meg a fázisgörbék egyenletét. Ez alapján próbáljuk meg felrajzolni a fázisképet. Ehhez esetleg számítógépet is használhatunk.)

10.3. ● ● ● ● ● Az alábbi kétdimenziós rendszerekben keressük meg az egyensúlyi pontokat, és határozzuk meg azok típusát. Ha a linearizálás centrumot ad, akkor egyéb módszerek

(pl.: a rendszer valamely szimmetriájának felismerése vagy polárkoordinátákra való áttérés) segítségével határozzuk meg a pontok jellegét. Rajzoljuk fel a rendszer lokális és amennyire tudjuk a globális fázisképét is.

i. $\dot{x} = -y - xy^2 - x^3, \dot{y} = x - y^3 - x^2y$

ii. $\dot{x} = -y + x^3 + xy^2, \dot{y} = x + y^3 + x^2y$

10.4. ●●● Igazolja, hogy ha $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ szürjektív folytonos függvény, akkor létezik fixpontja! (Következő gyakorlaton használni fogjuk ezt a tételt...)

11. **HF** (beadási határidő: **április 25. szerda 10:15**)

Fontos! Az órai táblázatban van egy hiba, melynek javítása:

$$L\{f(t - t_0)1(t - t_0)\}(s) = e^{-t_0s}F(s).$$

Amint végleges lesz a Laplace-transzformációs táblázat, fent lesz a honlapomon.

11.1. $\dot{x} = xy + x^3$

$\dot{y} = -y + y^2 - x^3 + x^4$

Legyen $V(x, y) = 2y^2 - x^4$!

i. ● $L_f V = ?$

ii. ●●● Mit mondhatunk a $V(x, y)$ függvény segítségével a $(0, 0)$ stabilitásáról?

11.2. ●● $F(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{(s - 1)^2}, f(t) = ?$

11.3. $f(t) = g(t) = \sqrt{t}, t \geq 0$

i. ●●● $(f * g)(t) = ?$

ii. ● $L(f * g)(s) = ?, L(\sqrt{t})(s) = ?$

11.4. ●● Legyen $s \in \mathbb{C}$! Vezessük le a $\sin(\alpha t)$ és $\cos(\alpha t)$ Laplace-transzformáltját ($\alpha \in \mathbb{R}$)!

● Mit mond a tanult tétel a konvergenciatartományról, és mit kapunk a számolás során?

11.5. ●●

$$f(t) = \begin{cases} 3t + 2 & 0 \leq t < 2 \\ 2 - 2t & 2 \leq t < 4 \\ t + 1 & 4 \leq t < 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}, L\{f(t)\}(s) = ?$$

12. HF (beadási határidő: május 2. szerda 10:15)

- 12.1. ●●● Oldjuk meg Laplace transzformációval illetve másodrendű, állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletként!

$$x^{(4)}(t) + 2x^{(2)}(t) + x(t) = \cos t, x(0) = \dot{x}(0) = x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = 0$$

- 12.2. ●● Oldjuk meg Laplace transzformáció segítségével!

$$\dot{x} = -x + y + z$$

$$\dot{y} = -x - y$$

$$\dot{z} = -3x - z$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = -1$$

- 12.3. ●● Oldjuk meg Laplace transzformációval!

$$y''' - 6'' + 12y' - 8y = t^3 e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = -2$$

- 12.4. ●●● Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet! (A megoldást soralakban adhatjuk meg.)

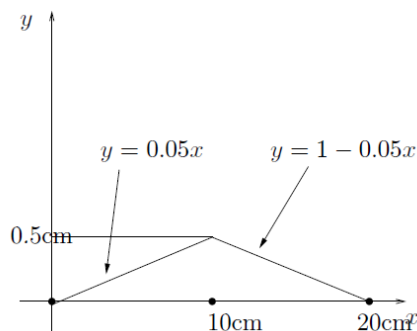
$$x'' + 4x = f(t), x(0) = x'(0) = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}, \quad f(t + 2k) = f(t), k = 0, 1, 2, \dots$$

- 12.5. i. ●● Vezessük le az l hosszú rúd hővezetési egyenletének megoldását homogén Neumann peremfeltétellel (úgy, ahogy a gyakorlaton a homogén Dirichlet feltétel esetén)!
- ii. ●● Adjuk meg a feladat megoldását $l = \pi, u(0, x) = \sin^2 x$ esetén! Ábrázoljuk számítógép segítségével a rúd hőmérsékleteloszlását a $t = 0, t = 0.01, t = 0.1, t = 1$ időpillanatokban (egy ábrán látszik jól)!
-

13. HF (beadási határidő: május 9. szerda 10:15)

- 13.1. Legyen a rezgő húr egyenletében szereplő c sebesség 1. A 20 cm hosszú két végén rögzített húrt megfeszítjük úgy, ahogyan az ábra mutatja, majd elengedjük.



- i. ●●● Határozzuk meg a húr alakját leíró $u(x, t)$ függvényt a Bernoulli-féle módszerrel!
- ii. ● Határozzuk meg a húr mozgását leíró $u(x, t)$ függvényt D' Alambert módszerével!
- iii. ● Ábrázoljuk a húr alakját számítógép segítségével néhány időpillanatban!

13.2. ●●●

$$u'_t = u''_{xx} + tx, \quad u(0, x) = \sin^3 x, \quad u(t, 0) = t, \quad u(t, \pi) = t^2$$

- 13.3. i. ● Bizonyítsuk be, hogy $L(\int_0^t f(\tau) d\tau)(s) = \frac{F(s)}{s}$, ha $L(f(t))(s) = F(s)$.
- ii. ●●● Igazoljuk a gyakran használatos, úgynevezett Cauchy-formulát:

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(u) du \, dt_n \dots dt_2 \, dt_1 = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-u)^n f(u) du.$$

- 13.4. ●●● Oldjuk meg a hővezetési egyenletet egy 1 m hosszú rúdon, ha a kezdeti hőmérsékleteloszlást az $x(1-x)$ függvény írja le (középen melegebb a rúd kezdetben), és a rúd végeit végig $0^\circ C$ hőmérsékleten tartjuk.