MŰEGYETEM 1782

TYPOTEX

BARABÁS BÉLA – FÜLÖP OTTÍLIA

AZ ÉPÍTÉSZEK MATEMATIKÁJA, I

2011

Speciálisan az építészmérnök hallgatók számára felépített elméleti anyag az elmélet megértését segítő feladatokkal. A tananyag az építészeknek szükséges mélységben és részletezettséggel tárgyalja a következő témaköröket: numerikus sorozatok; egyváltozós függvények határértéke, differenciálszámítás és alkalmazásai, integrálszámítás és alkalmazásai, vektoralgebra, a tér analitikus geometriája, mátrixalgebra, lineáris egyenletrendszerek.

Kulcsszavak: numerikus sorozat, függvény határérték, folytonosság, differenciálszámítás, differenciálszámítás alkalmazási, érintő, szélsőérték, integrálszámítás, terület, térfogat, ívhossz, súlypont, felszín, görbület, paraméteres görbék, mátrix, lineáris egyenletrendszer.

Támogatás:

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

Készült:

a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

Szakmai felelős vezető:

Ferenczi Miklós

Lektorálta:

Sándor Csaba

Az elektronikus kiadást előkészítette:

Erő Zsuzsa

Címlap grafikai terve:

Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN: 978-963-279-464-8

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés

Amikor mi, laikusok távolról közelítünk meg egy építményt, figyelmünk fokozatosan terelődik át az egészről a részletekre, szem előtt tartva a teljes egységet, a koncepciót, a fizikai környezet által meghatározott feltételeket, az arányokat, a szimmetriát, a színeket, finomságot, fény és árnyék kölcsönhatását és a harmóniát.

Az ókori görögök, főleg Püthagorasz és követői, a püthagoreusok szerint a tökéletes harmónia (azaz kapocs) a legkisebb természetes számok arányaival fejezhető ki. A püthagoraszi harmóniára egyik legszebb példánk a következő: ha egy háromszög oldalainak aránya 3:4:5, akkor a háromszög derékszögű. Ez éppen Püthagorasz tételéből következik, mert $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Az igazság kedvéért meg kell itt említenünk, hogy bár a matematikatörténet ezt Püthagorasznak tulajdonítja (hiszen ő bizonyította), a babiloniak is használták ezt egy évezreddel Püthagorasz előtt, azzal a különbséggel, hogy ők nem tudták, hogy ez igaz valamennyi derékszögű háromszögre.

A Püthagorasz-tétel (másképpen írva Pitagorasz-tétel) tulajdonképpen közvetlen őse a nagy Fermat-sejtésnek (amit érdekes módon, bár 1994-ben bonyolult matematikai módszerekkel bizonyítottak, előszeretettel továbbra is sejtésnek nevezünk). Ez a sejtés a püthagoraszi alapokat kapcsolja össze a matematika legbonyolultabb elképzeléseivel, ami több mint három évszázadon át lenyűgözte a matematikustársadalmat. Maga a feladat olyan egyszerű, hogy egy kisiskolás is megértheti.

1670-ben Toulouse-ban Pierre de Fermat (1601–1665) francia matematikus és jogász halála után megjelent a „Diophantosz Arithmeticája Pierre Fermat megjegyzéseivel” című kötet, melyben Fermat a 8. probléma tőszomszédságában széljegyzetként kijelentette, hogy az

$x^n + y^n = z^n$ egyenletnek bármilyen rögzített $n = 3,4,5,...$ számra nincsen pozitív egész (x, y, z) megoldása. Matematikusok nemzedékeit „őrjítette meg” ingerkedő megjegyzésével, amit szintén ide írt be:

„Igazán csodálatos bizonyítást találtam erre a tételre, de ez a margó túl keskeny, semhogy ideírhatnám.” (Lásd Simon Singh, A nagy Fermat-sejtés, Park Könyvkiadó, Budapest, 1999.)

Hogy miért említjük ilyen részletességgel ezt az érdekes, püthagoraszi gyökerekkel rendelkező, de csak a múlt évszázad végén bizonyított feladatot? Többek között azért, mert az előadáson elhangzó tételeket (legtöbbjüket itt nem is bizonyítjuk) évek múltán könnyen elfelejthetik, ezt valószínűleg nem. Míg az itt tanult matematikatételek nagy többségének az utca embere hátat fordítana, még a Fermat-sejtés bizonyítása előtti időkben, New Yorkban, a Nyolcadik utcai metróállomás falán a következő falfirka jelent meg:

„$x^n + y^n = z^n$: nincs megoldás. Igazán csodálatos megoldást találtam erre a tételre, de most nincs időm ideírni, mert jön a metró”.

Az arány (pl. 3:4) neve görögül logosz, az aránypáré (pl. 6:8=9:12) pedig analógia. A görögök szerint világszemléletünk három alapfogalma a *harmónia*, a *logosz* és a *szimmetria*. Andrea Palladio (1508–1580) észak-itáliai építész hitvallása szerint egy valamirevaló épületnek hármas követelménynek kell megfelelnie: *kényelem*, *tartósság*, *szépség*, ha ezek közül valamelyik is hiányzik, az épület nem méltó nevére. Palotáival és villáival, új arányaival, tiszta vonalvezetésével a reneszánsz építészet egyik legtermékenyebb mesterévé vált, megszámlálhatatlan követővel. A Villa Capra „La Rotonda” matematikai precizitással kiszámolt arányossággal rendelkező Palladio-villa terveit a római Pantheon ihlette és Vicenza városán kívül, egy dombtetőre épült. Elnevezése, a „La Rotonda” a központi, kör alakú kupolás hallra utal. Az épület a fent említett credo minden egyes pontjának megfelel, szimmetrikus szerkezeteit, díszítőelemeit, klasszikus formáit több mint négyszáz évig utánozták.

Amikor Püthagorasz Hippaszosz nevű fiatal tanítványa felfedezte, hogy a $\sqrt{2}$ (pl. az egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza) nem fejezhető ki két természetes szám hányadosaként, tehát a „püthagoreus értelemben véve nem szám”, a püthagoreusok egész világszemlélete összeomlott. Úgyhogy inkább vízbe fojtották Hippaszoszt és továbbra sem vettek tudomást az ilyen számok létezéséről. Talán ez az egyetlen dicstelen tett, ami a nevükhöz kapcsolható. A $\sqrt{2}$ -t és az irracionális számokat csak a mester halála után merték újra „életre kelteni”.

Vegyünk most egy 1 és $\sqrt{2}$ oldalú téglalapot. Megkétszerezve a rövidebbik oldalt, 2 és $\sqrt{2}$ oldalú téglalapot kapunk, ami ugyanolyan arányú, mert $1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$. Ez azt mutatja, hogy két egyforma papírlapot „ügyesen” egymás mellé rakva olyan nagyobb lapot kapunk, mely hasonló az eredetihez.

Ha egy egységnyi hosszúságú szakaszt úgy osztunk két részre, hogy a kisebbiknek és a nagyobbiknak az aránya egyenlő legyen a nagyobbiknak és az egésznek az arányával, azaz a nagyobbik részt *x*-szel jelölve, $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$ másodfokú egyenletet kapunk, melynek egyetlen pozitív megoldása az $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ és ekkor a nagyobbik és kisebbik aránya $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, az aranymetszési arány. Az aranymetszésről Velencében, 1509-ben Fra Luca Paccioli „De Divina Proportione” címmel könyvet írt, melyet barátja, Leonardo da Vinci illusztrált. Nézzük meg az aranymetszés egyéb előfordulását is. Fibonacci, a középkor kiemelkedő matematikusa, 1200 körül, nyulak szaporodását vizsgálva, bevezette és tanulmányozta a következő numerikus sorozatot: 1,1,2,3,5,8,13,21,…, azaz általánosan $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjainak hányadosa: 1; 2; 1,5; 1,666; 1,6; 1,625; 1,6153, ..., az aranymetszés értékéhez tart.

A Fibonacci-számok arányai a természetben is megtalálhatók: a szilvafa gallyain a levelek általában félfordulatra követik egymást, a bükknél, mogyorónál ez 1/3, a tölgynél, sárgabaracknál 2/5, körtefánál, nyárfánál 3/8, mandulánál, fűzfánál 5/13, és így tovább. Ezek az arányok éppen a másodszomszéd Fibonacci-számok arányai. Kepler szerint éppen az aranymetszés adta az ötletet a Teremtőnek, hogy bevezesse a hasonló dolgoknak hasonló dolgokból való származtatását.

Bevezetőnk nem teljes, ha nem teszünk említést a párhuzamos egyeneseket időnként metszőknek ábrázoló *perspektivitásró*l. A perspektív transzformáció a reneszánsz ideje alatt terjedt el, főként a firenzei Filippo Brunelleschinek köszönhetően. Tanítványa, Masaccio olyan Szentháromság-képet festett a firenzei Santa Maria Novella templom falára, hogy azt hitték, áttörték a templom falait. Ahogy a perspektivitás nem a végső szó a transzformációk világában, úgy Brunelleschi sem az az építészetben. Azóta is nagyszerű megoldások, koncepciók születnek, egyre újabb harmóniákat teremtünk, igyekezvén minél jobban kihasználni a rendelkezésünkre álló matematikai eszközöket, lehetőségeinket és képzeletünket.

„I am certain of nothing, but the holiness of the heart's affections and the truth of Imagination… What the Imagination seizes as Beauty must be Truth." (John Keats, Letter, November 22, 1817.)

2. Numerikus sorozatok fogalma, határértéke

2.1. Konvergens és divergens sorozatok

2.1.1. Definíció: A természetes számokon értelmezett $N \to R$ valós értékű függvényeket *sorozatoknak* nevezzük. Például:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, azaz $a_n = \frac{1}{n}$,

b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$, azaz $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$,

c) $-1, 1, -1, 1, \ldots$, azaz $a_n = (-1)^n$,

d) $1, 4, 9, 16, \ldots$, azaz $a_n = n^2$,

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$, azaz $a_n = \frac{n}{n+1}$,

f) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$, azaz $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$,

g) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, azaz $a_n = \frac{1}{2^n}$.

2.1.2. Megjegyzés: A sorozat indexezését kezdhetjük 0-val, sőt, egy $\{m, m+1, m+2, \ldots\} \to R$ függvényt is sorozatnak nevezünk, amennyiben m tetszőleges természetes szám. Ekkor az $(a_n)_{n \geq m}$ jelölést használjuk.

2.1.3. Definíció: Az $(a_n)_{n \geq m}$ sorozat

(*monoton*) *növekedő*, ha minden $n \in N$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$,

szigorúan növekedő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n < a_{n+1}$,

(*monoton*) *csökkenő*, ha minden $n \in N$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$,

szigorúan csökkenő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n > a_{n+1}$.

2.1.4. Megjegyzés: A fenti példákban az a) és g) szigorúan csökkenő, d) és e) szigorúan növő, b), c) és f) sorozat alternáló előjelű, tehát nem monoton.

2.1.5. Definíció: Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat *korlátos*, ha létezik olyan A és B szám, amelyekkel minden $n \in N$ esetén teljesül az $A \leq a_n \leq B$ egyenlőtlenség (ekkor az A-t a sorozat egy *alsó korlátjának*, B-t pedig egy *felső korlátjának* nevezzük).

2.1.6. Megjegyzés: A fenti példákban a d) sorozat nem korlátos, a többi igen.

2.1.7. Definíció: A $h \in R$ számot az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat *határértékének* (vagy *limeszének*) nevezzük, ha tetszőleges pozitív ε-hoz található $n_0 \in N$ természetes szám (*küszöbszám*) úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén az $|a_n - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül.

2.1.8. Megjegyzés: A határérték előbbi definíciója úgy is megfogalmazható, hogy minden $n > n_0$ index esetén a sorozat tagjainak a $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$ nyílt intervallumba kell esni. Ez egyben azt is jelenti, hogy ezen az intervallumon kívül legfeljebb n_0 darab, azaz véges sok sorozatelem lehet.

A határérték jelölésére az alábbi kifejezést használjuk: $\lim_{n\to\infty} a_n = h$ vagy $a_n \to h$. Szokás ilyenkor azt mondani, hogy „a_n *tart h-hoz*”, vagy „a_n *konvergál h-hoz*”.

2.1.9. Megjegyzés: Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy *konvergens*, ha nincs, akkor *divergensnek* nevezzük. *Hangsúlyozzuk, hogy a végtelen nem valós szám, tehát a fenti definíció értelmében nem lehet egy sorozat határértéke.* Ennek ellenére szoktunk arról beszélni, hogy egy sorozat végtelenhez tart. Ezt a következőképpen kell érteni:

2.1.10. Definíció: Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *végtelenhez tart*, (avagy *minden határon túl növő*) ha bármely valós k számhoz található $n_0 \in N$ természetes szám úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén az $a_n > k$ egyenlőtlenség fennáll. Jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Hasonlóan definiálható a *minden határon túl csökkenő sorozat* (azaz amikor bármely valós K számhoz található $n_0 \in N$ természetes szám úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén az $a_n < K$ egyenlőtlenség fennáll. Jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2.1.11. Példa: Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Megoldás: Tekintsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Belátjuk, hogy találunk olyan $n_0 \in N$ természetes számot, hogy minden $n > n_0$ esetén az $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül. $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ (mivel $n \geq 1$) $\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Amennyiben az $n_0 \in N$ küszöbszámot $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$-nak választjuk, ez teljesül, tehát $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.1.12. Tétel: Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás: Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = h$ és tekintsük az $\varepsilon = 1$ számot. A határérték definíciója értelmében létezik $n_0 \in N$ természetes szám (küszöbszám) úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén az $h-1 < a_n < h+1$ egyenlőtlenség teljesül. Vezessük be a következő jelöléseket: $m := \min\left\{a_1, ..., a_{n_0}, h-1\right\}$ és $M := \max\left\{a_1, ..., a_{n_0}, h+1\right\}$. Ekkor nyilván $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in N$.

2.1.13. Definíció: A t számot a sorozat *torlódási pontjának* nevezzük, ha van a sorozatnak a t számhoz konvergáló részsorozata. A $+\infty$-t és $-\infty$-t is a sorozat torlódási pontjának tekintjük, ha van a sorozatnak minden határon túl növő illetve csökkenő részsorozata.

2.1.14. Következmények:

1. Minden határérték egyben torlódási pont is. (Ez a definíciók azonnali következménye.)

2. Ha egy t szám torlódási pontja az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén a $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ intervallumban (azaz a t szám ε sugarú nyílt környezetében) végtelen sok sorozatelem van.
3. Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor egyetlen egy van.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak két különböző határértéke is van, jelölje ezeket l és k és legyen $l < k$. Tekintsük az $\varepsilon := \frac{k-l}{2}$ számot. Ekkor nyilván az l ε sugarú nyílt környezete és a k ε sugarú nyílt környezete diszjunktak (nem metszik egymást). $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, így az előbb rögzített ε-hoz létezik egy $n_0 \in N$ küszöbszám, hogy minden $n > n_0$ index esetén a sorozat tagjainak a $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ nyílt intervallumba kell esni. De k is az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke, ezért ugyanahhoz az ε-hoz létezik egy $m_0 \in N$ küszöbszám, hogy minden $n > m_0$ index esetén a sorozat tagjainak a $(k-\varepsilon, k+\varepsilon)$ nyílt intervallumba kell esni. Legyen $N_0 := \max\{n_0, m_0\}$. Ekkor minden $n > N_0$ esetén az a_n mindkét környezetnek eleme, ami ellentmondás, hiszen azok diszjunktak voltak.

4. Ha egy korlátos sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor konvergens.
5. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.
6. Minden $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatból kiválasztható monoton (növekedő vagy csökkenő) részsorozat.

2.1.15. Bolzano–Weierstrass-tétel: Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás: A 6. tulajdonság alapján az adott korlátos sorozatnak van monoton részsorozata. Nyilván e monoton részsorozat is korlátos, tehát az előbbi következmények közül az 5. miatt konvergens is.

2.1.16. Cauchy-féle kritérium: Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges pozitív ε-hoz található $n_0 \in N$ természetes szám (küszöbszám) úgy, hogy minden $n, m > n_0$ esetén az $|a_n - a_m| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül.

2.1.17. Megjegyzés: *Cauchy-sorozatoknak* nevezzük azokat a sorozatokat, amelyek rendelkeznek a Cauchy-féle kritériumban szereplő tulajdonsággal. Ezek szerint a Cauchy-kritérium azt mondja ki, hogy egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

A Cauchy-féle kritérium bizonyítását itt most nem adjuk meg, bár az egyik irány (a szükségesség) a háromszög egyenlőtlenség miatt rögtön adódik. Ennek ellenére szükségesnek éreztük magát a kritériumot megemlíteni, mert a szakirodalomban számos helyen találkozhatnak a Cauchy-sorozat elnevezéssel.

2.1.18. Tétel (Összeg, különbség, szorzat, hányados határértéke): Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke a, valamint a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens és határértéke b, akkor:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$$

Ha még az is teljesül, hogy $b \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Határérték-számításnál először is behelyettesítünk. Amennyiben konkrét szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ a helyettesítés-eredmény, készen vagyunk. Legtöbbször azonban a $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ alakú határozatlan kifejezések (esetek) valamelyike áll fenn, a feladat megoldása nem ilyen egyszerű, szükségünk lehet a következőkre:

2.1.19. Tétel („rendőrelv” vagy „szendvicstétel”): Ha minden $n \in N$ esetén az $a_n \le u_n \le b_n$ egyenlőtlenség teljesül és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = u$, akkor létezik az $(u_n)_{n\ge1}$ sorozat határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

2.1.20. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ határértéket.

Megoldás: Mivel $-1 \le \sin n \le 1$, ezért $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$.

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, így a rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$.

2.2. Néhány nevezetes sorozat határértéke

2.2.1. Tétel: A következő állítások mindegyike igaz:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, ha\ |q| < 1 \\ 1, ha\ q = 1 \\ divergens, egyébként \end{cases}$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n n^k = 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in N$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$, tetszőleges $a \in R$ esetén,

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Néhány bizonyítás:

Az 1. bizonyításához felhasználjuk a *Bernoulli-egyenlőtlenséget*:

2.2.2. Segédtétel (Bernoulli-egyenlőtlenség): Ha $n \in N$ tetszőleges természetes szám, és a $h \in R$ valós szám eleget tesz a $h > -1$ és $h \neq 0$ feltételeknek, akkor $(1+h)^n > 1+nh$.

Bizonyítás: A $q^n - 1 = (q-1)+(q^2-q)+(q^3-q^2)+\ldots+(q^n-q^{n-1})$ azonosságban a jobb oldalon álló n db. zárójeles kifejezés között a $q-1$ a legkisebb, akár $q>1$, akár $0<q<1$. Ezért mindkét esetben $q^n - 1 > n(q-1)$. Innen $q = 1+h$ helyettesítéssel kapjuk a bizonyítandó állítást.

1. bizonyítása $|q|<1$ esetén (a többi eset triviális). Vezessük be az $1+h = \dfrac{1}{|q|}$ jelölést. Nyilván $|q|<1$ miatt $h>0$. Továbbá

$$0 \le |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{h}.$$

Most $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ miatt a jobb oldal 0-hoz tart. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

A 4. határérték létezésének bizonyítása 3 lépésből áll:

Az 1. lépésben megmutatjuk, hogy az $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan növő.

A 2. lépésben megmutatjuk, hogy a $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorúan csökkenő.

Az $u_n < v_n$ egyenlőtlenségből következik, hogy mindkét sorozat korlátos, tehát konvergens.

A 3. lépésben megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$, azaz a két sorozatnak közös határértéke van, ezt pedig e-vel jelöljük, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Az 1. lépésben igazolnunk kell, hogy $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, azaz $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n < \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$.

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$-gyel. Ekkor kapjuk, hogy $\dfrac{n}{n+1} < \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$, ami ugyanaz, mint $1-\dfrac{1}{n+1} < \left(1-\dfrac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$. Ez pedig a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt igaz.

A 2. lépés igazolása ugyanígy történhet: az állítás a következő $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, azaz $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n > \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

Szorozva $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$-nel, adódik, hogy $\left(\dfrac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n > \dfrac{n+1}{n}$. Ez pedig azért igaz, mert ha a bal oldalra alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget, akkor

$$\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} > \frac{n+1}{n}.$$

Végül a 3. lépés:

$$0 < v_n - u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < 4\cdot\frac{1}{n}.$$

Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $u_n < v_n \le v_1 = 4$.

Megjegyzés: Az *e*~2,718281828 szám a természetes logaritmus alapja, irracionális szám (könnyű megjegyezni az első tizedesjegy utáni 18281828 számjegyeket, mert a Háború és béke írója, Lev Nikolajevics Tolsztoj születési éve 1828).

1873-ban Charles Hermite (1822–1901) francia matematikus bizonyította, hogy az *e* szám egyben transzcendens is (azaz nem gyöke egyetlen racionális együtthatójú polinomnak sem).

2.2.3. Megjegyzés: A 2. és 3. határértékeket könnyebb megjegyezni (sőt újakat is felírhatunk), ha figyelembe vesszük, hogy $n^k \ll e^n \ll n! \ll n^n$.

2.2.4. Példák:

- Számítsuk ki a $(b_n)_{n\ge 2}$ sorozat határértékét, ha $b_n = \sqrt{4n^2+4n+1} - \sqrt{4n^2-3n-2}$.

Megoldás: $b_n = \left(\sqrt{4n^2+4n+1} - \sqrt{4n^2-3n-2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{4n^2-3n-2}}{\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{4n^2-3n-2}} =$

$$= \frac{4n^2+4n+1-4n^2+3n+2}{\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{4n^2-3n-2}} = \frac{7+\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}} \to \frac{7}{4}$$ (mind a számlálóban, mind pedig a nevezőben *n* előforduló legmagasabb hatványát emeltük ki, ez mindkét helyen *n* volt, így egyszerűsítettük *n*-nel).

- Számítsuk ki a $(c_n)_{n\ge 1}$ sorozat határértékét, ha $c_n = \dfrac{3^{n+2}\cdot 2^{n-3} - 7\cdot 5^n}{5\cdot 6^{n-1}+9}$.

Megoldás: $$c_n = \frac{3^{n+2}\cdot 2^{n-3} - 7\cdot 5^n}{5\cdot 6^{n-1}+9} = \frac{9\cdot 3^n\cdot\frac{2^n}{8} - 7\cdot 5^n}{\frac{5}{6}\cdot 6^n + 9} = \frac{\frac{9}{8} - 7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{5}{6}+9\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n} \to \frac{\frac{9}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{8}\cdot\frac{6}{5} = \frac{27}{20}$$

(itt pedig a számlálóban is és a nevezőben is a 6^n-t emeltük ki, mert annak volt abszolút értékben legnagyobb az alapja, ezzel egyszerűsítettünk itt is).

3. Függvények

3.1. Elemi függvények

3.1.1. Definíció: Legyenek $H \subseteq R$ és $K \subseteq R$ valós számhalmazok. Rendeljünk hozzá minden $x \in H$ számhoz *egyetlen* $y \in K$ számot. Az ilyen egyértelmű hozzárendelést *függvénynek* nevezzük.

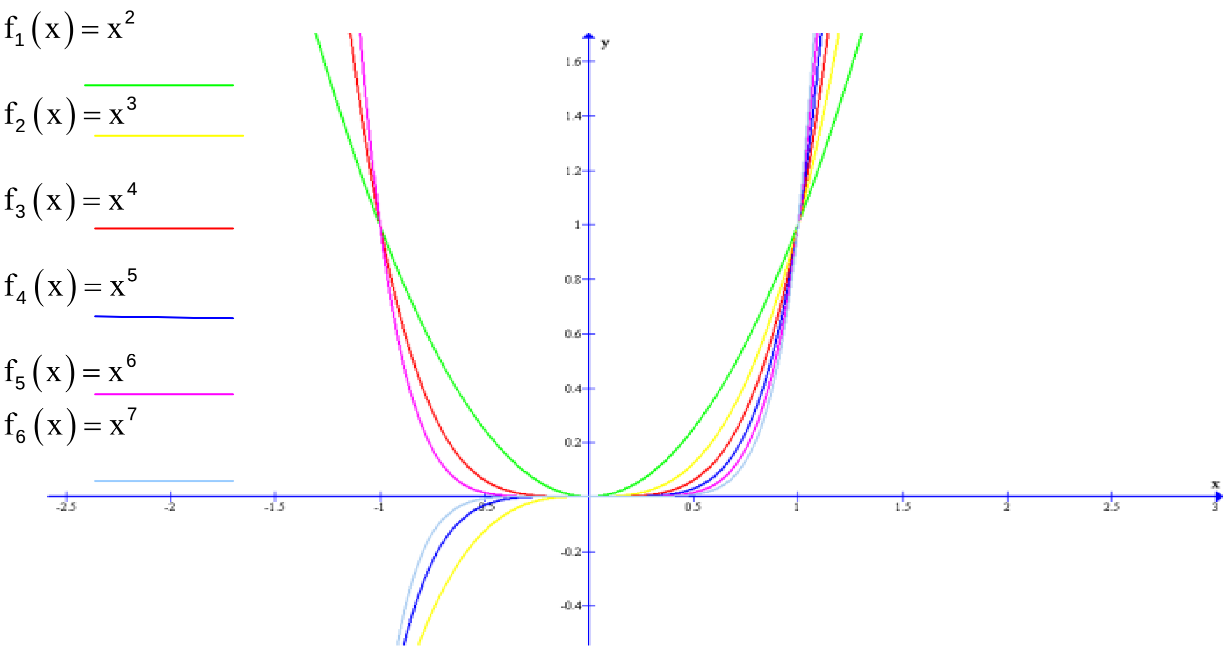
3.1.2. Definíció: Az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon *konvex*, ha bármely α és $\beta \in [a,b]$ és $x \in [\alpha,\beta]$ esetén a következő egyenlőtlenség áll fenn: $f(x) \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$.

Hasonlóan definiáljuk a *konkáv függvényt* is, csak ott az egyenlőtlenség fordított irányú. Szoktuk még mondani, hogy konvex egy függvény, ha grafikonja „megtartja a vizet”, pl. az x^3 csak a $[0,+\infty)$ intervallumon konvex, a $(-\infty,0)$ intervallumon pedig konkáv.

Amennyiben bármely $x \in (a,b)$ esetén az f grafikonjához létezik egyértelmű érintő egyenes, az $f(x)$ függvényt *lokálisan konvexnek* nevezzük egy adott $x_0 \in (a,b)$ pontban, ha létezik x_0-nak olyan környezete, melyben a függvény grafikonja az érintő fölött helyezkedik el, *lokálisan konkávnak* pedig abban az esetben, ha ha létezik x_0-nak olyan környezete, melyben a függvény grafikonja az érintő alatt helyezkedik el.

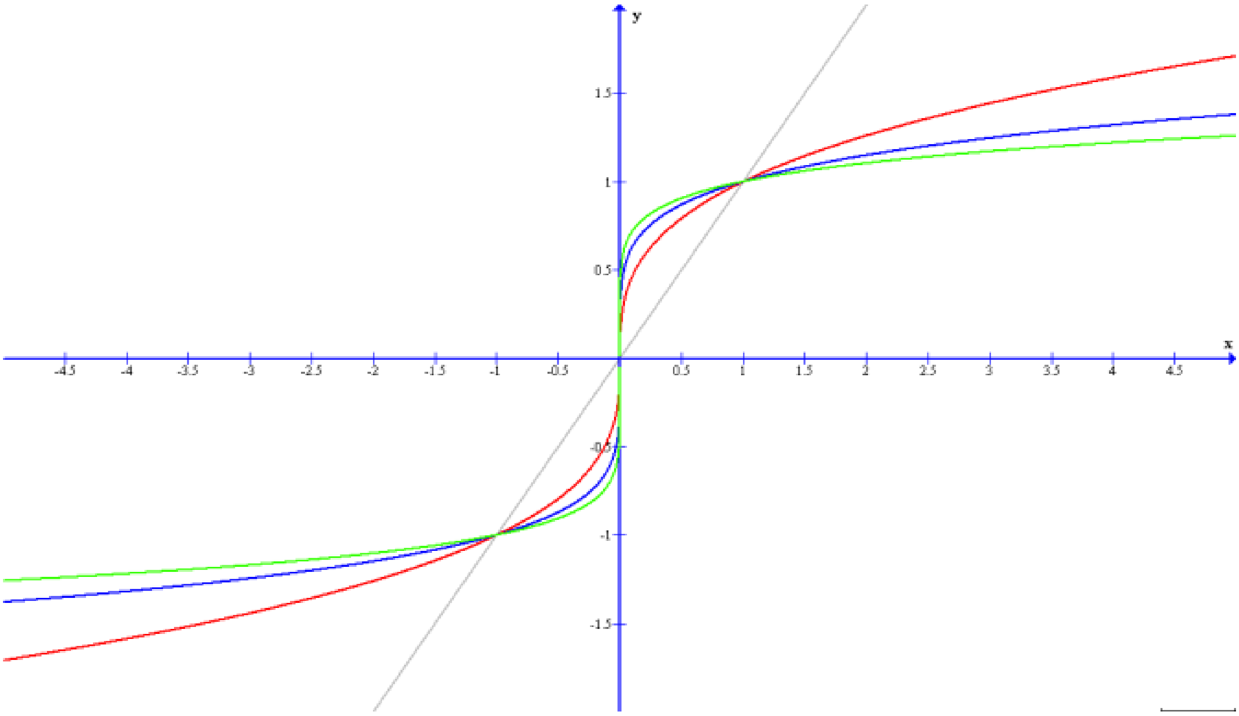
3.1.3. Elemi függvények grafikonjai: A most következő elemi függvények grafikonjából következtetni lehet értelmezési tartományukra (D_f), értékkészletükre (R_f), esetleg monotonitásukra, paritásukra és periodicitásukra. (Feltételezzük, hogy a függvény fogalma a középiskolai tanulmányok alapján mindenki előtt ismert, mint ahogy az alábbi függvénytani fogalmak is: értelmezési tartomány, értékkészlet, kölcsönösen egyértelmű leképezés, páros, illetve páratlan függvény, periodikus függvény.)

Hatványfüggvények: $f(x)=x^k$, *ahol k pozitív egész szám*



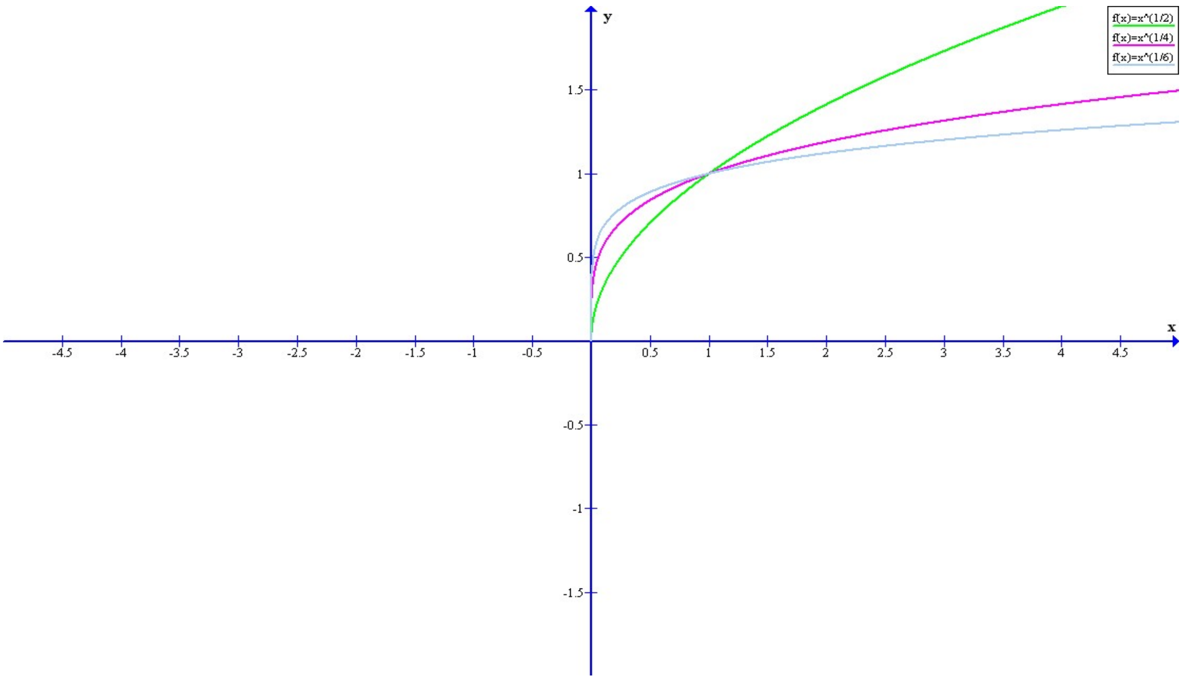
Páratlan gyökfüggvények:

$f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ $\quad f_3(x) = x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$ $\quad f_4(x) = x^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x}$



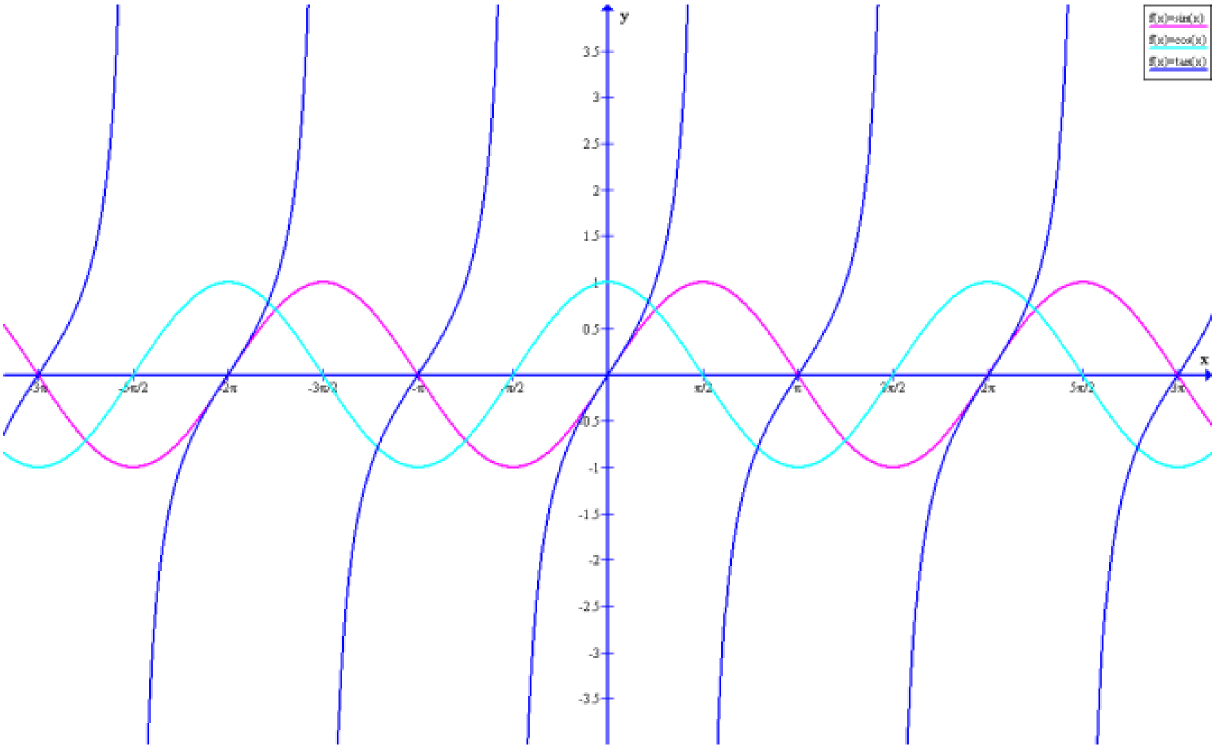
Páros gyökfüggvények:

$f_1(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $\quad f_2(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ $\quad f_3(x) = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$



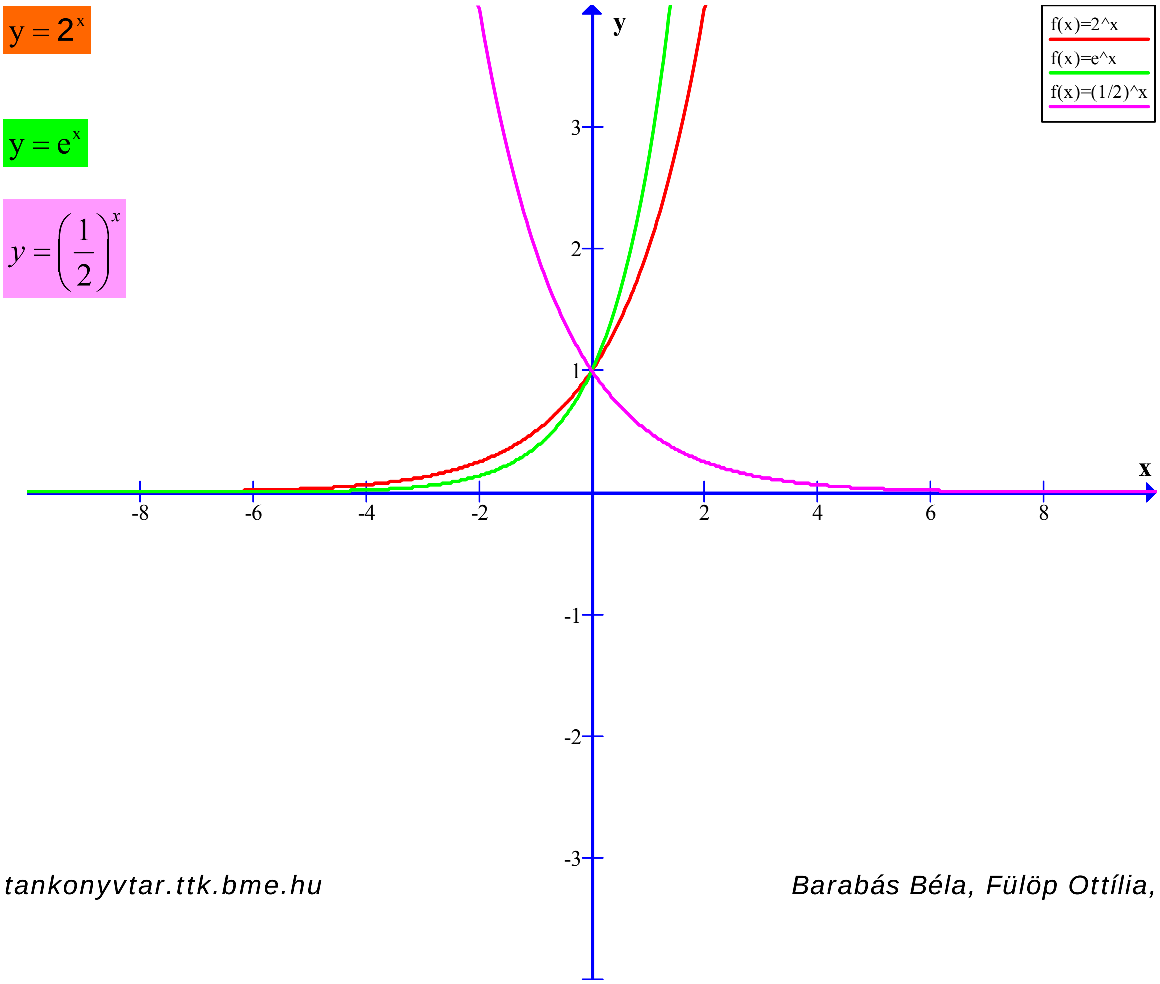
Mindegyik páros gyökfüggvény konkáv az értelmezési tartományán.

Trigonometrikus függvények (sinx, cosx, tanx):



A sin és cos függvények periodikusak, főperiódusuk $T=2\pi$, míg a tg és ctg (melyek szintén periodikusak) főperiódusa $T=\pi$.

Exponenciális függvények: $f(x)=a^x$ ***(a>0)***



Érdemes megjegyezni, hogy az exponenciális függvény monotonitása az alaptól függ: amennyiben a függvény alapja $a>1$, az exponenciális függvény szigorúan növekvő, míg a $0<a<1$ alap esetén az exponenciális függvény szigorúan csökkenő. Értelmezési tartománya *R*, értékkészlete pedig $(0,+\infty)$ **(vigyázat, az ábrákon úgy néz ki, mintha a függvény metszené az *x* tengelyt, valójában csak egyre jobban közeledik hozzá)**.

Természetes alapú exponenciális függvény:

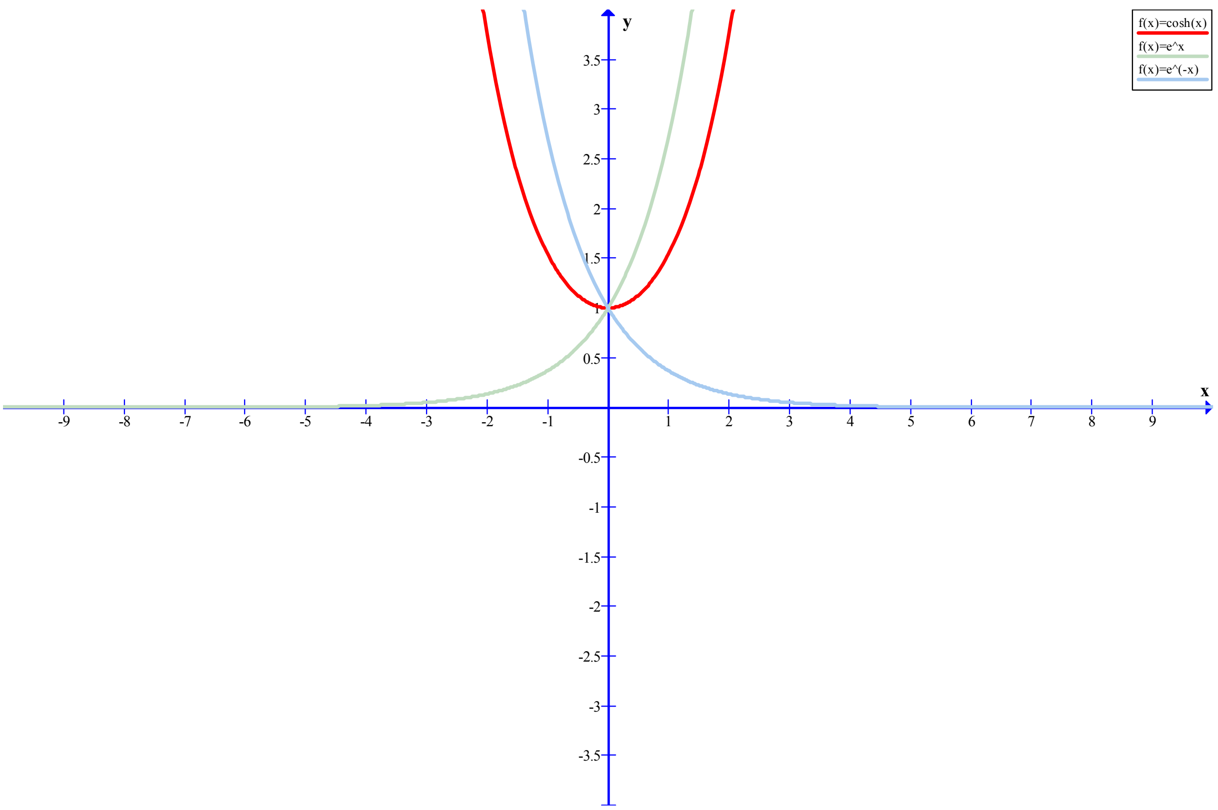
$y=e^x$, ahol az alapszám (az *e*) egy, az előző fejezetben vizsgált nevezetes sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Hiperbolikus függvények

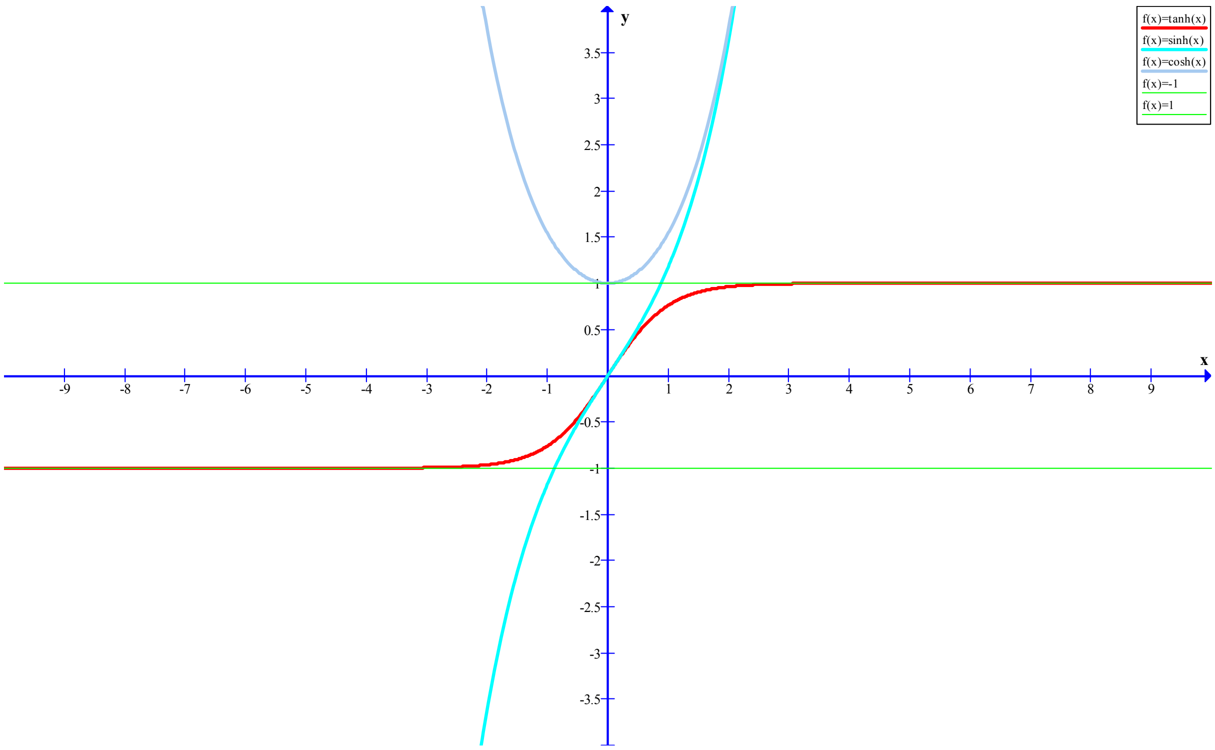
Koszinusz hiperbolikusz függvény: $chx:=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, szokásos jelölés még $y=\cosh x$.

A grafikonja az $y=e^x$ és $y=e^{-x}$ grafikonokból következik:



Szinusz hiperbolikusz függvény: $shx:=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, szokásos jelölés még $y=\sinh x$.

Tangens hiperbolikusz függvény: $thx := \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, szokásos jelölés még $y = \tanh x$, az alábbi közös ábrán a $(-1,1)$ értékkészletű (nem metszi az $y=-1$ illetve $y=1$ egyeneseket, csak egyre jobban közeledik hozzájuk), szigorúan monoton növekvő függvény.



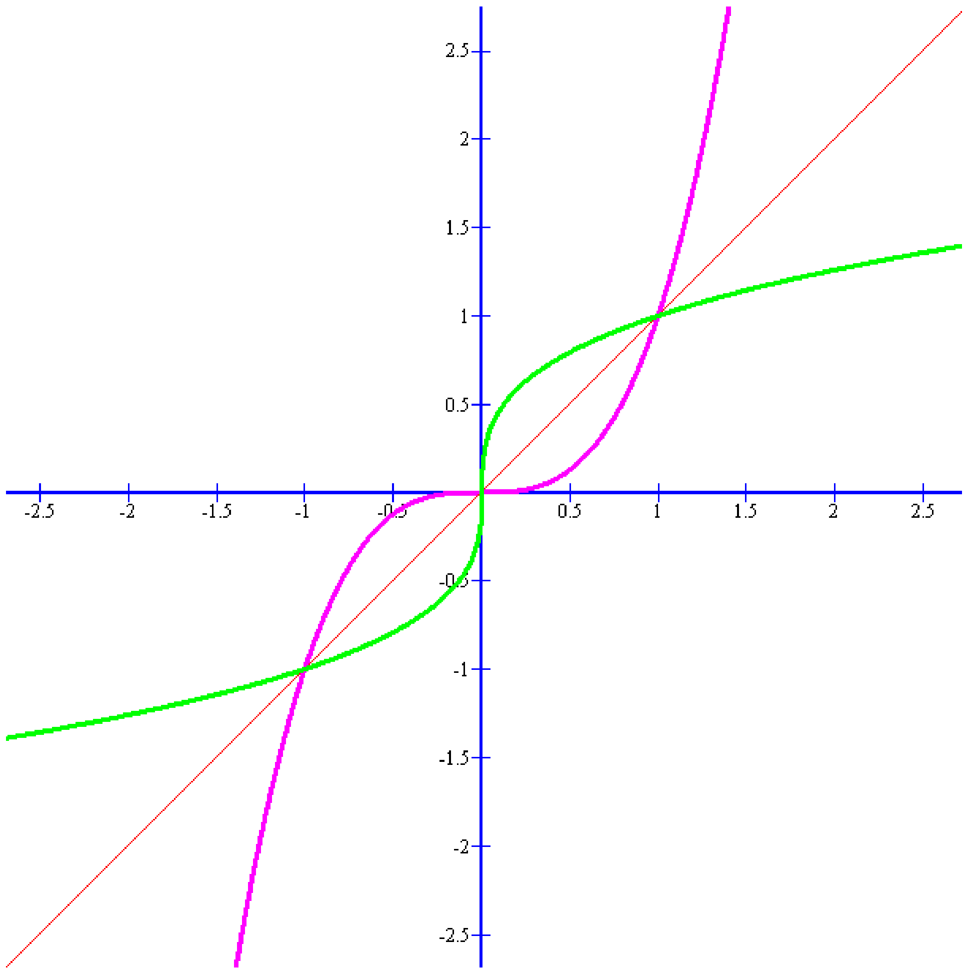
3.2. Inverz elemi függvények

Az f függvény inverz függvényének nevezzük és f^{-1}-gyel jelöljük azt a függvényt, mely minden valós b számhoz (mely az eredeti f függvény értékkészletéhez (R_f-hez) tartozik), azt az a számot rendeli az f értelmezési tartományából (D_f-ből), melyhez az f a b-t rendelte, vagyis ha $f(a)=b$, akkor $f^{-1}(b)=a$.

Innen következik, hogy $f\left(f^{-1}(b)\right)=b$ és $f^{-1}\left(f(a)\right)=a$, mint ahogy az is, hogy az f^{-1} értelmezési tartománya az f értékkészlete, és f^{-1} értékkészlete az f értelmezési tartománya. Tehát csak kölcsönösen egyértelmű függvénynek van inverze, hiszen szükséges, hogy a egyértelmű legyen.

3.2.1. Tétel: Az f függvény invertálhatóságának elégséges feltétele a függvény szigorú monotonitása. Az inverz függvény megőrzi a monotonitást (azaz pl. szigorúan növekvő függvény inverze is szigorúan növekvő).

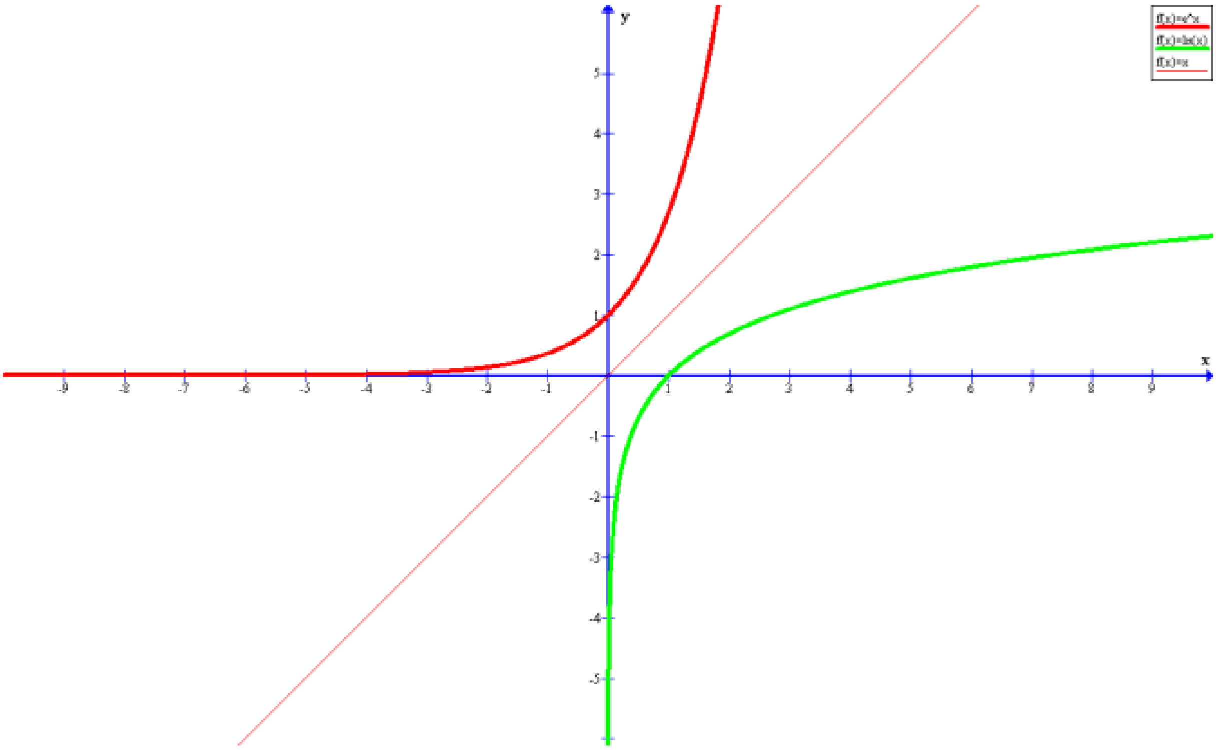
Az f^{-1} függvény és az f függvény grafikonja egymásnak az $y = x$ egyenesre vett tükörképei.



Az ábrán az $y = x^3$ függvény és inverze, az $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ látható.

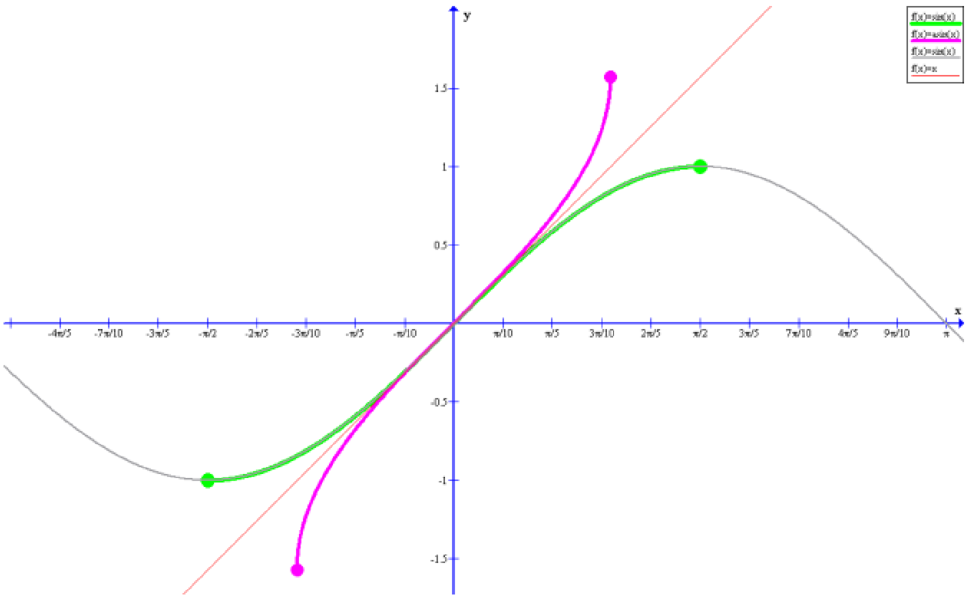
A természetes alapú logaritmusfüggvény

Az $f:R\to(0,+\infty)$, $f(x)=e^x$ (e alapú) exponenciális függvény szigorúan növekvő, tehát mindenhol létezik az inverze, ezt a függvényt nevezzük *természetes alapú logaritmusfüggvénynek*, $f^{-1}:(0,+\infty)\to R$, $f^{-1}(x)=\ln x$. Mivel az e alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő, ezért a természetes logaritmusfüggvény is az. (Az egyéb alapú ($a>0$, $a\neq 1$) logaritmusfüggvény monotonitása megegyezik az ugyanolyan alapú exponenciális függvény monotonitásával.)



Az $y=\sin x$ függvény nem invertálható a $(-\infty,+\infty)$ intervallumon, mert nem kölcsönösen egyértelmű. Invertálható a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tartományon, itt szigorúan monoton nő.

Az inverz függvényét arkusz szinusz (arcus sinus) függvénynek nevezzük, jele $\arcsin x$.



Az $y = \arcsin x$ értelmezési tartománya a $\left[-1,1\right]$ intervallum, értékkészlete pedig $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Hasonlóan ábrázolhatjuk a többi trigonometrikus és hiperbolikus függvény inverzeit is szigorúan monoton szakaszokon:

- a cos függvényt a $\left[0,\pi\right]$ intervallumon invertáljuk, így az $\arccos : \left[-1,1\right] \to \left[0,\pi\right]$,
- a tangenst a $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, így $arctg :\ R \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,
- a kotangenst a $\left(0,\pi\right)$ intervallumon, így $arcctg :\ R \to \left(0,\pi\right)$,
- a koszinusz hiperbolikuszt a $\left[0,+\infty\right)$ intervallumon, így $ar\,chx : \left[1,+\infty\right) \to \left[0,+\infty\right)$ (*area koszinusz hiperbolikusznak* nevezzük),
- a szinusz hiperbolikuszt *R*-en, így $ar\,shx : R \to R$ (area szinusz hiperbolikusznak mondjuk),
- a tangens hiperbolikuszt *R*-en, így $ar\ thx : \left(-1,1\right) \to R$ (area tangens hiperbolikusz, szoktuk még $ar\ \tanh$-val jelölni), míg
- a kotangens hiperbolikuszt $\left(\frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$ az $R - \left\{0\right\}$ halmazon, így $ar\ cth : \left(-\infty,-1\right) \cup \left(1,+\infty\right) \to R - \left\{0\right\}$ (area kotangens hiperbolikusz).

Megjegyezzük még, hogy a thx és $cthx$ függvények inverzei rendelkeznek még logaritmusos alakkal is, mely a következő: $ar\ thx = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $ar\ cthx = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

3.3. Függvényhatárérték-definíciók

Tegyük fel, hogy az $f\left(x\right)$ értelmezve van valamely, az $x_0 \in R$ körüli nyílt intervallum minden pontjában (x_0 lehet kivétel).

3.3.1. Definíció: Az $f\left(x\right)$ függvénynek *az* $x_0 \in R$ *helyen létezik a határértéke és az a* $h \in R$ valós szám, ha *bármely* $\varepsilon > 0$ számhoz *található* $\delta > 0$ szám úgy, hogy a $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ egyenlőtlenséget kielégítő *x* értékek mind benne vannak az $f\left(x\right)$ függvény értelmezési tartományában és teljesül az $\left|f\left(x\right) - h\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

3.3.2. Definíció (határérték II.): Az $f\left(x\right)$ függvénynek *az* $x_0 \in R$ *helyen létezik a határértéke és az a* $h \in R$ *valós szám*, ha *bármely*, az $f\left(x\right)$ függvény értelmezési tartományából választott és x_0-hoz konvergáló x_n sorozat esetén az $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\geq 1}$ függvényérték sorozat konvergál h-hoz. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = h$.

A két definíció ekvivalens (itt nem bizonyítjuk). A második definíció olyan feladatoknál használható eredményesen, ahol várhatóan nincs határérték.

3.3.3. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ határértéket.

Megoldás: Vegyük az alábbi két, nullához tartó számsorozatot:

$$x_1=\frac{2}{\pi},x_2=\frac{2}{5\pi},\ldots,x_n=\frac{2}{(4n+1)\pi},\ldots\to 0,$$

$$x_1^*=\frac{2}{3\pi},x_2^*=\frac{2}{7\pi},\ldots,x_n^*=\frac{2}{(4n+3)\pi},\ldots\to 0,$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=1$, míg $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n^*}=-1$, így a feladatban kért határérték nem létezik.

3.3.4. Definíció: Az $f(x)$ függvénynek az $x_0\in R$ helyen létezik a *jobb oldali határértéke és az a* $h\in R$ valós szám, ha *bármely* $\varepsilon>0$ számhoz *található* $\delta>0$ szám úgy, hogy a $0<x-x_0<\delta$ egyenlőtlenséget kielégítő *x* értékek benne vannak az $f(x)$ függvény értelmezési tartományában és teljesül az $|f(x)-h|<\varepsilon$ egyenlőtlenség.

Hasonlóan értelmezzük a függvény $x_0\in R$ helyen vett bal oldali határértékét:

3.3.5. Definíció: Az $f(x)$ függvénynek az $x_0\in R$ helyen létezik a *bal oldali határértéke és az a* $h\in R$ valós szám, ha *bármely* $\varepsilon>0$ számhoz *található* $\delta>0$ szám úgy, hogy a $-\delta<x-x_0<0$ egyenlőtlenséget kielégítő *x* értékek benne vannak az $f(x)$ függvény értelmezési tartományában és teljesül az $|f(x)-h|<\varepsilon$ egyenlőtlenség.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=h$ ill. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=h$.

3.3.6. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x_0\in R$ helyen végtelen a határértéke, ha tetszőleges pozitív A számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám úgy, hogy a $0<|x-x_0|<\delta$ egyenlőtlenséget kielégítő *x* értékek benne vannak az $f(x)$ függvény értelmezési tartományában és teljesül az $f(x)>A$ egyenlőtlenség.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. (Hasonlóan definiáljuk a $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ esetet is.)

3.3.7. Tétel: Az $f(x)$ függvénynek az $x_0\in R$ helyen létezik a határértéke és az a $h\in R$ valós szám, ha $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=h$.

3.3.8. Definíció: Az $f(x)$ *függvény határértéke* $x \to +\infty$ *esetén a* $h \in R$ valós szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található k valós szám úgy, hogy a függvény értelmezve van $x > k$ esetén és ezen x értékekre teljesül az $|f(x) - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = h$. (Hasonlóan definiáljuk a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = h$ esetet is.)

3.4. Függvényhatárértékkel kapcsolatos tételek

3.4.1. Tétel (Összeg, különbség, szorzat, hányados határértéke): Ha létezik $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, akkor létezik a két függvény összegének, különbségének, szorzatának a határértéke is és a következők érvényesek:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

továbbá, ha $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, akkor létezik az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ függvény határértéke is, és

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

3.4.2 Tétel (Összetett függvény határértéke): Ha $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ és $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, továbbá van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $0 < |x-a| < \delta$ esetén $g(x) \neq b$, akkor $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$.

3.4.3. Tétel (rendőrelv vagy szendvicstétel függvényhatárértékekre): Ha az *f*, *g* és *h* függvények értelmezve vannak az x_0 pont egy környezetében és itt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, valamint $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

Határérték-számításnál először is behelyettesítünk. Amennyiben konkrét szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ a helyettesítés eredménye, készen vagyunk. Legtöbbször azonban a $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ alakú határozatlan kifejezések (esetek) valamelyike áll fenn, a feladat megoldása nem ilyen egyszerű, szükségünk lehet a következőkre:

3.4.4. Tétel (Nevezetes függvényhatárértékek):

1. Ha az x szöget radiánban adjuk meg, akkor $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (természetesen $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$ is igaz),

2. ugyanakkor igaz, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ (természetesen $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tgx}=1$ is igaz),

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (természetesen, $\lim\limits_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e$ is igaz, a lényeg, hogy úgy tekintsük a képletet, mint egy $\left(1+...\right)^{\frac{1}{...}}$ alakot, ahol $...\to 0$),

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+x\right)}{x}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$, amennyiben $a>0,\ a\neq 1$, speciális esetben $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1$,

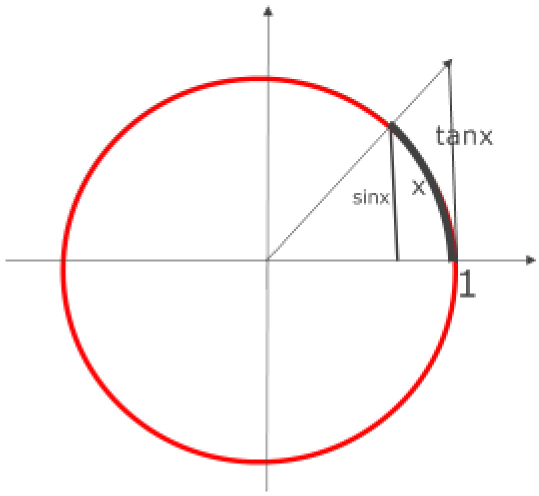
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, ha $a>0,\ a\neq 1$, speciális esetben $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^{\mu}-1}{x}=\mu$, ahol $\mu\in R$.

Bizonyítani csak az 1. tulajdonságot fogjuk a rendőrelv segítségével:

Ívmértekkel mérve az x szöget, a mellékelt ábra területeiből látszik, hogy $\sin x\le x\le tgx$, innen $\sin x$ -szel osztva: $1\le\dfrac{x}{\sin x}\le\dfrac{1}{\cos x}$.

Mivel $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$, ezért a rendőrelv szerint $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. Ekkor $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{x}{\sin x}}=1$.



3.4.5. Néhány példa függvényhatárérték-számításra

Szimbolikusan	példa
$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-2}=-\dfrac{3}{2}$. (Kiemeltük x *előforduló legmagasabb hatványát* (ugyanezt tettük volna, ha $x\to-\infty$), majd leegyszerűsítettünk.)
$\left(\dfrac{0}{0}\right)$	2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\infty$. (Használtuk a 3.4.4. Tétel 1. képletét.) 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-x^4+x^2}{5x^6-4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x^3-x^2+1)}{x^2(5x^4-4)}=1\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$, valamint

	4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-x^4+x^2}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x^3-x^2+1)}{x(x^2-1)}=0\cdot(-1)=0$. (Vegyük észre, hogy amennyiben $x\to 0$, *x előforduló legalacsonyabb hatványát emeljük ki*.)
$\left(\infty-\infty\right)$	5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)=\infty$. (Használtuk, hogy $\sqrt{\infty}=\infty$ és $\infty\cdot\infty=\infty$.)
$\left(0\cdot\infty\right)$	6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot 2\sqrt{x}\right)=0$.
$\left(1^{\infty}\right)$	7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^5=e^5$.

3.5. Folytonos függvények

3.5.1. Definíció: Az $f(x)$ függvény *folytonos az x_0 helyen*, ha

- értelmezett az x_0 helyen, és annak egy környezetében,
- létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ és
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

3.5.2. Definíció: Az $f(x)$ függvény *folytonos az (a,b) intervallumon*, ha annak minden pontjában folytonos.

3.5.3. Definíció: Az $f(x)$ függvény *balról folytonos az x_0 helyen*, ha

- értelmezett az x_0 helyen, és annak egy „bal oldali környezetében”, azaz $(x_0-\delta,x_0]$ -ban,
- létezik a $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ és
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

A *jobb oldali folytonosságot* hasonlóan definiáljuk, csak ott „jobb oldali környezetet” tekintünk és x_0-ban jobb oldali határértéket.

3.5.4. Definíció: Az $f(x)$ függvény *folytonos az [a,b] intervallumon*, ha folytonos az (a,b) intervallumon és az *a* pontban jobbról, *b* pontban pedig balról folytonos.

3.5.5. Példák:

- az $f(x)=\begin{cases}1, ha\ x\in Q\\ 0, ha\ x\in R-Q\end{cases}$ *Dirichlet-függvény* sehol sem folytonos,
- az $f(x)=|x|$ *abszolút érték függvény* pedig mindenütt folytonos függvény.

3.5.6. Tétel: Folytonos függvények összege, szorzata, hányadosa (ha a nevező nem zérus) folytonos.

3.5.7. Példa: Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, ha\ x\in R-\{0\} \\ a, ha\ x=0 \end{cases}.$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2},$$

$f(0)=a$, így folytonosság csak az $a=\dfrac{1}{2}$ esetben lehetséges.

3.5.8. Tétel (Összetett függvény folytonossága): Ha egy $g(x)$ függvény folytonos a b pontban, $f(x)$ pedig folytonos a $g(b)$ pontban és létezik az $f\circ g$ kompozíció (azaz $f(g(x))$), akkor az $f\circ g$ is folytonos a b helyen.

3.5.9. Tétel (Inverz függvény folytonossága): Ha $f:D_f\to R_f$ függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor létezik az $f^{-1}:R_f\to D_f$ inverz függvény, ami megőrzi a monotonitást és szintén folytonos.

3.6. Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

3.6.1. Tétel: Az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

3.6.2. Weierstrass-tétel: Az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos függvény felveszi legnagyobb és legkisebb értékét.

3.6.3. Bolzano–Darboux-tétel vagy Bolzano-féle közbülsőpont-tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon és $f(a)<c<f(b)$, akkor létezik olyan $x\in[a,b]$, hogy $f(x)=c$.

3.6.4. Bolzano–Weierstrass-tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor a minimuma és maximuma között minden értéket felvesz.

4. Differenciálszámítás

4.1. A differenciálhányados fogalma, differenciálási szabályok

4.1.1. Definíció: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ intervallumon, akkor $|h|<\delta$ esetén az $F_{x_0}(h):=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ függvényt az $f(x)$ függvény x_0-hoz tartozó d*ifferenciahányadosának* nevezzük.

4.1.2. Definíció: A $\lim\limits_{h\to 0} F_{x_0}(h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ határértéket az $f(x)$ függvény x_0 helyhez tartozó *differenciálhányadosának* (vagy *deriváltjának*) nevezzük. Ha ez létezik, azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény akkor *deriválható az* x_0 *pontban.*

Jelölése: $f'(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$.

4.1.3. Definíció: Az $f':x\mapsto \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ függvényt az *f derivált függvényének* nevezzük.

4.1.4. Példa: Számítsuk ki a derivált definíciójával az $f(x)=\sin x$ függvény deriváltját.

Megoldás:

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\cdot 2}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right]=\cos x$$

ahol használtuk a $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$, valamint a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ képleteket.

4.1.5. Megjegyzés: A $h=x_0-x$ összefüggést figyelembe vételével felírhatjuk, hogy $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Egy $f(x)$ függvény akkor *deriválható az* x_0 *pontban*, ha ez a határérték létezik.

4.1.6. Definíció: Az $f(x)$ függvény x_0 helyhez tartozó *jobb és bal oldali differenciálhányadosát* az $f_j'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ és $f_b'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ függvényhatárértékekkel definiáljuk.

4.1.7. Tétel: Ha egy függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor itt folytonos is.

4.1.8. Definíció (a derivált geometriai értelmezése): Ha az $f(x)$ függvény differenciálható az x_0 pontban és ennek környezetében folytonos, akkor a függvény grafikonjának érintője az $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ egyenletű egyenes, tehát az $f'(x_0)$ nem más, mint az $(x_0,f(x_0))$ pontban a függvény grafikonjához húzott érintő iránytangense.

4.1.9. Tétel (Differenciálási szabályok): Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatók az x helyen, akkor

- az $f+g$ is differenciálható és $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$, valamint
- az $f\cdot g$ is differenciálható és $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
- továbbá, ha $g(x)\neq 0$, akkor $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4.2. Elemi függvények deriváltja és egyéb deriválási szabályok

függvény	Deriváltja	Feltételek
$y=const.$	$y'=0$	-
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$n\in N$, $x\in R$
$y=x^r$	$y'=rx^{r-1}$	$r\in R$, $x>0$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$x\in R$, $a\in R$, $a>0$
speci. $y=e^x$	$y'=e^x$	$x\in R$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$x>0$, $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$
speci. $y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$x>0$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$x\in R$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$x\in R$
$y=tgx$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$y=ctgx$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x\neq k\pi$
$y=arc\sin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
$y=\text{arc}\,tgx$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in R$

$y = \operatorname{arc} ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
$y = shx$	$y' = chx$	$x \in R$
$y = chx$	$y' = shx$	$x \in R$
$y = thx$	$y' = \dfrac{1}{ch^2 x}$	$x \in R$
$y = cthx$	$y' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$	$x \neq 0$
$y = ar\ shx$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in R$
$y = ar\ chx$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
$y = ar\ thx$	$y' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = ar\ cthx$	$y' = -\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \in R$, $\lvert x \rvert > 1$

4.2.1. Tétel (Összetett függvény deriválása, azaz „láncszabály”): Ha a $g(x)$ függvény differenciálható az x helyen és az $f(x)$ függvény differenciálható a $g(x)$ helyen, akkor az $f(g(x))$ összetett függvény differenciálható az x helyen és $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

4.2.2. Példa: Deriváljuk az $f(x) = \sin\left(\ln\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)\right)$ leképezéssel megadott függvényt (ahol lehetséges).

Megoldás: $$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)\right) \cdot \left(\ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)\right)' = \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)\right) \cdot \frac{1}{\frac{2x}{1-x}} \cdot \left(\frac{2x}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x(1-x)} \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)\right) \quad \text{(láncszabállyal).}$$

4.2.3. Tétel (Inverz függvény differenciálási szabálya): Ha az f függvény a $t \in D_f$ pontban és környezetében szigorúan monoton és differenciálható, valamint $f'(t) \neq 0$, akkor az inverz függvénye $\left(f^{-1}\right)$ is differenciálható az $x = f(t)$ helyen és $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'(t)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

4.2.4. Példa: Inverz függvény differenciálási szabályával, felhasználva, hogy $\left(e^x\right)' = e^x$ mutassuk meg, hogy $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Megoldás: $f^{-1}(x)=\ln x$, azaz $f(x)=e^x$, $(\ln x)'=\left(\left(e^x\right)^{-1}\right)'=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$.

4.2.5. Definíció: Az $f(x)$ függvény *másodrendű deriváltja* (amennyiben létezik) nem más, mint $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$, az $f(x)$ n*-edrendű deriváltja* (amennyiben létezik) pedig $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

Egyéb jelölése: $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

4.2.6. Példa: Számítsuk ki az $f(x)=\sin x$ negyedrendű deriváltját az $x_0=0$ pontban.

Megoldás: Használjuk a 4.2.-beli, elemi függvények deriváltját tartalmazó táblázatot, így $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$. Behelyettesítve az $x_0=0$ értéket, kapjuk, hogy $f^{(4)}(0)=\sin 0=0$.

4.2.7. Paraméteresen megadott függvény deriválása: Ha az $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ függvények értelmezési tartománya ugyanaz az intervallum, akkor ezek egy görbét írnak le. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a görbét *paraméteresen* adtuk meg, a fenti egyenleteket pedig a görbe paraméteres egyenleteinek nevezzük. Ilyenkor $y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

4.2.8. Példa: Írjuk fel az asztrois (azaz $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi)$ egyenletrendszerrel megadott görbe) $t=\frac{\pi}{4}$ paraméter értékkel meghatározott pontjában a görbéhez húzott érintő egyenletét.

Megoldás: a $t=\frac{\pi}{4}$ paraméterérték a $\left(\frac{a\sqrt{2}}{4},\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$ pontot jelenti az asztroison. Az érintő egyenes iránytangensét a következőképpen számoljuk ki:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-tgt\,,\ \text{ennek a}\ t=\frac{\pi}{4}\ \text{-ben vett értéke}\ -1.$$

Így a kért érintő egyenes egyenlete: $y-\frac{a\sqrt{2}}{4}=-\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, azaz $y=-x+\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4.2.9. Implicit függvény deriváltja: Ha a görbét nem $y=f(x)$ explicit formában adjuk meg, hanem $G(x,y(x))=0$ képlet alakban, akkor az *implicit* alakot használjuk. Ebben az alakban, deriváláskor figyelembe kell vennünk, hogy az y mindenütt x függvénye, tehát mindkét oldalt x szerint deriváljuk (többnyire láncszabályt használva), rendezzük az y'-t tartalmazó tagok szerint, a végén pedig kifejezzük y'-t az x és y függvényében.

4.2.10. Példa: Tekintsük az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenlettel megadott, a és b féltengelyű ellipszist. Ez tulajdonképpen két függvényt jelent, amit akkor látunk, ha kifejezzük az egyenletből az y-t (x függvényeként), ez a két függvény pontosan az ellipszis alsó és felső ívét írja le. Adjuk meg az $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ pontban az érintő egyenes iránytangensét!

Megoldás: Az implicit deriválást elvégezve kapjuk, hogy $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, ahonnan az y'-t kifejezve $y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, ahová behelyettesítve az $(x,y)=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ értékeket, kapjuk, hogy az érintő egyenes iránytangense $-\frac{b}{a}$.

4.3. Középértéktételek, L'Hospital-szabály

4.3.1. Rolle tétele: Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos és az (a,b) intervallumon differenciálható, valamint $f(a)=f(b)$, akkor létezik olyan $x_0\in(a,b)$ szám, amelyre teljesül, hogy $f'(x_0)=0$. (Michel Rolle 1652–1719, francia matematikus.)

4.3.2. Lagrange-középértéktétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos és az (a,b) intervallumon differenciálható, akkor létezik olyan $x_0\in(a,b)$ szám, amelyre teljesül, hogy $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (Joseph Louis Lagrange 1736–1813, francia-olasz természettudós.)

Bizonyítás: Tekintsük az $F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ leképezési szabállyal definiált segédfüggvényt. $F(a)=F(b)=0$ miatt alkalmazhatjuk Rolle tételét, mely szerint létezik olyan $x_0\in(a,b)$, amelyre teljesül, hogy

$$F'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\ \text{azaz}\ f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4.3.3. Cauchy-féle középértéktétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $[a,b]$ intervallumon folytonosak és az (a,b) intervallumon differenciálhatók, továbbá $g'(x)\neq 0$, akkor létezik olyan $x_0\in(a,b)$ szám, amelyre teljesül, hogy $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. (Augustin Cauchy 1789–1857, francia matematikus.)

4.3.4. L'Hospital-szabály (Egyszerű L'Hospital-szabály): Legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatók valamely, az α-t tartalmazó I nyílt intervallumon kivéve esetleg az α pontot, és legyen $g'(x) \neq 0$ az I-n, ha $x \neq \alpha$. Legyen továbbá $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \to \alpha} |f(x)| = \lim_{x \to \alpha} |g(x)| = +\infty$.

Ha létezik $\lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$, ahol α és β lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

(Guillaume Francois Antoine De L'Hospital 1661–1704, francia matematikus.)

4.3.5. Megjegyzések:

- A tétel igaz akkor is, ha határérték helyett mindenütt csak jobb vagy bal oldali határértéket írunk.
- *Fontos* a $\lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezésének megkövetelése, ellenkező esetben nem használhatjuk az egyszerű L'Hospital-szabályt.
- Pl. a $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ egyenlőséggel azt kapnánk, hogy a limesz nem létezik, másfelől $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$, ami ellentmondás lenne. Ezért is fontos ellenőrizni még használat előtt, hogy teljesülnek-e a tétel feltételei.

4.3.6. Példa L'Hospital-szabályra: Számítsuk ki a $\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{x}$ függvényhatárértéket.

Megoldás: $\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{1} = 2$.

4.3.7. Tétel (Erős L'Hospital-szabály): Legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények $(n+1)$-szer differenciálhatók valamely, az α-t tartalmazó I nyílt intervallumon kivéve esetleg az α pontot és legyen $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ az I-n, ha $x \neq \alpha$. Legyen továbbá minden $k = 0, \ldots, n$ számra

$$\lim_{x \to \alpha} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to \alpha} g^{(k)}(x) = 0$$

vagy végig, minden $k = 0, \ldots, n$ számra $\lim_{x \to \alpha} \left|f^{(k)}(x)\right| = \lim_{x \to \alpha} \left|g^{(k)}(x)\right| = +\infty$. Ha létezik

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)} = \beta, \text{ akkor } \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta,$$ ahol α és β lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

4.4. A differenciálhányados alkalmazásai

4.4.1. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) > 0$, akkor $f(x)$ *lokálisan növekvő* az x_0 pontban (azaz növekvő az említett környezetben).

4.4.2. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) < 0$, akkor $f(x)$ *lokálisan csökkenő* az x_0 pontban (azaz csökkenő az említett környezetben).

Fordítva:

4.4.3. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f(x)$ lokálisan növekvő az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) \geq 0$.

4.4.4. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f(x)$ lokálisan csökkenő az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) \leq 0$.

4.4.5. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá az $f(x)$ függvénynek *az x_0 pontban lokális szélsőértéke van* (azaz létezik x_0-nak egy környezete, melyben az összes x-re $f(x) \geq f(x_0)$ (vagy $f(x) \leq f(x_0)$)), akkor $f'(x_0) = 0$.

4.4.6. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt kétszer differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek lokális minimuma van ebben a pontban.

4.4.7. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt kétszer differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek lokális maximuma van ebben a pontban.

4.4.8. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon kétszer differenciálható és

- ha $f''(x) > 0$, akkor az $f(x)$ függvény konvex,
- ha $f''(x) < 0$, akkor az $f(x)$ függvény konkáv.

4.4.9. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon kétszer differenciálható és

- az $f(x)$ függvény konvex, akkor $f''(x) \geq 0$,
- az $f(x)$ függvény konkáv, akkor $f''(x) \leq 0$.

4.4.10. Definíció: Az $f(x)$ függvénynek *inflexiós pontja* van az $x = x_0$ esetén, ha itt a függvény grafikonjának van érintője és ugyanitt a függvény átvált konvexből konkávba, vagy fordítva (azaz megváltozik a görbe konvexitása).

4.4.11. Tétel: Ha az x_0 pontban és annak egy környezetében kétszer differenciálható $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van $x = x_0$ esetén, akkor $f''(x) = 0$.

4.5. Szélsőértékek és inflexiós pontok létezésének szükséges és elégséges feltételei

4.5.1. Tétel (Szélsőérték létezésének szükséges és elégséges feltétele): Az x_0 környezetében n-szer differenciálható $f(x)$ függvénynek az $x = x_0$ helyen lokális szélsőértéke van (vagy x_0 egy lokális szélsőérték*hely*, vagy $f(x_0)$ egy lokális szélsőérték) $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$, továbbá az $f''(x_0), f'''(x_0), \ldots$ deriváltak közül az első el nem tűnő (azaz nem nulla) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ páros rendű (azaz n páros).

Amennyiben az $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor *f*-nek x_0-ban lokális minimuma, míg ha $f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor *f*-nek x_0-ban lokális maximuma van.

4.5.2. Tétel (Inflexiós pont létezésének szükséges és elégséges feltétele): Az x_0 környezetében n-szer differenciálható $f(x)$ függvénynek az $x = x_0$ helyen inflexiós pontja van (más szóval $(x_0, f(x_0))$ egy inflexiós pont) $\Leftrightarrow$ $f''(x_0) = 0$, valamint az $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \ldots$ deriváltak közül az első el nem tűnő (azaz nem nulla) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ páratlan rendű (azaz n páratlan).

4.5.3. Megjegyzés: Az $f(x)$ függvénynek csak olyan x_0 helyeken *lehet* szélsőértéke, amelyek

- a függvény értelmezési tartományának belső pontjai, ahol $f'(x_0) = 0$,
- belső pontok, melyekre $f'(x_0)$ nem létezik (nincs egyértelmű érintőnk a függvényhez az $(x_0, f(x_0))$ pontban),
- az értelmezési tartomány végpontjai.

4.5.4. Definíció: Az $x_0 \in D_f$ pont az $f(x)$ függvény egy *kritikus pontja*, ha $f'(x_0) = 0$ vagy $f'(x_0)$ nem létezik.

Tehát egy tetszőleges $f(x)$ függvénynek csak a kritikus pontokban vagy az értelmezési tartomány végpontjaiban lehet szélsőértéke.

4.5.5. Megjegyzések: A 4.5.2. tételből következik, hogy nincs mindenütt inflexiós pontunk, ahol $y''(x) = 0$. Például, az $y = x^4$ görbének az $x_0 = 0$ helyen nincs inflexiós pontja annak ellenére, hogy $y''(0) = 0$. Továbbá, inflexiós pont ott is lehet, ahol $y''(x)$ nem is értelmezett. Például, $y = x^{\frac{1}{3}}$ esetén az $x_0 = 0$ helyen inflexiós pontunk van, bár $y''(0)$ nem létezik $\left(y''(x) = -\frac{2x^{-5/3}}{9} \right)$.

4.5.6. Abszolút szélsőérték véges zárt intervallumon folytonos $f(x)$ függvény esetén: A következőt tesszük:

- kiszámoljuk *f* értékét a kritikus pontokban és az értelmezési tartomány végpontjaiban,
- megállapítjuk ezek maximumát, illetve minimumát.

4.6. Alkalmazott optimalizációs problémák: szöveges szélsőérték-feladatok

Különféle, az építészetből, az üzleti életből, a közgazdaságtanból, a fizikából, a mindennapokból vett optimalizálási (minimalizálási vagy maximalizálási) feladatokat ezentúl könnyedén meg tudunk oldani a differenciálszámítás alkalmazásával, amennyiben sikerül felírni a vizsgálandó függvényt.

4.6.1. Példa: Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írható maximális térfogatú kúp adatait. Mennyi ez a maximális térfogat?

Megoldás: a kúp alapkörét x-szel, a magasságát pedig $y+R$-rel jelölve, kapjuk, hogy a beírandó kúp térfogata $V=\frac{\pi x^2(R+y)}{3}$, ahonnan Pitagorász tétele ($x^2+y^2=R^2$) miatt a maximalizálandó térfogat egyváltozós függvényként írható fel, $V_{kúp}=\frac{\pi\left(R^2-y^2\right)(R+y)}{3}$ alakban. Ezt deriválva, majd az eredményt nullával egyenlővé téve kapjuk, hogy $V'_{kúp}=\frac{\pi}{3}\left[-2y\left(R+y\right)+R^2-y^2\right]=0$.

Megoldva az egyenletet, $y=-R$ (ez nem lehet) és $y=\frac{R}{3}$ megoldást kapjuk. Ez utóbbi az $x=\frac{2\sqrt{2}R}{3}$ és $h=\frac{4R}{3}$ értékeket vonja maga után, melyekre a térfogat $V_{\max}=\frac{32\pi R^3}{81}$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy ez valóban maximum, két lehetőségünk is van: vagy vizsgáljuk a térfogatfüggvény elsőrendű deriváltjának előjelét, megkapva így a V monotonitásával kapcsolatos összes információt, vagy (amit most is tenni fogunk) kiszámoljuk a $V''\left(\frac{R}{3}\right)$ értéket. $V''\left(y\right)=-\frac{\pi}{3}\left(2R+6y\right)$, behelyettesítve az $y=\frac{R}{3}$ értéket, $V''\left(\frac{R}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}\left(2R+2R\right)=-\frac{4\pi R}{3}<0$, azaz a kapott térfogat valóban maximális.

4.7. Függvényábrázolás az eddig tanultak használatával

Most már bármilyen függvényt ábrázolni tudunk. A függvényvizsgálat menete a következő:

- meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát, megvizsgáljuk a paritását (ez segíthet, mert a páros függvény szimmetrikus az y tengelyre, a páratlan pedig az origóra, csak legtöbb esetben a függvények se nem párosak, se nem páratlanok), megnézzük, van-e periodicitás,
- meghatározzuk a függvény határértékeit a „kritikus helyeken” ($\pm\infty$-ben, és ahol határozatlan alakot kapunk),
- előállítjuk az $f'\left(x\right)$ derivált függvényt,
- előállítjuk az $f''\left(x\right)$ második derivált függvényt,
- meghatározzuk az $f'\left(x\right)=0$ és az $f''\left(x\right)=0$ gyökhelyeit,
- a kapott gyökhelyeket sorba rendezzük nagyság szerint,

- felosztjuk az értelmezési tartományt olyan szakaszokra, ahol $f'(x)$ és $f''(x)$ előjele állandó. Ha $f'(x)$ is és $f''(x)$ is folytonos függvények, akkor a gyökhelyeiket sorba rendezve ilyen felbontást kapunk.

Vigyázat, ha például valahol a derivált függvénynek ∞ a határértéke, akkor előjelet tud váltani anélkül, hogy nulla lenne. Pl.: $f(x)=\frac{1}{x}$ esetén.

- A felbontás szakaszain, megállapítjuk a függvény „növés/fogyás” és „konkáv/konvex” viselkedését,
- ezek alapján megállapítjuk az inflexiós és a szélsőérték-pontokat,
- felvázoljuk a függvényt.

A felvázolásnál segítség a függvény értékének meghatározása egy-két pontban, például ahol a tengelyeket metszi, már ha vannak ilyenek.

- Megállapítjuk az értékkészletet.

4.7.1. Példa: Vizsgájuk meg a következő függvényt: $f(x)=5-\frac{10x}{x^2+1}$.

Megoldás: $D_f=R$, nézzük az aszimptotikus vizsgálatot:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(5-\frac{10x}{x^2+1}\right)=5.$$

Tehát $\pm\infty$-ben az $y=5$ vízszintes aszimptotánk van. Függvényünk nem páros és nem páratlan, ám $f(x)-5$ már páratlan lenne, ami origóra való centrális szimmetriát jelentene.

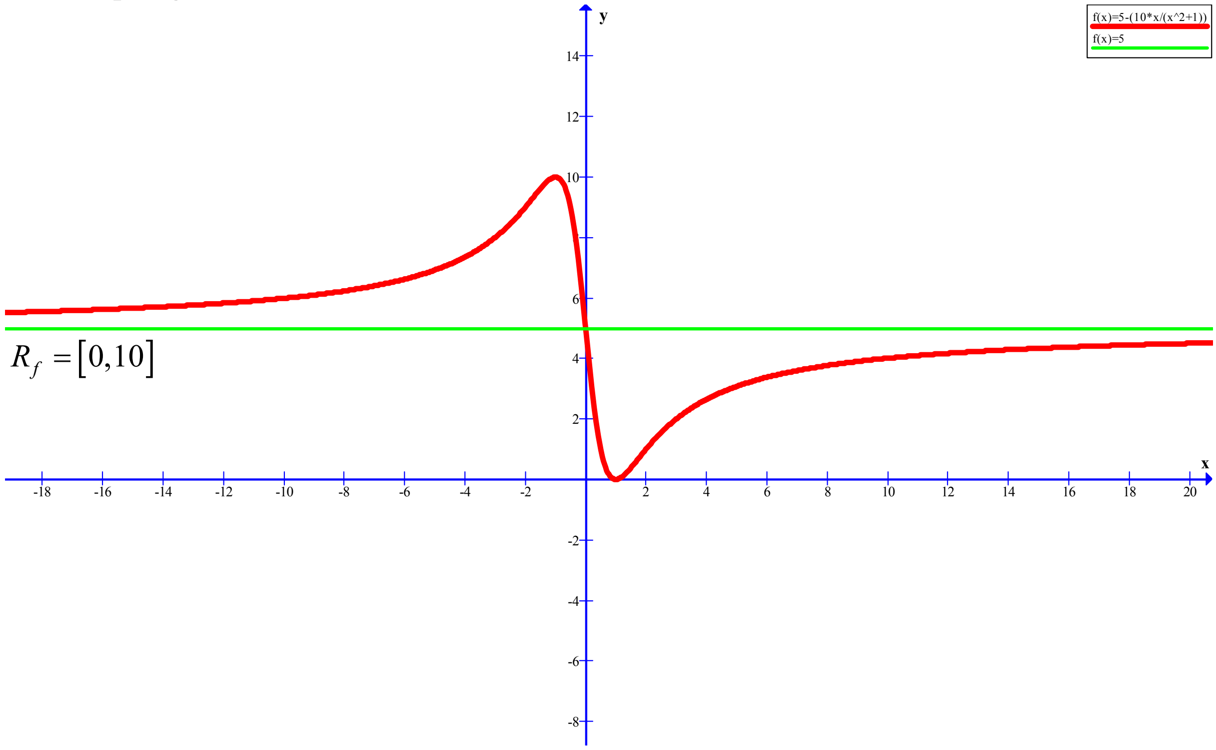
$$f'(x)=-\left(\frac{10\left(x^2+1\right)-10x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=-\frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}=10\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}=0,\quad x^2-1=0,\quad x=\pm1,$$

$$f''(x)=10\left(\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}\right)=\frac{20x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0,$$

ha $x=0$ vagy ha $x=\pm\sqrt{3}$. Sorba rendezve a gyököket és megvizsgálva $f'(x)$ és $f''(x)$ előjelét, kapjuk a következő táblázatot:

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},-1\right)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
$f(x)$	∪	inflexió	∩	max	∩	inflexió	∪	min	∪	inflexió	∩
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-

Az ábra pedig a következő:



4.8. Egyéb alkalmazások: függvények érintkezése, Taylor-polinom

4.8.1. Definíció: Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ az $x = x_0$ helyen és ennek egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható függvények. A két függvény grafikonja az x_0 helyen n*-edrendben érintkezik*, ha $f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, de $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.

Például az $f(x)$ és $g(x)$ az $x = x_0$ helyen nulladrendben érintkeznek, ha a két grafikon metszi egymást az $x = x_0$ helyen, de ott már nincs közös érintőjük. Ha az is lenne, akkor legalább elsőrendben érintkeznének. Másodrendben érintkezik az előbb említett két függvény, amennyiben $f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), f''(x_0) = g''(x_0)$, de $f'''(x_0) \neq g'''(x_0)$.

4.8.2. Definíció: Az $f(x)$ függvény x_0 *helyhez tartozó simuló* (vagy *görbületi) köre* egy olyan kör, mely az adott függvényt másodrendben érinti.

4.8.3. Tétel: A simuló kör sugara $r = \dfrac{\sqrt{\left[1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right]^3}}{f''(x_0)}$. Ennek reciprokát pedig az x_0 *helyhez tartozó görbületnek* nevezzük és G-vel jelöljük.

4.8.4. A Taylor-polinom definíciója és szemléletes bevezetése: Tekintsünk egy $f(x)$ függvényt, mely az $x = x_0$ helyen és ennek egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható. Olyan polinomot keresünk, mely az $f(x)$ függvénnyel (ami esetleg lehet „nehezebben kezelhető”) n-edrendben érintkezik az x_0 helyen. Ez lesz a keresett *Taylor-polinomunk*.

Jelöljük a keresendő polinomot $T_{f,n,x_0}(x)$-al. Mivel az x_0 gyöke a polinomnak, felírhatjuk, hogy $T_{f,n,x_0}(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n$. Felhasználva, hogy

$$T_{f,n,x_0}'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+...+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$T_{f,n,x_0}''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$T_{f,n,x_0}'''(x)=6a_3+...+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3},$$

$$\dots$$

$$T_{f,n,x_0}^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Behelyettesítve a fentiekbe az $x=x_0$ értéket, megkapjuk mindegyik a_i együtthatót, így a keresett Taylor-polinom: $T_{f,n,x_0}(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

4.8.5. Definíció: Az $x_0=0$ helyen felírt Taylor-polinomot *Mac Laurin-polinomnak* is nevezzük. Ez tehát a $T_{f,n,0}(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ polinom.

4.8.6. Néhány példa Mac Laurin-polinomra: $e^x\approx 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$ (triviális belátni, hiszen az e^x exponenciális függvény bármilyen rendű deriváltjába nullát beírva 1-et kapunk).

Ebből az $x\mapsto -x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$e^{-x}\approx 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...+\frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

A kettőt összeadva és 2-vel elosztva felírhatjuk, hogy

$$chx\approx 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Kivonással és 2-vel való osztással felírhatjuk a shx függvény Mac Laurin-polinomját is:

$$shx\approx \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Könnyű belátni (deriválással), hogy

$$\sin x\approx \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{míg} \quad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

5. Integrálszámítás

5.1. Rövid áttekintés

Az integrálszámítás a statisztikában, műszaki tudományokban, közgazdaságtanban egyik leggyakrabban használt matematikai eszköz. Az előző fejezetben tárgyalt differenciálszámítás és a mostaniban bemutatásra kerülő integrálszámítás szoros kapcsolatban állnak egymással. Ennek a kapcsolatnak egyik bizonyítéka a Newton–Leibniz-tétel, melynek segítségével a határozott integrált, legyen az

- kiszámítandó terület,
- síkgörbe hossza,
- forgásfelületek felszíne,
- forgástest térfogata,
- fémhuzal vagy pálca tehetetlenségi nyomatéka, tömege és tömegközéppontja,
- változó nagyságú erő által egy egyenes mentén végzett munka,
- folyadék által a belemerülő lemez egyik oldalára kifejtett erő stb.

könnyű kiszámolni az integrandus primitív függvényének segítségével, azaz a határozatlan integrállal. Épp ezért, a határozatlan integrálokkal és a leggyakrabban használt integrálási technikák bemutatásával kezdünk, annak ellenére, hogy a határozott integrál definíciójához, geometriai értelmezéséhez, tulajdonságaihoz igazából nincs szükségünk a primitív függvényekre.

5.2. Primitív függvények

5.2.1. Definíció: Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény *primitív függvényének* nevezzük az I intervallumon, ha $F'(x)=f(x)$ minden $x\in I$ esetén. (Emiatt az $F(x)$ kiszámolását annak $f(x)$ deriváltjából *antideriválásnak* is nevezzük.)

A primitív függvények jelölésére általában nagybetűket használunk: $F,G,H,\ldots$, míg a nekik megfelelő függvényeket (az előbb említettek deriváltjait) $f,g,h,\ldots$-val jelöljük.

5.2.2. Példa: Az $f(x)=3x$ függvénynek az $F(x)=\frac{3x^2}{2}+10$ primitív függvénye, mert $F'(x)=f(x)$ minden $x\in R$ esetén. **Számtalan esetben $I\neq R$, úgyhogy ezután mindig egy alkalmasan választott I intervallum fölött számolunk.** Ugyanígy, az $F(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{1000}$ is primitív függvénye az előbbi $f(x)$ függvénynek, mert bármilyen konstans deriváltja 0.

5.2.3. Definíció: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek összességét az $f(x)$ függvény *határozatlan integráljának* nevezzük. Jelölése: $\int f(x)\,dx$.

Egy függvény primitív függvényei csak konstansban különbözhetnek, azaz igaz a következő tétel:

5.2.4. Tétel: Ha $F'(x)=G'(x)=f(x)$, akkor $F(x)=G(x)+c$, ahol c egy konstans.

Bizonyítás (indirekt): Tegyük fel, hogy a $H(x):=F(x)-G(x)$ függvény nem konstans. Ekkor van olyan x_1 és x_2, hogy $H(x_1)\neq H(x_2)$. De akkor a Lagrange-középértéktétel alapján van olyan x_1 és x_2 közé eső x_0, amelyre $H'(x_0)=\dfrac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$. Ez ellentmond a $H'(x)=0$ feltételnek.

Ha tehát $F(x)$ az $f(x)$ egyik primitív függvénye, akkor $\int f(x)dx=F(x)+c$, ahol c az összes konstans halmazát jelöli. Az $f(x)$ függvényt integrandusnak is szoktuk nevezni.

5.3. Integrálási technikák

A definícióból következik azonnal, hogy

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx \quad \text{és} \quad \int cf(x)dx=c\int f(x)dx,$$

ahol c tetszőleges konstans.

5.3.1. Elemi függvények határozatlan integrálja:

f függvény	$\int f(x)dx$	Feltételek
$y=0$	c	-
$y=1$	$x+c$	$x\in R$
$y=x^r$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$x\in R$, $r\in R-\{1\}$,
$y=\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$	$x\neq 0$
$y=a^x$	$\dfrac{a^x}{\ln a}+c$	$x\in R$, $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$
speci. $y=e^x$	e^x+c	$x\in R$
$y=\sin x$	$-\cos x+c$	$x\in R$
$y=\cos x$	$\sin x+c$	$x\in R$
$y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$tgx+c$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx+c$	$x\neq k\pi$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$	$\lvert x\rvert<1$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$ar\,shx+c$	$x\in R$
$y=\dfrac{1}{1+x^2}$	$arctgx+c$	$x\in R$
$y=\dfrac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} ar\,thx+c, ha\,\lvert x\rvert<1 \\ ar\,cthx+c, ha\,\lvert x\rvert>1 \end{cases}$	intervallumfüggő
$y=shx$	$chx+c$	$x\in R$
$y=chx$	$shx+c$	$x\in R$
$y=\dfrac{1}{ch^2x}$	$thx+c$	$x\in R$
$y=\dfrac{1}{sh^2x}$	$-cthx+c$	$x\neq 0$

5.3.2. Elemi integrálási szabályok: differenciálható φ függvényre igazak a következők:

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln\lvert\varphi(x)\rvert+c \qquad (\varphi(x)\neq 0),$$

$$\int(\varphi(x))^r\varphi'(x)dx=\frac{(\varphi(x))^{r+1}}{r+1}+c, \text{ ahol } r\in R-\{1\},$$

$$\int\sin[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx=-\cos\varphi(x)+c,$$

$$\int\cos[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx=\sin\varphi(x)+c,$$

$$\int\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}\cdot\varphi'(x)dx=arctg[\varphi(x)]+c.$$

Folytathatnánk még, tulajdonképpen az 5.3.1.-beli táblázat minden képletét könnyen átírhatnánk, figyelembe véve a következőt:

5.3.3. Tétel (Helyettesítéses integrálás módszere I.): Ha $\varphi(x)$ differenciálható függvény, melynek értékkészlete az I intervallum, és ezen az intervallumon az f függvény folytonos, és $\int f(u)du=F(u)+c$, akkor $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+c$.

5.3.4. Tétel (Helyettesítéses integrálás módszere II.): Ha $u=g(x)$, ahol g differenciálható függvény, amelynek értékkészlete az I intervallum, és ezen az I intervallumon az f folytonos, akkor $\int f(g(x))g'(x)\,dt=\int f(u)du$.

5.3.5. Megjegyzések:

- Az 5.3.3. tétel szerint ahhoz, hogy az $f\left(\varphi(x)\right)$ összetett függvényt az $F\left(\varphi(x)\right)$ segítségével integrálhassuk, szorzótényezőként szerepelnie kell az integrandusban (a számlálóban) a $\varphi'(x)$ -nek is.
- A két tétel tulajdonképpen ugyanazt mondja ki azzal a kis különbséggel, hogy míg az 5.3.4. tételben konkrétan ki is cseréljük a változót, addig az 5.3.3. tételben mindezt csak fejben tesszük meg, maradván a régi x változónknál.
- Az 5.3.4. tételben megtörténik az $u=g(x)$ változócsere, ami a $du=g'(x)dx$ egyenlőséget vonja maga után, azaz az 5.3.3. tétel jelöléseivel $du=\varphi'(x)dx$. Ott tehát azért kellett még külön szorzótényezőként a $\varphi'(x)$, hogy meglegyen a du.
- Amennyiben integráláskor új változót vezetünk be, azt a feladat végéig ki is kell iktatnunk, visszatérve az eredeti x -hez.

Az 5.3.3. tétel bizonyítása: ez a tétel tulajdonképpen a láncszabály megfelelője, amit abból is látunk, hogy bizonyításakor csak az összetett függvények deriváltjára lesz szükségünk. Röviden, deriválva a konklúzióban található jobb oldalt, azonnal kapjuk, hogy

$$\left[F\left(\varphi(x)\right)+c\right]'=\left(F\left(\varphi(x)\right)\right)'=F'\left(\varphi(x)\right).\varphi'(x)=f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x),$$

ami nem más, mint az integrandus, tehát a tételt egy láncszabállyal és a feltétel felhasználásával be is bizonyítottuk.

5.3.6. Példa: Határozzuk meg az $\int f(ax+b)dx$ integrált, ha $\int f(x)dx=F(x)+c$.

Megoldás: Az előbbiek ismeretében már könnyű dolgunk van. Ahhoz, hogy a helyettesítés módszerét alkalmazhassuk, szükségünk van az integrandus függvényben szorzótényezőként az $(ax+b)$ deriváltjára, ami jelen esetben egy **konstans**. Ez igencsak megkönnyíti a dolgunkat, mert az integrandust szorozva, míg az integrálon kívül osztva vele semmi sem változik, ám integrálhatjuk az előző tétel szerint a függvényt. Kapjuk, hogy

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot(ax+b)'dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

5.3.7. Megjegyzés: A konstanssal való belül és kívül szorzást x függvényével már nem tehetjük meg, ami igencsak megnehezíti a dolgunkat. Ezért szükségünk lesz újabb és újabb trükkökre, technikákra a határozott integrál kiszámításához. Lássunk előtte azonban még néhány példát, melyek az eddigi információink ismeretében már könnyen kiszámíthatók:

5.3.8. Néhány egyszerűbb példa határozatlan integrál számításhoz:

1) $\int x^2\left(x^2-1\right)dx=\int\left(x^4-x^2\right)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+c$,

2) $\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{x}+c$,

3) $\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}dx = \int\left(x^{-\frac{3}{2}}-x^{-1}+x^2\right)dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\ln|x|+\frac{x^3}{3}+c$,

4) $\int \frac{x^2+x-6}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}dx = \int (x+3)dx = \frac{x^2}{2}+3x+c$,

5) $\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)^2-4+7}{x-2}dx = \int\left((x-2)+\frac{3}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x-2|+c$,

6) $\int\left(2x+3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+1}\right)dx = x^2+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c$.

5.3.9. Példák „változócsere nélküli” helyettesítésre (azaz az 5.3.3. tétel alkalmazására):

1) $\int \frac{3}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+5)'}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\ln|2x+5|+c$,

itt az utolsónál használnunk kellett a helyettesítés módszerét, azaz az integrandusban, fent a számlálóban szoroztunk 2-vel, majd az integrálon kívül osztottunk is vele (hogy ne változtassuk meg a feladatunkat), hiszen szükségünk volt a $(2x+5)$ deriváltjára,

2) $\int \frac{\cos 3x}{8+\sin 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos 3x}{8+\sin 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(8+\sin 3x)'}{8+\sin 3x}dx = \frac{1}{3}\ln|8+\sin 3x|+c$,

3) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)'\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$,

4) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int(\cos x)(\sin x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int(\sin x)'(\sin x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$.

Csak abban az esetben érdemes helyettesítést végezni, amennyiben a feladatot ezzel lényegesen leegyszerűsítettük.

5.3.10. Példák „változócserés” helyettesítésre (azaz az 5.3.4. tétel alkalmazására):

1) $\int(1+\sin x)^5\cos x\,dx = \begin{pmatrix} u=1+\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{pmatrix} = \int u^5 du = \frac{u^6}{6}+c = \frac{1}{6}(1+\sin x)^6+c$,

2) $\int\left(4x^3+2\right)ch\left(x^4+2x+5\right)dx = \begin{pmatrix} u=x^4+2x+5 \\ du=\left(4x^3+2\right)dx \end{pmatrix} = \int ch\,u\,du = sh\,u+c = sh\left(x^4+2x+5\right)+c$.

Majd lássunk két olyat, ahol kimondottan jól járunk a változócserével:

3) Amennyiben $\int R\left(e^x, e^{2x}, \ldots\right) dx$ típusú integrálunk van, ahol R egy racionális törtfüggvény, akkor az $\begin{pmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{pmatrix}$ helyettesítést alkalmazzuk, azaz $\begin{pmatrix} x = \ln u \\ dx = \frac{1}{u} du \end{pmatrix}$. Például

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \begin{pmatrix} x = \ln u \\ dx = \frac{1}{u} du \end{pmatrix} = \int \frac{u^2}{u+1} \frac{1}{u} du =$$

$$= \int \frac{u}{u+1} du = \int \frac{u+1-1}{u+1} du = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = u - \ln|u+1| + c = e^x - \ln\left(e^x + 1\right) + c.$$

4) Ha $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ típusú integrálunk van, ahol R szintén egy racionális törtfüggvény, akkor az $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítést alkalmazzuk, például

$$\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}} dx = \begin{pmatrix} u = \sqrt{6x+4}, \quad x = \frac{u^2 - 4}{6} \\ dx = \frac{u}{3} du \end{pmatrix} = \int \frac{u^2 - 4}{3} \frac{1}{u} \frac{u}{3} du =$$

$$= \frac{1}{9} \int \left(u^2 - 4\right) du = \frac{1}{9}\left(\frac{u^3}{3} - 4u\right) + c = \frac{1}{9}\left[\frac{\left(\sqrt{6x+4}\right)^3}{3} - 4\sqrt{6x+4}\right] + c.$$

A legtöbb esethez nem elegendő az eddigieket tudni, szükségünk lehet a következő módszerre.

5.3.11. Parciális integrálás módszere: A logaritmusokat, a trigonometrikus függvényeket és inverzeiket exponenciális függvényeket tartalmazó függvények sok esetben csak a parciális integrálás módszerével vagy ennek a módszernek többszöri egymás utáni alkalmazásával integrálhatók. Maga formula nagyon egyszerű, a szorzatfüggvény deriváltjából következik.

$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, ahonnan kifejezve $f(x) \cdot g'(x)$-t kapjuk, hogy $f(x) \cdot g'(x) = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' - f'(x) \cdot g(x)$, majd mindkét oldalt tagonként kiintegrálva

$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx}$ (*parciális integrálás képlete*).

A parciális integrálásnál nagyon fontos a „szereposztás”, azaz melyik függvény játssza az $f(x)$ és melyik a $g'(x)$ szerepét. Hibás szereposztással az integrált nem tudjuk kiszámolni, inkább bonyolultabb integrálokhoz jutunk. Ezért érdemes megjegyezni, hogy parciálisan integrálunk, amennyiben:

- az integrandus polinom- és exponenciális vagy trigonometrikus, esetleg hiperbolikus függvény szorzata (ekkor a polinomfüggvény játssza az $f(x)$ szerepét;
- az integrandus polinom- és logaritmusfüggvény szorzata, vagy polinom- és trigonometrikus függvény inverzének (arkuszfüggvénynek) a szorzata, esetleg polinom- és hiperbolikus függvény inverzének (areafüggvénynek) a szorzata (ekkor a polinomfüggvény játssza a $g'(x)$ szerepét;
- az integrandus exponenciális és trigonometrikus függvény szorzata (ekkor igazából mindegy a szereposztás, csak következetesen kell csinálni, mert az ilyen feladatoknál egymás után kétszer kell parciálisan integrálni, és ha nem vagyunk következetesek, sok számolás után visszajutunk az eredeti integrálunkhoz.

5.3.12. Példák parciális integrálásra:

$$\int \ln x dx = \int (1) \cdot \ln x dx = \int (x)' \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int x^2 \ln x dx = \int \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\int arctgx dx = \int (x)' \cdot arctgx dx = xarctgx - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = xarctgx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = xarctgx - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$\int \arccos \frac{x}{3} dx = \int (x)' \cdot \arccos \frac{x}{3} dx = x \arccos \frac{x}{3} - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} \frac{1}{3} dx =$$

$$= x \arccos \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \int x \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dx = x \arccos \frac{x}{3} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} \int \left(\frac{-2x}{9} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= x \arccos \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + c \,.$$

5.3.13. Racionális törtfüggvények integrálása: bármelyik alapesetben, amennyiben a számláló fokszáma nagyobb vagy egyenlő a nevező fokszámánál, a legelején mindig maradékosan osztunk. (ld. pl. az 5.3.8. feladatsor 5) feladatát, vagy az 5.3.10. feladatsor 3) példáját a változócsere után). Tehát igazából elég azt tekinteni, amikor a nevező foka nagyobb a számlálóénál.

Egyszerű alapesetek:

1) ha a nevező elsőfokú, ekkor az $\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln|ax+b| + c$ a helyes megoldás,

2) $\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx = \frac{A}{a(1-n)} (ax+b)^{1-n} + c$, ha $n \neq 1$,

3) konstans számláló és másodfokú nevező esetén, amennyiben a nevező diszkriminánsa $b^2-4ac<0$ a következő a teendő: visszavezetjük az $\int \frac{1}{1+u^2}du = arctgu + c$ integrálra,

4) amennyiben a másodfokú nevezőnk diszkriminánsa $b^2-4ac=0$, akkor a 2) esetre vezetjük vissza integrálunkat,

5) ha $b^2-4ac>0$, akkor vagy $\int \frac{1}{u^2-1}du$ alakra hozzuk, vagy parciális törtekre bontjuk az integrandust,

6) Amennyiben elsőfokú a számláló, visszavezetjük a feladatot két integrál összegére, amit az eddigiekkel könnyen ki tudunk számolni, éspedig:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx,$$

7) Általános esetben, ha az integrálunk $\int \frac{P_k(x)}{P_n(x)}dx$, ahol a k és n indexek a polinomok fokszámait jelzik, a következőket mondhatjuk el:

- ha $k \ge n$, akkor első lépés egy maradékos polinom osztás, mely szerint
  $\frac{P_k(x)}{P_n(x)} = Q_{k-n} + \frac{R_l}{P_n(x)}$, ahol $l<n$,
- ha $k<n$, akkor a nevezőt szorzattá alakítjuk, majd az integrandust parciális törtekre bontjuk. Amennyiben a nevezőnek csak egyszeres valós gyökei vannak, és ezeket $x_1,...,x_n$ jelöli, felírhatjuk, hogy
  $$\int \frac{P_k(x)}{(x-x_1)...(x-x_n)}dx = \int\left(\frac{A_1}{x-x_1}+...+\frac{A_n}{x-x_n}\right)dx.$$

Ha a nevezőnek többszörös valós gyöke van, felírhatjuk, hogy

$$\int \frac{P_k(x)}{(x-x_0)^n}dx = \int\left(\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+...+\frac{A_n}{(x-x_0)^n}\right)dx,$$

ha pedig van fel nem bontható másodfokú faktor a nevezőben, akkor

$$\int \frac{P_k(x)}{(x-x_1)^p(x-x_2)^r(ax^2+bx+c)^s}dx =$$

$$=\int\left[\frac{A_1}{x-x_1}+...+\frac{A_p}{(x-x_1)^p}+\frac{B_1}{x-x_2}+...+\frac{B_r}{(x-x_2)^r}+\frac{C_1x+D_1}{ax^2+bx+c}+...+\frac{C_sx+D_s}{(ax^2+bx+c)^s}\right]dx.$$

5.3.14. Példák racionális törtfüggvény integrálására:

1) Számítsuk ki az $\int \frac{1}{x^2+6x+25}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Tekintve, hogy nincs a nevezőnek valós gyöke, nem lehet szorzattá alakítani.

A 3) alapesetünk van, így

$$\int \frac{1}{x^2+6x+25}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-9+25}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+16}dx = \int \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}arctg\left(\frac{x+3}{4}\right)+c$$

2) Számítsuk ki az $\int \frac{1}{x^2+6x+5}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Tekintve, hogy van a nevezőnek valós gyöke, parciális törtekre bontható:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+5)}dx =$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+5)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+5} \Rightarrow \frac{A(x+5)+B(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{(A+B)x+5A+B}{(x+1)(x+5)} = \frac{1}{(x+1)(x+5)} \Rightarrow$$

$A+B=0 \quad 5A+B=1$

$A=\frac{1}{4} \quad B=-\frac{1}{4}$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+5}dx = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+5| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + c.$$

5.4. Határozott integrál

Az integrálszámítás alapötlete az, hogy sok mennyiséget hatékonyan kiszámíthatunk úgy, hogy kis részekre bontjuk, majd összegzünk. Természetesen felvetődik az a kérdés, hogy mi történik, ha egyre jobban finomítjuk a felosztást, azaz egyre több tagból álló összegekkel számolunk, sőt, mi van akkor, ha a az összeadandók száma a végtelenhez tart. A válasz egyszerű: ekkor kapjuk meg a határozott integrál értékét. A véges közelítések határértékének elméletét Bernhard Riemann német matematikusnak köszönhetjük.

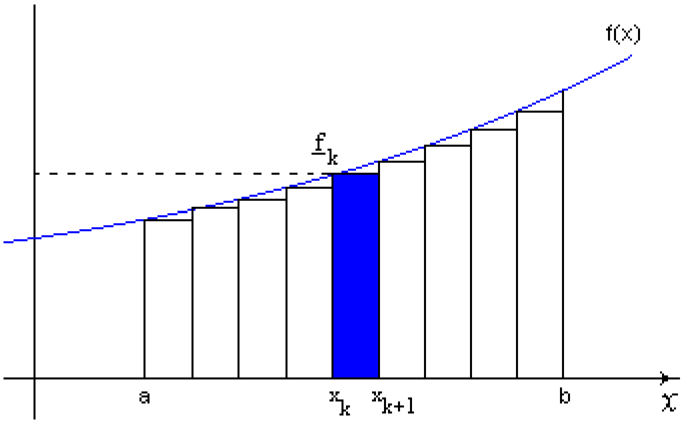
Tekintsünk az $[a,b]$ zárt intervallumon egy tetszőleges f korlátos függvényt (f-nek ezt a tulajdonságát többet nem említjük, magától értetődőnek tekintjük).

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot nem feltétlenül egyenlő hosszúságú részintervallumokra, legyenek az osztópontok növekvő sorrendben a következők (most az a-t és a b-t is ezek közé soroljuk): $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Az osztópontok halmazát $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ *felosztásnak* nevezzük, a P *felosztás normája* pedig nem más, mint a leghosszabb részintervallum hossza. Jelölése: $\|P\|$.

5.4.1. Definíció: A $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ összeget, ahol $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ tetszőleges közbülső értékek, *integrál közelítő összegnek vagy az* f *függvény* $[a,b]$ *intervallumra vonatkozó Riemann-összegének* nevezzük. Sok ilyen összeg van, attól függően, hogyan választjuk ki a felosztást és az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok közbülső ξ_i pontjait.

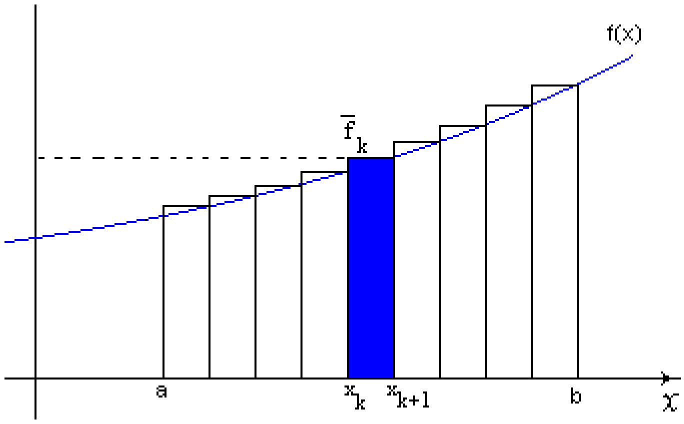
5.4.2. Definíció: Az $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ összeget, ahol $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, azaz az f függvény $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum fölötti legnagyobb alsó korlátját jelöli, *alsó közelítő összegnek* nevezzük.

Grafikusan:

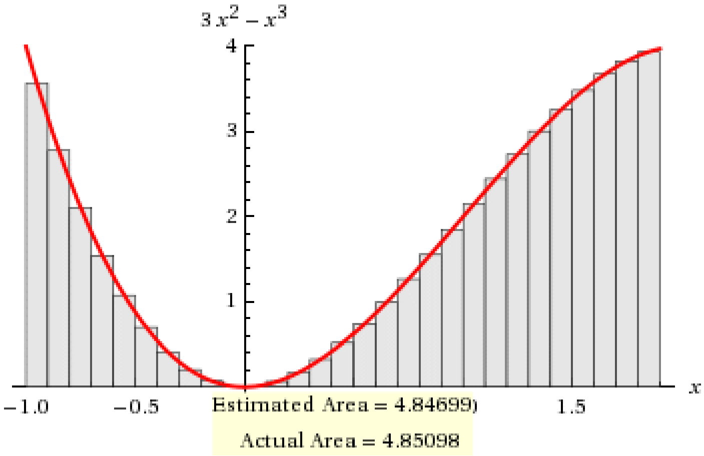


5.4.3. Definíció: Az $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ összeget, ahol $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, azaz az f függvény $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum fölötti legkisebb felső korlátját jelöli, *felső közelítő összegnek* nevezzük.

Grafikusan:



5.4.4. Definíció: Az f függvény $[a,b]$ *intervallumon vett határozott integrálja* nem más, mint a $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ Riemann-összegek határértéke, amikor a felosztás normájával nullához tartunk (végtelen részintervallumunk van). Jelölése: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, kimondani pedig úgy kell, hogy „integrál a-tól b-ig $f(x)$ dé x” vagy „f x szerinti integrálja a-tól b-ig”.



A fenti ábra nem más, mint az $f(x) = 3x^2 - x^3$ függvény –1 és 1,9 között vett, 29 részintervallummal (téglalappal) felírt Riemann-összeg geometriai interpretációja, melyben a közbülső ξ_k értékek a megfelelő intervallumok felezőpontjai. A 29 tagú összeg 4,84699, míg a terület maga 4,85098.

5.4.5. Lemma: Ha az $[a,b]$ intervallum egy meglévő felosztásához új osztópontokat veszünk (azaz *a felosztást finomítjuk*), akkor az alsó közelítő összeg monoton nő (nem csökken).

5.4.6. Lemma: Ha az $[a,b]$ intervallum egy meglévő felosztásához új osztópontokat veszünk, akkor a felső közelítő összeg monoton csökken (nem nő).

5.4.7. Lemma: Nincs olyan alsó közelítő összeg, amelyik nagyobb lenne, mint egy felső közelítő összeg, azaz tetszőleges m és n esetén $s_m \le S_n$.

5.4.8. Következmény: $\sup s_m \le \inf S_n$.

Két eset lehetséges tehát: vagy $\sup s_m < \inf S_n$, vagy $\sup s_m = \inf S_n$.

Az első esetben, azaz ha $\sup s_m < \inf S_n$, az f függvény nem integrálható az $[a,b]$ intervallumon. A második esetben, azaz ha $\sup s_m = \inf S_n$, az f függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon és ekkor *a határozott integrál* $\int_a^b f(x)dx = \sup s_m = \inf S_n$. (Akár így is bevezethető a határozott integrál fogalma.)

Tehát bármely felosztáshoz hozzárendelt Riemann-összeg nem lehet nagyobb a felső közelítő összegnél, és nem lehet kisebb az alsó közelítő összegnél.

5.4.9. Példák:

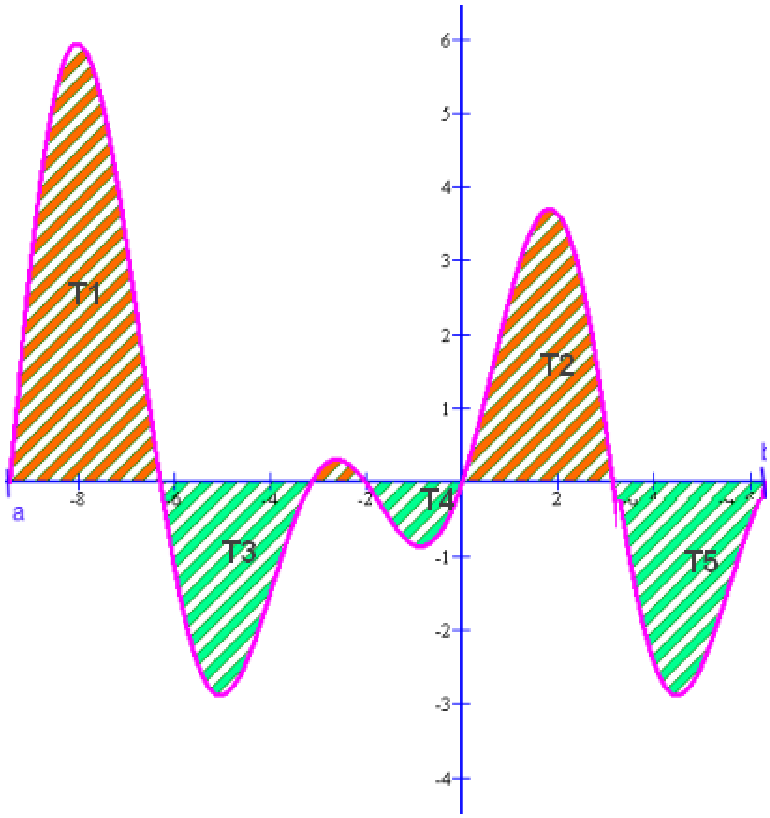
- a konstans függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható,
- a $[0,1]$ intervallumon értelmezett $d(x)=\begin{cases} 1, ha\ x\in [0,1]\cap Q \\ 0, ha\ x\in [0,1]\cap R-Q \end{cases}$ *Dirichlet függvény* nem integrálható az értelmezési tartományán.

5.5. A határozott integrál rövid geometriai interpretációja

A határozott integrál geometriai szemléltetése fontos eljárás, mert megkönnyíti az integrálok tulajdonságainak felismerését, némely esetekben akár igazolását is. A definícióból adódik, hogy egy nem negatív értékű folytonos f függvény $[a,b]$ intervallumon vett határozott integrálja tulajdonképpen az f grafikonja, az x-tengely, az $x=a$ és $x=b$ egyenesek által közrezárt területrészt jelenti, röviden, az f grafikonja alatti területet jelenti. Úgy is mondjuk még, hogy az „a és b között az f grafikonja által meghatározott görbe vonalú trapéz területét” méri.

Amennyiben a függvényünk negatív, a határozott integrál egyenlő az f grafikonja, az x-tengely, az $x=a$ és $x=b$ egyenesek által közrezárt terület ellentettjével. Ezek szerint a határozott integrál valójában *előjeles területet* jelent.

Ha függvényünk (mint a legtöbb esetben) akár többször is belemetsz az x-tengelybe, tehát $[a,b]$ intervallumbeli x-ekre pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz, akkor más a helyzet. Ilyenkor az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett határozott integrálját akkor kapjuk meg, ha összeadjuk az x-tengely feletti területrészeket (azaz a pozitív értékű grafikonrészek és az x-tengely közötti területeket) az x-tengely alatti területrészek ellentettjeivel (azaz a negatív értékű grafikonrészek és az x-tengely közötti területek ellentettjeivel).



5.6. A határozott integrállal kapcsolatos legfontosabb tételek

5.6.1. Tétel: Az $[a,b]$ intervallumon *folytonos* függvénynek létezik határozott integrálja (az említett $[a,b]$ intervallumon).

5.6.2. Tétel: Az $[a,b]$ intervallumon *monoton* és *korlátos* f függvénynek létezik határozott integrálja (azaz integrálható az $[a,b]$ intervallumon).

5.6.3. Tétel: A következő szabályok érvényesek integrálható függvényekre:

- *nulla hosszúságú intervallumon az integrál* nulla, azaz $\int_a^a f(x)\,dx = 0$,
- $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, bármely c konstans esetén,
- *összeg (különbség) integrálja* egyenlő az integrálok összegével (különbségével), azaz

  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$,
- *additivitás az integrálási intervallumra*, azaz ha az f függvény integrálhatók az $[a,b]$ és $[b,c]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a,c]$ intervallumon is, és $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$,
- *domináció*, azaz ha az $[a,b]$ intervallumon $f(x) \geq g(x)$, akkor $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$, valamint ha $f(x) \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

5.7. Az analízis alaptétele

Ebben a részben csupán egyetlen tételről esik szó, ez nem más, mint a Newton–Leibniz-tétel, az integrálszámítás legfontosabb tétele, az analízis alaptétele, ami valóságos forradalmat indított el a matematikában és ezzel egyidőben az alkalmazási területeken is. Ez az a tételünk, mely egybekapcsolja a differenciálszámítást az integrálszámítással, lehetőséget adva arra, hogy ne a definíció segítségével, hanem sokkal egyszerűbb technikákkal számoljunk ki határozott integrálokat. A határozott integrálok alkalmazásából a következő fejezet ad majd ízelítőt.

5.7.1. Newton–Leibniz-tétel: Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon és F az f primitív függvénye az $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Az $F(b) - F(a)$ különbséget szoktuk még $[F(x)]_a^b$-vel is jelölni, mintegy jelezve, hogy az $F(x)$ függvénybe először b-t, majd a-t helyettesítünk be és a kettőt ebben a sorrendben kivonjuk egymásból. (Sir Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).)

Bizonyítás: A tétel állításánál többet is bizonyítunk, nevezetesen azt, hogy az $I_a(x)=\int_a^x f(t)dt$ úgynevezett *integrálfüggvény x-szerint* (azaz a felső határ szerint) differenciálható és deriváltja éppen az integrandus $f(x)$ függvény.

$$\frac{d}{dx}I_a(x)=\lim_{h\to0}\frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Mivel $\int_a^b f(x)dx=\sup s_m=\inf S_n$ (az 5.4.8 következmény miatt), felírhatjuk, hogy:

$$\min_{t\in[x,x+h]} f(t)\le\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}\le\max_{t\in[x,x+h]} f(t).$$

$h\to0$ esetén az f függvény folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to0}\min_{t\in[x,x+h]} f(t)=\lim_{h\to0}\max_{t\in[x,x+h]} f(t)=f(x),\text{ ezért }\frac{d}{dx}I_a(x)=f(x).$$

Tehát $I_a(x)$ az $f(x)$ egyik primitív függvénye, mégpedig az, amelyik az a helyen zérus, mivel $I_a(a)=\int_a^a f(t)dt=0$ (az 5.6.3. tételt használtuk).

Felhasználva, hogy a primitív függvények csak konstansban különbözhetnek, legyen $F(x)$ egy tetszőleges primitív függvénye $f(x)$-nek, ekkor $I_a(x)=F(x)-F(a)$. Következésképpen $\int_a^b f(x)dx=I_a(b)=F(b)-F(a)$.

5.8. Improprius integrál

A határozott integrál definíciója során egyrészt feltételeztük, hogy az integrációs tartomány egy véges $[a,b]$ intervallum, másrészt, hogy az integrandus ezen az intervallum korlátos függvény. Most azokra az esetekre térünk rá, ahol ezen a feltételek valamelyike nem teljesül. Improprius integrálunk van, amennyiben:

5.8.1. Definíció (az intervallum, melyen integrálunk, nem véges): A *végtelen határú integrál* lehet $\int_a^\infty f(x)dx$, vagy $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ alakú, de akár $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ alakú is. Ekkor a következőkképpen járunk el:

- $\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)dx$,
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{\omega\to-\infty}\int_\omega^b f(x)dx$,

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$, esetleg $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\omega\to-\infty \\ \eta\to\infty}} \int_{\omega}^{\eta} f(x)dx$, ahol ω és η egymástól függetlenül tartanak $-\infty$-hez, illetve ∞-hez.

5.8.2. Definíció (nem korlátos integrandus): Első ránézésre nem is látszik, hogy az integrál improprius. Ebben az esetben az f függvény nem korlátos az $[a,b]$ intervallumon. Az integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ alakú, akár egy határozott integrál. Amennyiben a függvény az a-ban nem korlátos, az improprius integrál kiszámítása az $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ formulával történik, míg ha a függvény b-ben nem korlátos, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ a használandó képlet.

5.8.3. Definíció: Amennyiben az improprius integrál véges szám, azt mondjuk, hogy *konvergens*, míg ellenkező esetben *divergensnek* nevezzük.

5.8.4. Példa: Számítsuk ki az $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ integrált.

Megoldás: az integrandus 2-ben nem korlátos, így improprius integrálunk van. Felírhatjuk, hogy

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^{2-\varepsilon} = 2\sqrt{2}\,.$$

5.9. Az integrálszámítás alkalmazásai

5.9.1. Területszámítás: Ha $f(x)\ge 0$ az $x\in[a,b]$ intervallumon értelmezett integrálható függvény, akkor a függvénygörbe alatti terület:

$$T = \int_a^b f(x)dx\,.$$

A görbe vonalú trapéz területéből kiindulva különféle síkidomok területét tudjuk határozott integrállal kiszámítani, például két, $f(x)\le g(x)$ függvény közötti síkidom területét az a és b között:

$$T = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx\,.$$

Ha a görbe $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, paraméteres alakban adott, akkor $T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt$. A szektorterületet a $T = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left| y(t)\frac{dx(t)}{dt} - x(t)\frac{dy(t)}{dt} \right| dt$ képlettel határozzuk meg.

Ha a görbe $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ polárkoordinátás alakban adott, akkor a szektorterület $T = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$.

5.9.2. Ívhossz: Attól függően, hogy az $f(x)\geq 0$ integrálható függvényünk Descartes-koordinátákkal, paraméteresen vagy polárkoordinátákkal van megadva, a következő képletekkel felírhatjuk az ívhosszt:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,,$$

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\,dt\,,\ \text{valamint}$$

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(r(\varphi)\right)+\left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi\,.$$

5.9.3. Forgástest térfogata: Attól függően, hogy az $f(x)\geq 0$ integrálható függvényünk Descartes-koordinátákkal vagy paraméteresen van megadva, a függvénygörbe *x*-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogata:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\,,\ \text{illetve}$$

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\frac{dx(t)}{dt}dt\,.$$

Amennyiben az y-tengely körüli forgástest térfogatát számoljuk, függvény invertálásra van szükség, utána már használható a fenti képletek bármelyike.

5.9.4. Forgástest felszíne: Ha a függvény Descartes-koordinátákkal van megadva, az *x*-tengely körüli forgatással keletkező test felszíne az

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

Amennyiben paraméteresen megadott függvényünk van, az

$$F=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\,dt\ \text{képletet használjuk.}$$

5.9.5. Síklap súlypontjának koordinátái: Ha egy egyenletes tömegeloszlású síklemezt az *x*-tengely, az $f(x)\geq 0$ függvény görbéje és az $x=a$, valamint az $x=b$ függőleges egyenesek határolnak, akkor a lemez súlypontjának koordinátáit a következő képletekkel számíthatjuk ki:

$$x_s = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$, valamint az

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

5.9.6. Példa: Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ függvény, az x-tengely, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenesek által határolt egyenletes tömegeloszlású síklemez súlypontjának koordinátáit.

Megoldás: Először kiszámoljuk a két koordináta nevezőjét, azaz $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
Az x_s koordináta számlálója $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$, míg az y_s koordináta számlálója $\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$. Ezért a keresett súlypont $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{10}\right)$.

5.9.7. Példa: Hallgassuk meg, miről is szóltak az eddigi fejezeteink (elemi angoltudás szükséges hozzá).

6. Vektorok

6.1. Lineáris tér (vektortér)

6.1.1. Definíció: Azonos hosszúságú, azonos állású, azonos irányítású irányított szakaszok halmazát vektornak nevezzük. A vektorokat $\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_n,\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n,\underline{a},\underline{b},\underline{c},...$-vel jelöljük, de természetesen a középiskolában használt $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n,\vec{a},\vec{b},\vec{c},...$ jelölések is jók, az összes vektor halmazát pedig V-vel. A továbbiakban feltételezzük, hogy ismertek a vektorműveletek (*összeadás*, *kivonás* és *vektorok skalárral, azaz számmal való szorzása*), valamint a *vektor hosszának* fogalma és annak kiszámítási módja.

6.1.2. Megjegyzés: A geometriában definiáltuk az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok *skaláris szorzatát*, mely nem más, mint $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$, ahol $0\le\alpha\le\pi$ nem más, mint a két vektor által bezárt szög. Ebből azonnal következik, hogy a skaláris szorzat nem vektor, hanem skalár és hogy két vektor pontosan akkor *merőleges egymásra (azaz ortogonálisak)*, ha skaláris szorzatunk nulla. A skaláris szorzás *kommutatív*, azaz $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{v}\cdot\underline{u}$ bármely $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokra és *disztributív* az összeadásra nézve, azaz minden $\underline{u},\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokra $(\underline{u}+\underline{v})\cdot\underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{w}+\underline{v}\cdot\underline{w}$ áll fenn.

6.1.3. A vektorműveletek tulajdonságai:

1) Összeadás:

- Vektorok összege vektor, azaz $\forall\underline{u},\underline{v}\in V\quad \underline{u}+\underline{v}\in V$ (azaz az összeadás *belső művelet*),
- az összeadás *kommutatív*, azaz $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{v},\quad \forall\underline{u},\underline{v}\in V$,
- az összeadás *asszociatív*, azaz $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w}),\quad \forall\underline{u},\underline{v},\underline{w}\in V$,
- van *zérusvektor*, azaz $\exists\underline{0}\in V$ úgy, hogy $\underline{u}+\underline{0}=\underline{u},\quad \forall\underline{u}\in V$,
- minden vektornak van *ellentettje*, azaz $\forall\underline{u}\in V\quad \exists(-\underline{u})\in V$ úgy, hogy $\underline{u}+(-\underline{u})=\underline{0}$.

2) Skalárral (valós számmal) való szorzás (itt nem mindig tesszük ki a „szorzás” jelet):

- *Skalár és vektor szorzata vektor*, azaz $\forall\underline{u}\in V\quad \forall\alpha\in R\quad \alpha\underline{u}\in V$,
- $(\alpha\beta)\underline{u}=\alpha(\beta\underline{u})\quad \forall\alpha,\beta\in R,\quad \forall\underline{u}\in V$,
- $\exists 1\in R$ úgy, hogy $1\cdot\underline{u}=\underline{u}\quad \forall\underline{u}\in V$.

3) *Disztributivitás*, azaz

- $(\alpha+\beta)\cdot\underline{u}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{u},\quad \forall\alpha,\beta\in R,\quad \forall\underline{u}\in V$,
- $\alpha\cdot(\underline{u}+\underline{v})=\alpha\cdot\underline{u}+\alpha\cdot\underline{v},\quad \forall\alpha\in R,\quad \forall\underline{u},\underline{v}\in V$.

6.1.4. Definíció: *R*-feletti *lineáris térnek* vagy *vektortérnek* nevezünk minden olyan halmazt, amely rendelkezik a fenti tulajdonságokkal.

6.1.5. Példák vektorterekre:

1. a legfeljebb n-edfokú polinomok tere a valós számhalmaz felett, a polinomok összeadásával és valós számmal (skalárral) való szorzásával,
2. a folytonos függvények tere az R felett, a függvények összeadásával és valós számmal történő szorzásával.

6.1.6. Definíció: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorok *lineáris kombinációja* az $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + ... + \alpha_n \underline{v}_n$ vektor, ahol $\alpha_i \in R$.

6.1.7. Definíció: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha az $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + ... + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ egyenletből következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, azaz ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorrendszernek csak a triviális lineáris kombinációja egyenlő a zérusvektorral. Ellenkező esetben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezzük. (Ilyenkor tehát a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorrendszernek van olyan lineáris kombinációja, amelyik egyenlő a zérusvektorral, de nem minden együttható zérus, azaz az $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + ... + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ egyenletben *van nullától különböző* α_i *együttható*.

6.1.8. Tétel: Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorrendszer összefüggő, akkor van olyan vektora, amelyik előállítható a többi lineáris kombinációjaként.

6.2. Lineáris altér

6.2.1. Definíció: Az L lineáris tér egy L' részhalmazát *lineáris altérnek* nevezzük, ha L' maga is lineáris tér az eredeti műveletekkel.

6.2.2. Példák: Tekintsük az $\left(R^3, +, R, \cdot\right)$ lineáris teret (az R^3 3-dimenziós vektorteret R felett a vektorok összeadásával és a vektorok valós számokkal való szorzásával). Könnyű belátni a definíció segítségével, hogy ebben a lineáris térben

1. az $X_1 = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 = x_2 = 0 \right\}$ lineáris alteret alkot, míg
2. az $X_2 = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 = 0 \ \ vagy \ \ x_2 = 0 \right\}$ nem alkot lineáris alteret.

6.2.3. Definíció: Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ egy L lineáris tér vektorai, akkor ezen vektorok összes lehetséges lineáris kombinációi az L vektortér egy alterét alkotják. Ez a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorok által generált lineáris altér. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ vektorokat az altér *generáló rendszerének* nevezzük.

6.2.4. Megjegyzés: Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ generáló rendszer összefüggő, akkor az általuk generált tér kevesebb vektorral is generálható. Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ generáló rendszer független vektorrendszer, akkor a tér kevesebb vektorral nem generálható. (Ez a *legszűkebb generáló rendszer*.)

6.2.5. Definíció: Egy legszűkebb generáló rendszert *bázisnak* nevezünk. Megmutatható, hogy két különböző bázis ugyanannyi vektort tartalmaz. A *vektortér dimenziója* a bázisvektorok számával egyenlő.

6.2.6. Tétel: A tér minden vektora egyértelműen áll elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. A bázisvektorok együtthatóit a *vektor koordinátáinak* nevezzük.

6.2.7. Megjegyzés: Az $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ rendezett szám n-esek (ahol $x_i \in R$ minden $i \in \{1,2,...,n\}$ esetén) teljesítik a vektortér axiómáit, így elmondhatjuk, hogy *a rendezett szám n-esek tere* vektortér. Ennek egy bázisa az $\left\{ \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, ebből adódóan pedig dimenziója n. Az ilyen bázist, mikor az $\underline{e}_i$ bázisvektort úgy kapjuk meg, hogy a nullvektorban az i-edik komponensben a 0-t kicseréljük 1-re, *kanonikus bázisnak* nevezzük.

Az n-dimenziós lineáris térben a skaláris szorzást definiálhatjuk a következőképpen is:

6.2.8. Definíció: Ha $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2 + ... + u_n\underline{e}_n = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}$ és $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 + v_2\underline{e}_2 + ... + v_n\underline{e}_n = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix}$, akkor az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzata az $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$ valós szám.

6.2.9. Definíció: Ha $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2 + ... + u_n\underline{e}_n = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}$, akkor az $\underline{u} \cdot \underline{u}$ skaláris szorzat nem más, mint az $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 =: \|\underline{u}\|^2$, ami nem más, mint az $\underline{u}$ *normájának* (azaz hosszának) a négyzete.

6.2.10. Példák:

1. Tekintsük a háromdimenziós vektorok terét az R felett. Ebben a térben az

$$\begin{cases} \underline{u} = (1,1,0) \\ \underline{v} = (0,1,1) \\ \underline{w} = (1,0,1) \end{cases}$$

vektorok bázist alkotnak, mert lineárisan függetlenek (a lineáris függetlenség definíciójával ellenőrizhetjük le).

2. A legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektorterében is könnyű ellenőrizni, hogy az $\begin{cases} f_1(x) = 1 + 4x \\ f_2(x) = x + x^2 \\ f_3(x) = -x + 3x^2 \end{cases}$ polinomok (vektorok) bázist alkotnak (elég leellenőrizni a definícióval, hogy lineárisan függetlenek, mivel a vektortér 3 dimenziós (egy bázisa lehet pl. az $\{1, x, x^2\}$).

6.2.11. Definíció: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n$ bázisvektorok *ortonormált rendszert* alkotnak, ha a bázisvektorok *páronként ortogonálisak* ($\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0$, ha $i \neq j$) és *normáltak* ($\underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1$, mindegyik $\underline{e}_i$ vektorra, azaz normájuk 1).

6.2.12. Tétel (Vektor felbontása adott vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre): Az $\underline{u}$ vektor $\underline{v}$ vektorral párhuzamos és arra (azaz $\underline{v}$-re) merőleges komponensekre való bontása az $\underline{u}_p + \underline{u}_m = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\underline{v}^2} \underline{v} + \left(\underline{u} - \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\underline{v}^2} \underline{v} \right)$ vektorösszeget jelenti, ahol az összeg első tagja a $\underline{v}$-vel párhuzamos komponens (azaz az $\underline{u}$ merőleges vetületvektora a $\underline{v}$-re), a második vektor pedig a $\underline{v}$-re merőleges komponens.

Bizonyítás: Az $\underline{u}$ vektor $\underline{v}$ vektorra eső vetületének hosszát (normáját) az $\underline{u} \cdot \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ skaláris szorzattal számoljuk ki. Ezt még be kell még szoroznunk a $\underline{v}$ egységvektorával, ami $\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$. Ezzel már a párhuzamos komponenst kiszámoltuk. A merőleges komponens pedig egy egyszerű vektorkivonás. Az ilyen feladatoknál a végén, ellenőrzésként célszerű kiszámolni a két eredményvektor skaláris szorzatát. Ha ez nulla, akkor jó a számításunk.

7. Mátrixok

7.1. Az $m\times n$ -es mátrixok vektortere a valós számhalmaz felett

7.1.1. Definíció: $m\times n$*-es (valós elemű) mátrixnak* nevezünk egy m sorból és n oszlopból álló valós számtáblázatot. Az $n\times n$-es mátrixokat (melyekben a sor-és oszlopszám egyenlő) n*-edrendű négyzetes vagy kvadratikus mátrixoknak* nevezzük.

Mátrixokon a következő műveleteket vezetjük be:

- **Összeadás:** Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ két azonos típusú ($m\times n$-es) mátrix. (A mátrixokat vagy két vonallal aláhúzott nagybetűkkel jelöljük ($\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$,…stb.) vagy vastag nagybetűkkel (**A**, **B**,…stb.). Mi most az első jelölést használjuk a következőkben.)

Amennyiben a két mátrixunk

$$\underline{\underline{A}}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{B}}=\left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

(vegyük észre, hogy az első index mindig a sorszámot, míg a második az oszlopszámot jelöli), az *összegmátrix* definíció szerint

$$\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

7.1.2. Tétel: A mátrix-összeadásnak megvannak a következő tulajdonságai:

1. $m\times n$ típusú mátrixok összege $m\times n$ típusú marad, azaz *az összeadás belső művelet* az $m\times n$ típusú mátrixok halmazán,
2. a mátrixok összeadása *kommutatív*, azaz minden $m\times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrix esetén $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}$,
3. a mátrixok összeadása *asszociatív*, azaz minden $m\times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ mátrix esetén $\left(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\right)+\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}+\left(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}\right)$,
4. van *zérusmátrix* vagy *nullmátrix*, ami nem más, mint $\underline{\underline{0}}:=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, ami azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy összeadáskor változatlanul hagyja a mátrixokat, azaz $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{0}}=\underline{\underline{0}}+\underline{\underline{A}}$ minden $m\times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén,

5. minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van *ellentett mátrixa*, ami nem más, mint a $-\underline{\underline{A}} = \left(-a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}$ és azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy $\underline{\underline{A}} + \left(-\underline{\underline{A}}\right) = \underline{\underline{0}}$.

- **Mátrixok skalárral (valós számmal) való szorzása:** Legyen

$\underline{\underline{A}} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ és $\alpha \in R$. Ekkor definíció szerint

$$\alpha \cdot \underline{\underline{A}} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

7.1.3. Tétel: A skalárral való szorzás a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. skalár és mátrix szorzata mátrix, pontosabban minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrix és minden $\alpha \in R$ esetén, $\alpha \cdot \underline{\underline{A}}$ $m \times n$ típusú mátrix lesz,
2. *kommutatív*, azaz minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrixra és minden $\alpha \in R$ skalárra $\alpha \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \alpha$,
3. minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrixra és minden $\alpha, \beta \in R$ skalárokra $(\alpha\beta) \cdot \underline{\underline{A}} = \alpha \cdot \left(\beta \cdot \underline{\underline{A}}\right)$,
4. létezik $1 \in R$, hogy $1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$, minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrixra,
5. $0 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ és $\alpha \cdot \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}}$, minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrixra és minden $\alpha \in R$ skalárra,
6. *disztributivitás*, azaz minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixra és minden $\alpha, \beta \in R$ skalárra $(\alpha + \beta) \cdot \underline{\underline{A}} = \alpha \cdot \underline{\underline{A}} + \beta \cdot \underline{\underline{A}}$ és $\alpha \cdot \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right) = \alpha \cdot \underline{\underline{A}} + \alpha \cdot \underline{\underline{B}}$.

7.1.4. Következmény: Az $m \times n$ típusú mátrixok lineáris teret alkotnak R felett az összeadás és a skalárral való szorzás műveletekkel.

7.2. Mátrixok szorzása

Az összeadás és a számmal való szorzás mellett definiáljuk a mátrixok szorzását. Itt fontos a szorzótényezők típusa, nem akármilyen mátrixszorzás végezhető el, de még csak az sem igaz, hogy ugyanolyan típusú mátrixok összeszorozhatók.

7.2.1. Definíció: Legyen az $\underline{\underline{A}} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $m \times n$ típusú mátrix és

$\underline{\underline{B}} = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$ $n \times k$ típusú mátrix.

A $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix egy $m \times k$ típusú mátrix, melyet a következőképpen definiálunk: $c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, m$ és $j = 1, 2, \ldots, k$. A legtöbbször össze sem szorozható két mátrix, mert nem teljesítik a definíció elején megjelölt feltételeket a típusukra nézve, azaz nem áll fenn, hogy az első szorzótényezőnek ugyanannyi az oszlopszáma, mint a második szorzótényező sorszáma.

7.2.2. Példa: Szorozzuk össze az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixokat.

Megoldás: csak az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ szorzat létezik, ez pedig nem más, mint az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix.

7.2.3. Tétel: A mátrixok szorzása a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. *zártság* csak kvadratikus mátrixok esetén áll fenn, azaz csak az $n \times n$ típusú mátrixok szorzata őrzi meg a szorzótényezők típusát,
2. a mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$, még ha a bal és jobb oldal értelmes is,
3. asszociatív, azaz $\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}\right) \cdot \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \left(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}\right)$, minden olyan $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ típusú mátrixra, melyek ebben a sorrendben összeszorozhatók.
4. Létezik az $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ $m \times m$ típusú egységmátrix, melyre minden $m \times n$ típusú $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén $\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$ (sőt, amennyiben az $\underline{\underline{I}}$ és $\underline{\underline{A}}$ mátrixok $n \times n$ típusúak, akkor még kommutativitás is van, azaz $\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}}$.

7.2.4. Megjegyzés: Bizonyos kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrixok invertálhatók, azaz létezik $\underline{\underline{A}}^{-1}$ *inverz mátrix* úgy, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$, de erre később térünk vissza.

7.2.5. Definíció: Az $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $m\times n$ típusú mátrix transzponáltja nem más mint az

$\underline{\underline{A}}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $n\times m$ típusú mátrix.

7.2.6. Definíció: Az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix *ortogonális*, ha $\underline{\underline{A}}^T\cdot\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{I}}$.

7.2.7. Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy az $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ mátrix ortogonális (ez egyben azt is jelenti, hogy oszlopai páronként ortogonális vektorrendszert alkotnak).

7.3. Lineáris transzformációk (leképezések)

7.3.1. Definíció: Az $F:R^n\to R^m$ leképezés *lineáris*, ha minden $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokra az R^n-ből $F(\underline{u}+\underline{v})=F(\underline{u})+F(\underline{v})$ és minden $\underline{u}\in R^n$ vektorra és minden $\alpha\in R$ skalárra $F(\alpha\cdot\underline{u})=\alpha\cdot F(\underline{u})$.

7.3.2. Megjegyzés: Az előző definíciót úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy az $F:R^n\to R^m$ leképezés *lineáris*, ha minden $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokra az R^n-ből és minden $\alpha,\beta\in R$ skalárra $F(\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v})=\alpha\cdot F(\underline{u})+\beta\cdot F(\underline{v})$.

7.3.3. Definíció: Az n-dimenziós R^n tér $T:R^n\to R^n$ lineáris transzformációját *a tér önmagára való lineáris leképezésének* nevezzük.

Hogyan adunk meg egy lineáris leképezést? Tekintsük az R^n lineáris teret, egy adott $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\dots,\underline{e}_n$ bázisával együtt és az R^m lineáris teret, egy adott $\underline{f}_1,\underline{f}_2,\dots,\underline{f}_m$ bázisával. Egy tetszőleges

$$\underline{u}=u_1\underline{e}_1+u_2\underline{e}_2+\dots+u_n\underline{e}_n=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\in R^n$$

vektor képe $F(\underline{u})=u_1F(\underline{e}_1)+u_2F(\underline{e}_2)+\dots+u_nF(\underline{e}_n)\in R^m$, tehát csak a bázisvektorok képét kell megadnunk, ekkor már minden ismert lesz. Legyenek

$$F\left(\underline{e}_1\right)=u_{11}\underline{f}_1+u_{21}\underline{f}_2+\ldots+u_{m1}\underline{f}_m=\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\\vdots\\u_{m1}\end{bmatrix}$$ és így tovább,

$\vdots$

$$F\left(\underline{e}_n\right)=u_{1n}\underline{f}_1+u_{2n}\underline{f}_2+\ldots+u_{mn}\underline{f}_m=\begin{bmatrix}u_{1n}\\u_{2n}\\\vdots\\u_{mn}\end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\underline{\underline{U}}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\ldots&u_{1n}\\u_{21}&u_{22}&\ldots&u_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\u_{m1}&u_{m2}&\ldots&u_{mn}\end{bmatrix}$ mátrix minden információt tartalmaz. Ezt a mátrixot nevezzük *az adott lineáris transzformáció mátrixának* az $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n$ és $\underline{f}_1,\underline{f}_2,\ldots,\underline{f}_m$ bázisokra nézve. Egy ilyen mátrix oszlopai pontosan az értelmezési tartománybeli lineáris tér bázisvektorainak a képét tartalmazza az új bázisvektorokkal felírva. Ekkor a lineáris transzformációnkat mátrixos alakban is felírhatjuk, éspedig $F\left(\underline{v}\right)=\underline{\underline{U}}\cdot\underline{v}$, ahol $\underline{\underline{U}}$ az előbb levezetett mátrix.

7.3.4. Példa: Írjuk fel a térbeli pontok xy-síkra való vetítésének mátrixát.

Megoldás: Az R^3-beli $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ kanonikus bázis képei a következők: $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{0}$. Ezeket ebben a sorrendben oszlopokba rendezve megkapjuk az xy-síkra való vetítés mátrixát: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

8. Determinánsok

8.1. Másod- és harmadrendű determinánsok

A *determinánsok* tulajdonképpen kvadratikus mátrixokon értelmezett valós függvények. Jelölésük: $\left|\underline{\underline{A}}\right|$ vagy $\det\left(\underline{\underline{A}}\right)$. Míg a mátrixok számtáblázatok, addig a determinánsok számok, melyeket ebben a fejezetben megtanulunk kiszámolni.

8.1.1. Definíció: A *másodrendű determináns* nem más, mint $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, azaz a *főátló* menti elemek szorzata mínusz a mellékátló menti elemek szorzata. A *harmadrendű determináns* pedig nem más, mint $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, ahol a másodrendű determinánsok értékét az előző definícióval számítjuk ki.

8.1.2. Megjegyzés: Itt nem történt más, mint *kifejtettük* a harmadrendű determinánst az első sora szerint. Kifejtésnél itt egy, az első sor szerinti összeget számolunk, szem előtt tartva a következőket:

1. az *előjelet*, ami azt jelenti, hogy $(-1)^{sor+oszlop} = (-1)^{1+j}$ előjelünk lesz a kifejtés minden tagjában,
2. magát az elemet, ami azt jelenti, hogy az előbbi előjel után beírjuk azt az elemet, ahol tartunk az első sor szerinti kifejtésben,
3. az *aldeterminánst*, azaz az előbbit azzal az aldeterminánssal kell szoroznunk, melyet akkor kapunk, ha a determinánsunk a_{1j} elemének sorát (jelen esetben az első sort) és oszlopát kihúzzuk,
4. ezeket pedig az első sorunk minden egyes elemére elvégezzük.

8.1.3. Megjegyzés: A harmadrendű determináns első sora szerinti kifejtéssel a következő történik:

5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \left|\underline{\underline{A}}_{1j}\right|$, ahol az $\left|\underline{\underline{A}}_{1j}\right|$ nem más, mint az a_{1j} elem sorának (jelen esetben az első sornak) és oszlopának kihúzásával kapott (másodrendű) aldetermináns. Ezzel tulajdonképpen előkészítettük az *n*-edrendű determináns fogalmát.

8.1.3. Példák:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$,

2. *a harmadrendű Vandermonde determinánst* a következőképpen definiáljuk és számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 1 & b^2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix} + a^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = bc^2 - b^2c - a\left(c^2-b^2\right) + a^2\left(c-b\right) =$$

$$= bc\left(c-b\right) - a\left(c-b\right)\left(c+b\right) + a^2\left(c-b\right) = \left(c-b\right)\left(bc-ac-ab+a^2\right) = \left(c-b\right)\left(b-a\right)\left(c-a\right).$$

8.2. A másod- és harmadrendű determinánsok alkalmazásai, geometriai interpretációk

8.2.1. Definíció: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ háromdimenziós vektorok *vektoriális szorzata* egy olyan háromdimenziós, $\underline{a}\times\underline{b}$-vel jelölt vektor, melyre teljesülnek a következők:

1. az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata vektor,
2. $\underline{a}\times\underline{b}\perp\underline{a}$ és $\underline{a}\times\underline{b}\perp\underline{b}$,
3. hossza $\|\underline{a}\times\underline{b}\| = \|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|\cdot\sin\varphi$, ahol $\varphi\in[0,\pi]$ a két vektor által közrezárt szög,
4. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a}\times\underline{b}$ jobbrendszert (vagy jobbsodrású rendszert) alkot, mely azt jelenti, hogy amennyiben az $\underline{a}$ vektortól a $\underline{b}$ felé haladva óramutató járásával ellentétes irányban haladunk, akkor az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektor a két vektor síkjára merőlegesen felfelé mutat, ha pedig óramutató járásával megegyező az irány, akkor lefelé.

8.2.2. Megjegyzések: koordinátákkal kiszámolva a következő igaz:

1. amennyiben az $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in R^3$ és $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in R^3$, akkor a vektoriális szorzatuk $\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.
2. $\underline{i}\times\underline{i} = \underline{j}\times\underline{j} = \underline{k}\times\underline{k} = \underline{0}$,
3. $\underline{i}\times\underline{j} = \underline{k},\ \ \underline{j}\times\underline{k} = \underline{i},\ \ \underline{k}\times\underline{i} = \underline{j}$,
4. $\underline{a}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{a}$, minden $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokra.

8.2.3. Következmény (a vektori szorzat hosszának geometriai kétdimenziós interpretációja): Az $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in R^2$ és $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in R^2$ síkvektorok által kifeszített paralelogramma területe$=\|\underline{a}\times\underline{b}\| = \|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|\cdot\sin\varphi$, a kifeszített háromszög területe pedig $\frac{1}{2}\|\underline{a}\times\underline{b}\| = \frac{1}{2}\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|\cdot\sin\varphi$.

8.2.4. Definíció: Az $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, és $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ háromdimenziós vektorok *vegyes szorzata* az $\left(\underline{a}\times\underline{b}\right)\cdot\underline{c}$ skalár, amit szoktunk még $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$-vel is jelölni.

8.2.5. Tétel: Az $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ vegyes szorzat nem más, mint a három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, azaz $V_{paralelepipedon} = \left|\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\right| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$. Ugyanakkor a három vektor által kifeszített tetraéder térfogata $V_{tetraéder} = \frac{1}{6}\left|\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$.

8.2.6. Megjegyzés: A harmadrendű determináns tulajdonságainak a megértésében nagy segítséget jelent a 8.2.5. tétel.

8.3. Az n-edrendű determináns és tulajdonságai

8.3.1. Definíció: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ egy *n-edrendű determináns*. Egy skalárról van szó, melyet bármely sora vagy oszlopa szerinti kifejtéssel kiszámolhatunk.

8.3.2. Megjegyzések:

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \left|\underline{\underline{A}}_{1j}\right|$ alakban írjuk fel az első sor szerinti kifejtést, ahol az $\left|\underline{\underline{A}}_{1j}\right|$ nem más, mint az a_{1j} elem sorának és oszlopának törlése után kapott aldetermináns.

2. Amennyiben az *i*-edik sor szerint fejtjük ki a determinánst,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \left|\underline{\underline{A}}_{ij}\right|,$$

ahol az $\left|\underline{\underline{A}}_{ij}\right|$ nem más, mint az a_{ij} elem sorának és oszlopának törlése után kapott aldetermináns.

3. A $(-1)^{i+j} \cdot \left|\underline{\underline{A}}_{ij}\right|$ kifejezést szoktuk még *az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánsnak* is nevezni. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért használjuk ezt a kifejezést.

4. A determináns analóg módon kifejthető bármely oszlopa szerint is.

8.3.3. Tétel (A determinánsok tulajdonságai): Érvényesek a következők:

- a determináns bármely két sorának felcserélése előjelváltást eredményez,
- ha van két egyforma sor, akkor a determináns zérus,
- ha van csupa 0-t tartalmazó sor, akkor a determináns zérus,
- a transzponálás (főátlóra tükrözés) nem változtatja meg a determináns értékét, ezért bármit kijelentünk sorokra, igaz oszlopokra is,
- ha egy sor (oszlop) számszorosát egy másik sorhoz (oszlophoz) hozzáadjuk, a determináns értéke nem változik,
- ha a főátló fölött (vagy alatt) csak 0 van, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata.

8.4. Mátrix inverzének kiszámolása a determináns segítségével

8.4.1. Definíció: Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ típusú mátrix *adjungált mátrixát* (jel. $adj\left(\underline{\underline{A}}\right)$) úgy kapjuk meg, hogy minden elem helyére beírjuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékét, majd transzponáljuk.

$$adj\left(\underline{\underline{A}}\right)=\begin{bmatrix} \left|\underline{\underline{A}}_{11}\right| & -\left|\underline{\underline{A}}_{12}\right| & \dots & (-1)^{1+n}\left|\underline{\underline{A}}_{1n}\right| \\ -\left|\underline{\underline{A}}_{21}\right| & \left|\underline{\underline{A}}_{22}\right| & \dots & (-1)^{2+n}\left|\underline{\underline{A}}_{2n}\right| \\ \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{n+1}\left|\underline{\underline{A}}_{n1}\right| & (-1)^{n+2}\left|\underline{\underline{A}}_{n2}\right| & \dots & (-1)^{2n}\left|\underline{\underline{A}}_{nn}\right| \end{bmatrix}^T .$$

8.4.2. Tétel: Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\det\left(\underline{\underline{A}}\right)\neq 0$. Ha $\det\left(\underline{\underline{A}}\right)\neq 0$, akkor $\underline{\underline{A}}^{-1}=\dfrac{adj\left(\underline{\underline{A}}\right)}{\det\left(\underline{\underline{A}}\right)}$.

8.4.3. Példa: Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ mátrix inverzét, ha létezik.

Megoldás: Az inverz létezik, mert $\det\left(\underline{\underline{A}}\right)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\neq 0$. Az adjungált mátrix

$adj\left(\underline{\underline{A}}\right)=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\cdot\cos\alpha & (-1)^{1+2}\cdot\sin\alpha \\ (-1)^{2+1}\cdot(-\sin\alpha) & (-1)^{2+2}\cdot\cos\alpha\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$, ami egyben az inverz mátrix is, mert 1-gyel kell elosztani az adjungált mátrixot ahhoz, hogy megkapjuk az inverz mátrixot. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

9. Koordinátageometria

Rögzítsük a háromdimenziós térben az O origót és tekintsük az xyz-koordinátarendszert. A tér minden P pontja esetén az $\overrightarrow{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ helyvektor egyértelműen meghatározza a pont térbeli elhelyezkedését. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a P pont koordinátái (x, y, z) és ezt $P(x, y, z)$-vel jelöljük. Ebben a fejezetben az egyenesek és síkok egyenleteit és kölcsönös helyzetét vizsgáljuk. Figyelmünk most csak a háromdimenziós térre korlátozódik.

9.1. Egyenes és sík

9.1.1. Definíció: Ha adott az egyenes egy $\underline{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ helyvektorú $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és egy $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ irányvektora (azaz olyan vektor, mely párhuzamos az egyenessel), akkor az egyenes egy tetszőleges pontjához tartozó (pontjába mutató) $\underline{r}(x, y, z)$ vektorra teljesül, hogy $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}\,t$ valamely $t \in R$ paraméterértékre (ezt nevezzük *az egyenes vektoregyenletének*), ami koordinátákkal felírva: $\begin{cases} x = x_0 + v_1\,t \\ y = y_0 + v_2\,t \\ z = z_0 + v_3\,t \end{cases}$, ahol $t \in R$. Ezt nevezzük *az egyenes paraméteres egyenletrendszerének.*

9.1.2. Megjegyzés: Amennyiben az egyenes irányvektorának koordinátái nullától különböznek, az egyenes paraméteres egyenletrendszerét könnyen átírhatjuk Descartes-koordinátás alakba (ezt nevezzük *az egyenes egyenletrendszerének*):

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

és fordítva, ezt t-vel egyenlővé téve, majd az x, y, z-t kifejezve, megkapjuk a paraméteres egyenletrendszert.

9.1.3. Példa: Írjuk fel a $P(-2,0,3)$ és $Q(3,5,-2)$ pontokon átmenő egyenes vektoregyenletét, egyenletrendszerét és paraméteres egyenletrendszerét.

Megoldás: A vektoregyenlethez szükségünk van a $\overrightarrow{PQ}(x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P) = (5,5,-5)$ vektorra. Innen a vektori egyenlet nem más, mint $\underline{r} = \underline{r}_P + (5,5,-5)t$, ahol $t \in R$. Ezt átírhatjuk az $(x, y, z) = (-2,0,3) + (5,5,-5)t$, ahonnan azonnal kapjuk a paraméteres egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 5t \\ z = 3 - 5t \end{cases}, \text{ ahol } t \in R.$$

Az egyenletrendszert pedig azonnal felírhatjuk, ha a t paramétert mindenütt kifejezzük, majd ezeket egyenlővé tesszük: $\frac{x+2}{5}=\frac{y}{5}=\frac{z-3}{-5}$.

9.1.4. Definíció: Amennyiben adott a sík egy $\underline{r}_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ helyvektorú $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ pontja és egy $\underline{n}\left(n_1,n_2,n_3\right)$ normálvektora (azaz olyan vektor, mely merőleges a síkra), akkor a sík egy tetsző-leges pontjához tartozó (pontjába mutató) $\underline{r}\left(x,y,z\right)$ vektora kielégíti az $\underline{n}\left(\underline{r}-\underline{r}_0\right)=0$ egyenletet, ami koordinátás alakban nem más, mint $n_1\left(x-x_0\right)+n_2\left(y-y_0\right)+n_3\left(z-z_0\right)=0$.

9.2. Illeszkedési és metszési feladatok a térben

9.2.1. Illeszkedés

- A $P\left(x_1,y_1,z_1\right)=\underline{r}_1$ pont rajta van az $\underline{r}=\underline{r}_0+\underline{v}\,t$ egyenesen, ha van olyan t, amelyre $\underline{r}_1=\underline{r}_0+\underline{v}\,t$.
- A $P\left(x_1,y_1,z_1\right)=\underline{r}_1$ pont rajta van az $\underline{n}\left(\underline{r}-\underline{r}_0\right)=0$ egyenletű síkon, ha $\underline{n}\left(\underline{r}_1-\underline{r}_0\right)=0$.
- Az $\underline{r}=\underline{r}_0+\underline{v}\,t$ egyenes benne van az $\underline{n}\left(\underline{r}-\underline{r}_1\right)=0$ síkban, ha $\underline{n}\left(\underline{r}_0+\underline{v}\,t-\underline{r}_1\right)=0$.

9.2.2. Metszési feladatok

- **Egyenesek metszéspontja:** Az $\begin{cases} x=x_0+v_1\,t \\ y=y_0+v_2\,t \\ z=z_0+v_3\,t \end{cases}$, egyenes metszi az $\begin{cases} x=x_1+w_1\,t \\ y=y_1+w_2\,t \\ z=z_1+w_3\,t \end{cases}$ egyenest, ha van olyan t_1 és t_2, hogy $\begin{cases} x_0+v_1\,t=x_1+w_1\,t \\ y_0+v_2\,t=y_1+w_2\,t \\ z_0+v_3\,t=z_1+w_3\,t \end{cases}$, ellenkező esetben kitérők.

- **Egyenes és sík döféspontja:** Az $\underline{r}=\underline{r}_0+\underline{v}\,t$ egyenes és az $\underline{n}\left(\underline{r}-\underline{r}_1\right)=0$ sík döféspontját az a t skalár határozza meg, amely megoldása az $\underline{n}\left(\underline{r}_0+\underline{v}\,t-\underline{r}_1\right)=0$ elsőfokú egy ismeretlenes egyenletnek.

9.2.3. Megjegyzés: Sík és egyenes merőlegesek egymásra, ha az egyenes irányvektora és a sík normálvektora párhuzamosak. Mondhatjuk úgy is, hogy a sík és egyenes merőlegesek egymásra, ha az egyenes irányvektora egy normálvektora a síknak.

9.2.4. Példa: Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0\left(2,1,-1\right)$ ponton és merőle-ges a $2x+y-z=3$ és $x+2y+z=2$ síkok metszésvonalára (egyenesre).

Megoldás: Ha a $z=t$ paraméterezést választjuk, akkor a két sík egyenlete $2x+y=3+t$ és $x+2y=2-t$, ami az $\begin{cases} x=\frac{4}{3}+t \\ y=\frac{1}{3}-t \\ z=t \end{cases}$ egyenest eredményezi. Ennek egy irányvektora az $(1,-1,1)$ vektor.

Ez lesz a sík normálvektora, úgyhogy még csak azt kell figyelembe vennünk, hogy a keresett sík átmegy a $P_0(2,1,-1)$ ponton, ezért az eredmény $1\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)+1\cdot(z+1)=0$, azaz $x-y+z=0$.

9.3. Térelemek távolsága

- **Két pont távolsága:** a $P_1(x_1,y_1,z_1)$ és $P_2(x_2,y_2,z_2)$ pontok távolságát a
  $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
  képlettel számoljuk ki (tulajdonképpen a két pont által meghatározott vektor hosszából jön ki).
- **Pont és egyenes távolsága:** a $P_1(x_1,y_1,z_1)$ pont és az $\underline{r}=\underline{r}_0+\underline{v}\,t$ egyenes távolságának meghatározásához felírjuk a P_1 ponton átmenő és az egyenesre merőleges sík egyenletét, ami $\underline{v}(\underline{r}-\underline{r}_1)=0$. Kiszámítjuk a sík és egyenes P_2 döféspontját, majd a P_1 és P_2 pontok távolságát.
- **Pont és sík távolsága:** a $P_1(x_1,y_1,z_1)$ pont és az $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$ sík *előjeles távolsága* $d=\dfrac{n_1(x_1-x_0)+n_2(y_1-y_0)+n_3(z_1-z_0)}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$.
- **Két egyenes távolsága:** legyen a két egyenes az $\begin{cases} x=x_0+v_1\,t \\ y=y_0+v_2\,t \\ z=z_0+v_3\,t \end{cases}$ és az $\begin{cases} x=x_1+w_1\,t \\ y=y_1+w_2\,t \\ z=z_1+w_3\,t \end{cases}$.

  Az $\underline{n}=\underline{v}\times\underline{w}$ *normál transzverzális irányú vektor* (mindkét vektorra merőleges).
  Tekintsünk egy P pontot az első egyenesen, egy Q pontot pedig a másodikon.
  Tulajdonképpen $\overrightarrow{PQ}$ vektort vetítjük a normál transzverzális irányú vektorra, így a keresett távolság $d=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\dfrac{\underline{v}\times\underline{w}}{|\underline{v}\times\underline{w}|}\right|$ (a képletben szerepel skaláris szorzás és vektoriális szorzás is).

- **Egyenes és sík távolsága:** csak párhuzamosság esetén érdekes, ekkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól vett távolságát számoljuk.

- **Síkok távolsága:** csak párhuzamosság esetén érdekes, ekkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolságát számoljuk.

9.3.1. Megjegyzés: Metsző egyenesek távolsága 0. Párhuzamos egyeneseknél (mikor a két irányvektor egymás számszorosa) elegendő egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől vett távolságát kiszámítani.

9.4. Hajlásszögek

Két vektor szögét legegyszerűbben a skaláris szorzat segítségével számoljuk ki a $\cos\left(\underline{v},\underline{w}\right)=\dfrac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{\left|\underline{v}\right|\cdot\left|\underline{w}\right|}$ képlettel.

- **Két egyenes hajlásszöge** megegyezik az irányvektoraik szögével.
- **Egyenes és sík hajlásszöge** az irányvektor és normálvektor pótszöge.
- **Két sík hajlásszöge** a normálvektoraik szögével egyenlő.

9.4.1. Példa: Határozzuk meg az $x+y=1$ és $2x+y-2z=2$ síkok szögét.

Megoldás: A két sík normálvektora $\underline{n}_1=\left(1,1,0\right)$ és $\underline{n}_2=\left(2,1,-2\right)$. Ezen vektorok szögének koszinusza $\cos\left(\underline{n}_1,\underline{n}_2\right)=\dfrac{\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2}{\left|\underline{n}_1\right|\cdot\left|\underline{n}_2\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, így a bezárt szög $\dfrac{\pi}{4}$.

PÉLDATÁR

1. fejezet

Sorozatok

Írja fel az alábbi sorozatok első néhány elemét. Vizsgálja meg, hogy az adott sorozat korlátos-e, monoton-e, konvergens-e?

1. $a_n = 3n$
2. $b_n = (-1)^n n$
3. $c_n = 2 + 4n$
4. $d_n = \frac{5}{n}$
5. $e_n = -\frac{3}{n^2}$
6. $f_n = 3^n$
7. $g_n = \frac{1}{4^n - 1}$
8. $h_n = \frac{2n+1}{n+3}$
9. $i_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$
10. $j_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

Írja fel az alábbi sorozatok n-edik elemét. Vizsgálja meg, hogy az adott sorozat korlátos-e, monoton-e, konvergens-e?

11. $1,\ 2,\ 3, \ldots$
12. $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots$
13. $-1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots$
14. $0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999; \ldots$
15. $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0, \ldots$
16. $1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1, \ldots$

17. $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ldots$
18. Legyen $a_n = \frac{2n-1}{5n+2}$. Határozza meg azt a legkisebb n_0 természetes számot (küszöbindexet), melyre teljesül, hogy $\forall n > n_0$ esetén az a_n eltérése az $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sorozat határértékétől kisebb mint $\varepsilon = 10^{-2}$.

Vizsgálja meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok. Ha igen, akkor határozza meg a határértéket.

19. $a_n = \frac{1}{n+3}$
20. $a_n = \frac{4n+1}{n+3}$
21. $a_n = \frac{4n^2+1}{n+3}$
22. $a_n = \frac{4n+1}{n^2+3}$
23. $a_n = \frac{2n+1}{3-n}$
24. $a_n = \frac{(4n+1)^3}{n+3}$
25. $a_n = \frac{\sqrt{4n+1}}{n+3}$
26. $a_n = \frac{4^n+1}{n+3}$
27. $a_n = \frac{4n+1}{2^n+3}$
28. $a_n = 3^n$
29. $a_n = 3^{-n}$
30. $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$
31. $a_n = \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$
32. $a_n = \frac{2^n+4^n}{3^n+5n}$
33. $a_n = \frac{2^n+2000n}{3^n+5^n}$
34. $a_n = \frac{0{,}2^n}{0{,}3^n+5}$
35. $a_n = \frac{0{,}8^n+5}{0{,}4^n+4}$
36. $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$
37. $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$
38. $a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}$
39. $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$
40. $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$
41. $a_n = \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$

42. $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$

43. $a_n = \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$

44. $a_n = \left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^n$

45. $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^n$

46. $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{n^2+n+1}$

Megoldások

Egy mintamegoldás (8. feladat megoldása):
$a_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2(n+3)-5}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$. Ha n-et növeljük, $n+3$ is szigorúan monoton növekvő lesz, $\frac{5}{n+3}$ szigorúan monoton csökkenő, $-\frac{5}{n+3}$ szigorúan monoton növekvő, így a_n is az lesz az első elemtől kezdődően. Ezért egy jó alsó korlát az $a_1 = \frac{3}{4}$, míg az $a_n = 2 - \frac{5}{n+3}$-ból következik, hogy a legjobb felső korlátunk a 2. Sorozatunk konvergens, mert monoton és korlátos. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{5}{n+3}\right) = 2.$

Megjegyzések:

1. Amennyiben nem használjuk az $a_n = 2 - \frac{5}{n+3}$ átírást, tekinthetjük az $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+3} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+4)(n+3)} > 0$ különbséget, melyből következik, hogy $a_{n+1} > a_n$, tehát sorozatunk szigorúan monoton növekvő. Ekkor a limesz:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2 + \frac{1}{n}^{\nearrow 0}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}_{\searrow 0}\right)} = 2.$$

2. Pozitív tagú sorozatok esetén (mint amilyen ez is) tekinthetjük az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányadost is, ha monotonitást vizsgálunk. Ekkor azt kell megnéznünk, hogy 1-nél nagyobb vagy kisebb a hányados, ettől függően szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő a sorozat.

1. $a_n = 3n$	$3,\ 6,\ 9,\ 12, \ldots$	nem korlátos	monoton növő	divergens
2. $b_n = (-1)^n \cdot n$	$-1,\ 2,\ -3,\ 4, \ldots$	nem korlátos	nem monoton	divergens
3. $c_n = 2 + 4n$	$6,\ 10,\ 14,\ 18, \ldots$	nem korlátos	monoton növő	divergens
4. $d_n = \frac{5}{n}$	$5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4}, \ldots$	korlátos	monoton csökkenő	0-hoz konvergál
5. $e_n = -\frac{3}{n^2}$	$-3,\ -\frac{3}{4},\ -\frac{3}{9},\ -\frac{3}{16}, \ldots$	korlátos	monoton növő	0-hoz konvergál
6. $f_n = 3^n$	$3,\ 9,\ 27,\ 81, \ldots$	nem korlátos	monoton növő	divergens
7. $g_n = \frac{1}{4^n - 1}$	$\frac{1}{3},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{63},\ \frac{1}{255}, \ldots$	korlátos	monoton csökkenő	0-hoz konvergál
8. $h_n = \frac{2n+1}{n+3}$	$\frac{3}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{7}{6},\ \frac{9}{7}, \ldots$	korlátos	monoton növő	2-höz konvergál
9. $i_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$	$5 - \frac{1}{1},\ 5 + \frac{1}{2},\ 5 - \frac{1}{3},\ 5 + \frac{1}{4}, \ldots$	korlátos	nem monoton	5-höz konvergál
10. $j_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$	$\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1},\ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}+1},\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}+1}, \ldots$	korlátos	monoton növő	1-hez konvergál

11. $1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$	$a_n = n$	nem korlátos	monoton növő	divergens
12. $1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots$	$b_n = n^2$	nem korlátos	monoton növő	divergens
13. $-1,\ 2,\ 5,\ 8, \ldots$	$c_n = 3n - 4$	nem korlátos	monoton növő	divergens
14. 0,9; 0,99; 0,999;...	$d_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$	korlátos	monoton növő	1-hez konvergál
15. $1,\ 0,\ 1,\ 0, \ldots$	$e_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	korlátos	nem monoton	divergens
16. $1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ \ldots$	$f_n = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 3k-2 \\ 0, \text{ ha } n = 3k-1, \\ -1, \text{ ha } n = 3k \end{cases}$ ahol $k \in N$.	korlátos	nem monoton	divergens
17. $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}, \ldots$	$g_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	korlátos	nem monoton	0-hoz konvergál

18. Legyen $a_n = \frac{2n-1}{5n+2}$.H Határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot (küszöbindexet), melyre teljesül, hogy $\forall n > n_0$ esetén az a_n eltérése az $(a_n)_{n \geqslant 1}$ sorozat határértékétől kisebb mint $\varepsilon = 10^{-2}$.

Megoldás. Amennyiben tetszőleges ε-hoz adjuk meg a küszöbindexet, a sorozat konvergenciáját bizonyítjuk a definíció segítségével.

Most viszont számoljuk ki a küszöbindexet a kért $\varepsilon = 10^{-2}$ értékre.

A sorozat határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{5n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(2 - \frac{1}{n}\nearrow^{0}\right)}{n\left(5 + \frac{2}{n}\searrow_{0}\right)} = \dfrac{2}{5}.$

Teljesülnie kell az $\left|\frac{2n-1}{5n+2} - \frac{2}{5}\right| < \frac{1}{100}$ egyenlőtlenségnek, ami a következőkkel ekvivalens: $\left|-\frac{9}{5(5n+2)}\right| < \frac{1}{100} \iff 180 < (5n+2) \iff 178 < 5n \iff n > \frac{178}{5}$. Ezért $n_0 = \left[\frac{178}{5}\right] = 35$ a kért küszöbszám.

18. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0.$

19. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n+3} = 4.$

20. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{n+3} = +\infty,$ divergens.

21. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n^2+3} = 0.$

22. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3-n} = -2.$

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)^3}{n+3} = +\infty,$ divergens.

24. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{n+3} = 0.$

25. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+1}{n+3} = +\infty,$ divergens.

26. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2^n+3} = 0.$

27. $\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty,$ divergens.

28. $\lim_{n\to\infty} 3^{-n} = 0.$

29. $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1.$

30. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n} = 0.$

31. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5n} = +\infty,$ divergens.

32. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+2000n}{3^n+5^n} = 0.$

33. $\lim_{n\to\infty} \frac{0{,}2^n}{0{,}3^n+5} = 0.$

34. $\lim_{n\to\infty} \frac{0{,}8^n+5}{0{,}4^n+4} = +\infty,$ divergens.

35. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 0.$

36. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} = 0.$

37. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1} = 1.$

38. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \frac{1}{2}.$

39. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = e^2.$

40. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n = e^3.$

41. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n = e^{-3}.$

42. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n = 0.$

43. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^n = +\infty,$ divergens.

44. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^n = 1.$

45. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{n^2+n+1} = e^3.$

2. fejezet

Függvények határértéke

Határozza meg az alábbi függvények adott helyen vett határértékét!

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3}{2x-1}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+3}{2x-1}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2-x}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x}$
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$
10. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x-10}{x^2-x-2}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$
12. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$
14. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin 5x}{x}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}\, 10x}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
18. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$
19. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(100x+50)-\ln 50}{2x}$
20. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}$
21. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{100}-1}{x}$
22. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
23. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$
24. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$
25. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$
26. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^x$
27. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^x$
28. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}$
29. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
30. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$

Megoldások

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3}{2x-1} = 4$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+3}{2x-1} = 2$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = 0$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = 3$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \frac{7}{3}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = 5$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2-x} = -3$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x} = 6$
9. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = 1$
10. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x-10}{x^2-x-2} = 0$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = 1$
12. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3}{2}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$
14. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin 5x}{x} = 0$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\text{tg } 10x} = \frac{1}{2}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
17. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
18. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$
19. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(100x+50)-\ln 50}{2x} = 1$
20. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = 2$
21. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{100}-1}{x} = 100$
22. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$
23. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{5}$
24. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} = \frac{1}{2}$
25. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{-1}$
26. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^x = \infty$
27. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^x = 0$
28. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = e^2$

Útmutatás a következő két feladathoz:
a) A feladat átalakítható így:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}} .$$

Most már csak a $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2}$ határértéket kell vizsgálni.
b) Határozzuk meg a függvény logaritmusának határértékét! $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$: Itt alkalmazható a L'Hospital-szabály.

29. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$
30. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\text{ctg } x} = 1$

3. fejezet

Folytonosság

1. Az a paraméter mely értékeire lesz a következő függvény folytonos?

$$g\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}10x}, & \text{ha } x\neq 0,\\ a+5, & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

2. Állapítsa meg, hogy folytonos-e az alábbi függvény az $x=0$ és $x=\frac{1}{2}$ helyen!

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha} & x\leq 0,\\ \arcsin x, & \text{ha} & 0<x\leq \frac{1}{2},\\ \frac{\pi}{3}, & \text{ha} & \frac{1}{2}<x.\end{cases}$$

3. Állapítsa meg, hogy folytonos-e az alábbi függvény az $x=0$ és $x=1$ helyen!

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha} & x\leq 0,\\ \mathrm{arctg}\, x, & \text{ha} & 0<x\leq 1,\\ \frac{\pi}{4}, & \text{ha} & 1<x.\end{cases}$$

4. Állapítsa meg, hogy folytonos-e az alábbi függvény az $x=0$ és $x=3$ helyen!

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & \text{ha} & x\leq 0,\\ \sqrt{1+x}, & \text{ha} & 0<x\leq 3,\\ 2, & \text{ha} & 3<x.\end{cases}$$

5. Állapítsa meg, hogy folytonos-e az alábbi függvény az $x=1$ és $x=100$ helyen!

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{10\ln 10}+1, & \text{ha} & x\leq 1,\\ \log_{10}10x, & \text{ha} & 1<x\leq 100,\\ \frac{x-100}{100\ln 10}+3, & \text{ha} & 100<x.\end{cases}$$

6. Állapítsa meg, hogy folytonos-e az alábbi függvény az $x=2$ és $x=200$ helyen!

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{10\ln 10}+1, & \text{ha} \quad x\le 2,\\ \log_{10}5x, & \text{ha} \quad 2<x\le 200,\\ \frac{x-200}{200\ln 10}+3, & \text{ha} \quad 200<x. \end{cases}$$

Megoldások

1. $g\,(x)$a $(-\pi;\pi)\setminus\{0\}$ pontokban folytonos, egyedül az $x=0$-an kell a folytonosságot vizsgálni.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}10x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^{\nearrow 1}\cdot\left(\frac{10x}{\mathrm{tg}10x}\right)^{\nearrow 1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=a+5,$$

ezért $a=\frac{1}{2}-5=-\frac{9}{2}$.

2. $x=0$ helyen folytonos, $x=\frac{1}{2}$ helyen nem folytonos.
3. $x=0$ helyen folytonos, $x=1$ helyen is folytonos.
4. $x=0$ helyen folytonos, $x=3$ helyen is folytonos.
5. $x=1$ helyen folytonos, $x=100$ helyen is folytonos.
6. $x=2$ helyen folytonos, $x=200$ helyen is folytonos.

4. fejezet

Deriválás

Határozza meg az alábbi függvények deriváltját!

1. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7$
2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7x + 6$
3. $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6$
4. $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{x}$
5. $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{9x}$
6. $f(x) = \frac{3}{x} - 5x^{\frac{5}{3}} + 7\sqrt[3]{x}$
7. $f(x) = (2x + 5)(3x^7 - 8x^2)$
8. $f(x) = (5x + 7)\sqrt{4x^5}$
9. $f(x) = (3x^7 - 8x^2)\sin x$
10. $f(x) = (3x^3 - 8x^2)(\sin x - \cos x)$
11. $f(x) = \frac{x^3-1}{1+2x}$
12. $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x}$
13. $f(x) = \frac{x^3+x^2+x}{\cos x}$
14. $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{2+\cos x}$

15. $f(x) = \frac{4}{(1-x^2)(1-3x^3)}$

16. $f(x) = \frac{x^3+3}{(x^2+2x+3)(\sin x)}$

17. $f(x) = \frac{2x^2-4x}{(1-x^2)\sqrt{x}}$

18. $f(x) = \frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}$

19. $f(x) = x^3 \ln x$

20. $f(x) = 3^x(3x^6 - 8x^2 + 2)$

21. $f(x) = e^x(3x^2 - 4x)$

22. $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \ln x$

23. $f(x) = 2^x \cdot \sin x \cdot \log_3 x$

24. $f(x) = \sin^3 x$

25. $f(x) = \sin x^3$

26. $f(x) = \mathrm{tg}(4x^2 + 1)$

27. $f(x) = \sin(x^2 + 3x + 4)$

28. $f(x) = \sqrt[3]{x - 3x^5}$

29. $f(x) = \frac{1}{\cos 5x}$

30. $f(x) = (3x^7 - 8x^2)^{10}$

31. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^3$

32. $f(x) = \mathrm{tg}^2 x^2$

33. $f(x) = \sqrt{2x - \sin 2x}$

34. $f(x) = (5x^6 - 8x^2)^{10} \cdot \mathrm{tg}\, \frac{1}{x}$

35. $f(x) = \sin \frac{2+3x}{1+x^2}$

36. $f(x) = \frac{\cos x^3}{2+\sin^4 x}$

37. $f(x) = \cos\left(\frac{2+x}{2^x}\right)$

38. $f(x) = 10^{\sin x}$

39. $f(x) = 10^{\sin^2 x}$

40. $f(x) = 10^{\sin x^2}$

41. $f(x) = \lg \sin 5x$

42. $f(x) = \sqrt{\text{tg } x^2}$

43. $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$

44. $f(x) = \text{tg } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

45. $f(x) = \text{sh } [x^3 + \ln(x+8)]$

46. $f(x) = \text{arth } (1 - x^2)$

47. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1+\text{sh } x}{1+thx}}$

48. $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

49. $f(x) = \text{arch } \sqrt{x+1}$

50. $f(x) = \text{arctg}\frac{1}{x}$

51. $f(x) = e^{\text{arthx}^2}$

52. $f(x) = e^{3x}\text{sh}2x$

53. $f(x) = \ln \text{tg}\frac{x}{2}$

54. $f(x) = \frac{e^{2\text{arctg}\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+\lg(10-2^x)}}$

55. $f(x) = \ln 2 \cdot \text{tg } \left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$

56. $f(x) = (1+x)^{(1-x)}$

57. $f(x) = (\sin x)^x$

58. $f(x) = \sqrt[x]{1+x^2}$

59. $f(x) = x^x + (\sin x)^{\sin x}$

60. $f(x) = (\ln x)^{\lg x}$

61. $f(x) = x(1+x)(2+x)(3+x)$

Megoldások

1. $f'(x) = 12x^2 - 2x$
2. $f'(x) = 4x^3 - 4x + 7$
3. $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{2}{3}}$
4. $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
5. $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
6. $f'(x) = -\frac{3}{x^2} - \frac{25}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
7. $f'(x) = 2(3x^7 - 8x^2) + (2x+5)(21x^6 - 16x)$
8. $f'(x) = 5\sqrt{4x^5} + (5x+7)5x^{\frac{3}{2}}$
9. $f'(x) = (21x^6 - 16x)\sin x + (3x^7 - 8x^2)\cos x$
10. $f'(x) = (9x^2 - 16x)(\sin x - \cos x) + (3x^3 - 8x^2)(\cos x + \sin x)$
11. $f'(x) = \frac{3x^2(1+2x)-(x^3-1)\cdot 2}{(1+2x)^2} = \frac{4x^3+3x^2+2}{(1+2x)^2}$
12. $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2x)-(x^3+4)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$
13. $f'(x) = \frac{(3x^2+2x+1)\cos x+(x^3+x^2+x)\sin x}{\cos^2 x}$
14. $f'(x) = \frac{(2x\mathrm{tg}\, x+x^2\frac{1}{\cos^2 x})(2+\cos x)+x^2\mathrm{tg}\, x\sin x}{(2+\cos x)^2}$
15. $f'(x) = 4(-1)(1-x^2)^{-2}(-2x)(1-3x^3)^{-1} + 4(1-x^2)^{-1}(-1)(1-3x^3)^{-2}(-9x^2)$
16. $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2x+3)(\sin x)-(x^3+3)[(2x+2)\sin x+(x^2+2x+3)\cos x]}{(x^2+2x+3)^2(\sin^2 x)}$
17. $f'(x) = \frac{(4x-4)(1-x^2)\sqrt{x}-(2x^2-4x)[-2x\sqrt{x}+(1-x^2)\frac{1}{2\sqrt{x}}]}{(1-x^2)^2 x}$
18. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1+\arcsin x)-(1-\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\arcsin x)^2} = \frac{-2}{(1+\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$
19. $f'(x) = 3x^2\ln x + x^3\frac{1}{x} = 3x^2\ln x + x^2$
20. $f'(x) = 3^x\ln 3(3x^6 - 8x^2 + 2) + 3^x(18x^5 - 16x)$

21. $f'(x) = e^x(3x^2 - 4x) + e^x(6x - 4) = (3x^2 + 2x - 4)e^x$

22. $f'(x) = \sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sin x$

23. $f'(x) = 2^x \ln 2 \cdot \sin x \cdot \log_3 x + 2^x \cdot \cos x \cdot \log_3 x + 2^x \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x \ln 3}$

24. $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$

25. $f'(x) = (\cos x^3) 3x^2$

26. $f'(x) = \frac{8x}{\cos^2(4x^2+1)}$

27. $f'(x) = (2x + 3) \cos(x^2 + 3x + 4)$

28. $f'(x) = \frac{1}{3}(x - 3x^5)^{-\frac{2}{3}}(1 - 15x^4)$

29. $f'(x) = -(\cos 5x)^{-2}(\sin 5x) \cdot 5$

30. $f'(x) = 10(3x^7 - 8x^2)^9 \cdot (21x^6 - 16x)$

31. $f'(x) = 3\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2 \frac{1+x^2-(1+x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

32. $f'(x) = 2\text{tg}\, x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x$

33. $f'(x) = \frac{2-2\cos 2x}{2\sqrt{2x-\sin 2x}}$

34. $f'(x) = 10(5x^6 - 8x^2)^9 \cdot (30x^5 - 16x) \cdot \text{tg}\, \frac{1}{x} + (5x^6 - 8x^2)^{10} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})$

35. $f'(x) = \left(\cos \frac{2+3x}{1+x^2}\right) \cdot \frac{3(1+x^2)-(2+3x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

36. $f'(x) = \frac{-3x^2 \sin x^3 (2+\sin^4 x) - \cos x^3 \cdot 4 \sin^3 x \cos x}{(2+\sin^4 x)^2}$

37. $f'(x) = -\sin\left(\frac{2+x}{2^x}\right) \cdot \frac{2^x - (2+x)2^x \ln 2}{2^{2x}}$

38. $f'(x) = 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \cdot \cos x$

39. $f'(x) = 10^{\sin^2 x} \cdot \ln 10 \cdot 2 \sin x \cos x$

40. $f'(x) = 10^{\sin x^2} \cdot \ln 10 \cdot (\cos x^2) \cdot 2x$

41. $f'(x) = \frac{5 \cos 5x}{\sin 5x \cdot \ln 10}$

42. $f'(x) = \frac{1}{2}(\text{tg}\, x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x$

43. $f'(x) = e^{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

44. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{-(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$

45. $f'(x) = \text{ch}[x^3 + \ln(x+8)] \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{x+8}\right)$

46. $f'(x) = \frac{1}{1-(1-x^2)^2} \cdot (-2x)$

47. $f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+\text{sh}\, x}{1+thx}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{\text{ch}\, x(1+\text{th}\, x)-(1+\text{sh}\, x)\frac{1}{\text{ch}^2 x}}{(1+\text{th}\, x)^2}$

48. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

49. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

50. $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$

51. $f'(x) = e^{\text{arth}\, x^2} \cdot \frac{2x}{1-x^4}$

52. $f'(x) = 3e^{3x}\text{sh}\, 2x + 2e^{3x}\text{ch}\, 2x$

53. $f'(x) = \frac{1}{\text{tg}\, \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$

54. $f'(x) = e^2 \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{1+\lg(10-2^x)} - \text{arctg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{3}(1+\lg(10-2^x)^{-\frac{2}{3}}) \cdot \frac{-2^x \ln 2}{(10-2^x)\ln 10}}{(\sqrt[3]{1+\lg(10-2^x)})^2}$

55. $f'(x) = \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)} \cdot 5$

56. $f'(x) = (1+x)^{(1-x)} \left[-\ln(1+x) + \frac{1-x}{1+x}\right]$

57. $f'(x) = (\sin x)^x \left[\sin x + x\frac{\cos x}{\sin x}\right]$

58. $f'(x) = \sqrt[x]{1+x^2} \left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2}\right]$

59. $f'(x) = x^x(\ln x + 1) + (\sin x)^{\sin x} \left[\cos x \ln\sin x + \sin x\frac{\cos x}{\sin x}\right]$

60. $f'(x) = (\ln x)^{\lg x} \left[\frac{\ln\ln x}{x \ln 10} + \lg x\frac{1}{x \ln x}\right]$

61. $f'(x) = (1+x)(2+x)(3+x) + x(2+x)(3+x) + x(1+x)(3+x) + x(1+x)(2+x)$

5. fejezet

Érintő

1. Írja fel az $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó érintőjének egyenletét!

2. Írja fel az $f(x) = \text{tg}\,(\arccos x)$ függvény $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ helyhez tartozó érintőjének egyenletét!

3. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $y = \sin(\text{arctg}\,x)$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó érintőjére és átmegy az érintési ponton!

4. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $y = \frac{x}{1+x^2}$ függvény $x_0 = 2$ helyhez tartozó érintőjére és átmegy az A(6,3) ponton!

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $y = 2^{x^2+x+1}$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó érintőjére és átmegy az A(0,10) ponton!

6. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó érintőjére és átmegy az $A(-\sqrt{2}, 3)$ ponton!

7. Határozza meg az $y = x^2$ görbe azon pontjait, amelyhez húzott érintő párhuzamos az $y = 2x + 4$ egyenessel!

8. Határozza meg az $y = \frac{8}{x}$ görbe azon pontjait, amelyhez húzott érintő merőleges az $y = 2x + 3$ egyenesre!

9. Határozza meg az $y = -\frac{6}{\sqrt{x}}$ görbe azon pontjait, ahol az érintő 60^0 szöget zár be az x-tengely pozitív felével!

10. Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $x = 0$ és $x = \frac{1}{2}$ helyen!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \le 0, \\ \arcsin x, & \text{ha} \quad 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{6}, & \text{ha} \quad \frac{1}{2} < x. \end{cases}$$

11. Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $x = 0$ és $x = 1$ helyen!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \le 0, \\ \text{arctg}\, x, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases}$$

12. Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $x = 0$ és $x = 3$ helyen!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{ha} \quad x \le 0, \\ \sqrt{1+x}, & \text{ha} \quad 0 < x \le 3, \\ 2, & \text{ha} \quad 3 < x. \end{cases}$$

13. Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $x = 1$ és $x = 100$ helyen!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10\ln 10} + 1, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ \log_{10} 10x, & \text{ha} \quad 1 < x \le 100, \\ \frac{x-100}{100\ln 10} + 3, & \text{ha} \quad 100 < x. \end{cases}$$

Megoldások

1. $y = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $y = -2\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1$
3. $y = -\frac{4}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $y = \frac{25}{3}(x-6) + 3$
5. $y = -\frac{1}{40\ln 2}x + 10$

6. $y = -\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) + 3 = -\sqrt{2}x + 1$
7. $P(1;1)$
8. $P_1(4;2)$ és $P_2(-4;-2)$
9. $P(\sqrt[3]{3}; -6 \cdot 3^{-\frac{1}{6}})$

Útmutató a következő négy feladat megoldásához:
Vizsgálni kell, hogy az adott pontban a jobb és baloldali határérték megegyezik-e. Ha igen, akkor vizsgálni kell, hogy a jobb és bal oldali differenciálhányados megegyezik-e.

10. Az $x = 1$ helyen differenciálható, az $x = \frac{1}{2}$ helyen nem.
11. Az $x = 0$ helyen differenciálható, az $x = 1$ helyen nem.
12. Az $x = 0$ helyen differenciálható, az $x = 3$ helyen nem.
13. Az $x = 1$ és $x = 100$ helyen is differenciálható.

6. fejezet

Szélsőérték-feladatok

1. Osszuk fel 12-t két részre úgy, hogy a részek szorzata maximális legyen!
2. Osszuk fel 4-et két részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének összege maximális legyen!
3. Valamely körcikk területe 16 m^2. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
4. Valamely körcikk kerülete 4,8 m. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
5. Egy r sugarú körbe írható derékszögű négyszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?
6. Derékszögben hajló folyosón milyen hosszú gerendát lehet vízszintesen átvinni, ha a folyosók szélessége 4 m és 2,5 m?
7. Határozza meg az r sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
8. Határozza meg az r sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
9. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara R, magassága M. Határozza meg a kúpba írható legnagyobb térfogatú henger adatait!
10. Határozza meg az egy literes felül nyitott legkisebb felszínű henger adatait!
11. Egységnyi térfogatú négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkorák legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?
12. Az 1000 cm^2 felületű zárt egyenes körhengerek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

13. Az 1000 cm^2 felületű felül nyitott egyenes körhengerek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

14. Keressük meg az $y^2 = 8x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6, 0)$ ponttól a legkisebb távolságra van!

15. Egyenlő szélességű három deszkából csatornát készítünk. Az oldalfalak milyen hajlásszöge mellett lesz a csatorna keresztmetszete maximális?

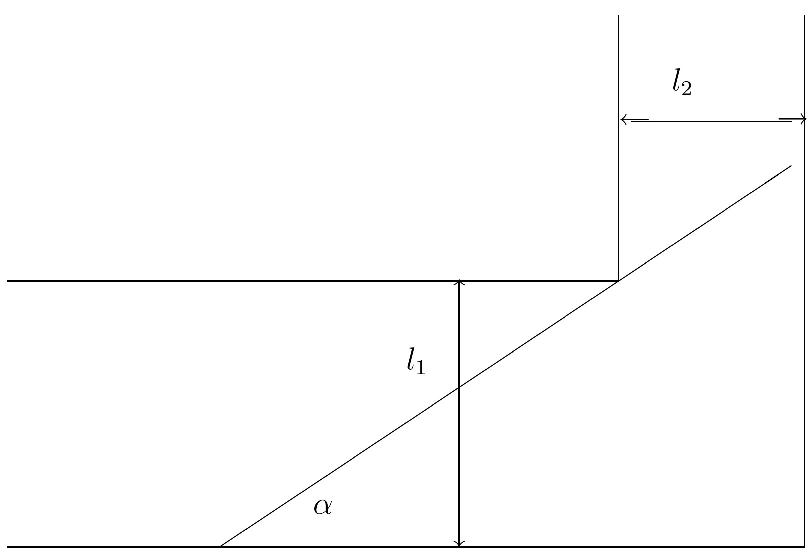
Eredmények

1. $x(12 - x) \to \max x = 6$.
2. $(4 - x)^2 + x^3 \to \max x = \frac{4}{3}$ másik rész $\frac{8}{3}$.
3. $R = 4$ m, ív$=$ 8 m.
4. $R = 1{,}2$ m.
5. Négyzet $a = \sqrt{2}r$.
6. tg $\alpha = \sqrt[3]{1,6} \approx 1,1696$ $l \approx 9{,}11$ m.
7. $M = \frac{2}{\sqrt{3}}r$ és alapkör sugara $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$.
8. Alapkör sugara $= \frac{r}{3}$, magasság $= \frac{4r}{3}$.
9. Alapkör sugara $= \frac{2R}{3}$, magasság $= \frac{1}{3}M$.
10. $r = m = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$
11. Alapél = $\sqrt[3]{2}$, magasság = $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.
12. Sugár = $\sqrt{\frac{500}{3\pi}}$, magasság = $2\sqrt{\frac{500}{3\pi}}$.
13. Sugár = magasság = $\sqrt{\frac{1000}{3\pi}}$.
14. $P(2; 4)$ és $P'(2; -4)$.
15. $\alpha = 60^0$.

Mintamegoldások

1. feladat
Jelölje x az egyik részt. Ekkor $12 - x$ a másik rész.
Feladat: $x(12 - x) \to$ max.
Ez megoldható elemi úton is, de a differenciálszámítás alkalmazhatóságát is demonstrálhatjuk ezen a feladaton. Ekkor az $y = 12x - x^2$ függvény maximumát keressük. Deriválva: $y' = 12 - 2x$. Ennek zérushelye $x = 6$. Itt lehet szélsőérték. A második derivált: $y" = -2$. Mivel ez negatív, ezért az $x = 6$ helyen maximuma van a függvénynek.

6. feladat
Az alábbi ábra fölülnézetből ábrázolja a folyosót. Az átvihető leghosszabb gerenda hossza megegyezik a rajz szerinti legrövidebb szelő hosszával.



6.1. ábra. Folyosó

Célszerű független változónak választani a gerenda és a fal által bezárt szöget. A szelő hossza az α szög függvényében:

$$l(\alpha) = \frac{l_1}{\sin\alpha} + \frac{l_2}{\cos\alpha}$$

Az $l(\alpha)$ függvény legkisebb értékét keressük. Deriválva kapjuk, hogy

$$l'(\alpha) = -\frac{l_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{l_2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Oldjuk meg az

$$l'(\alpha) = -\frac{l_1 \cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{l_2 \sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

egyenletet. Átrendezve adódik, hogy

$$\text{tg } \alpha = \sqrt[3]{\frac{l_1}{l_2}}.$$

Behelyettesítve a numerikus adatokat:

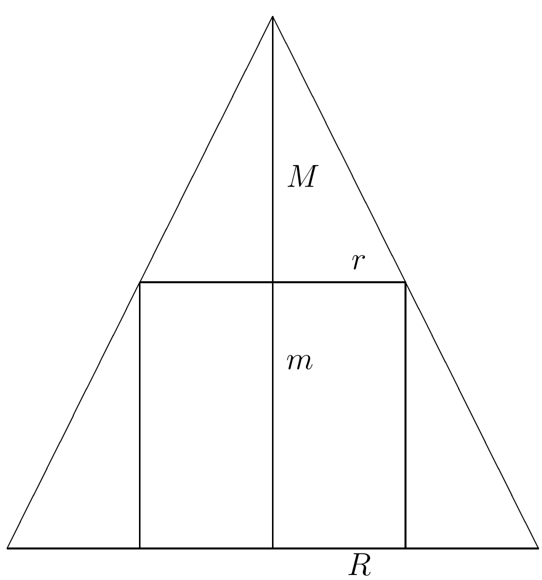
$$\text{tg } \alpha = \sqrt[3]{1,6}.$$

Mivel a második derivált

$$l"(\alpha) = l_1 \frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} + l_2 \frac{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}$$

pozitív, ezért az $l(\alpha)$ függvénynek valóban minimuma van a kapott helyen.

9. feladat
Jelölje r a keresett henger alapkörének sugarát és m a magasságát.



Feladat a henger $V = r^2\pi m$ térfogatának maximumát meghatározni azon feltétel mellett, hogy a henger benne van a kúpban, azaz a derékszögű háromszögek hasonlósága miatt fennáll

az
$$\frac{r}{M-m}=\frac{R}{M}$$
összefüggés. Ebből m-et kifejezve és beírva a térfogat képletbe a
$$V(r)=r^2\pi\left(M-r\frac{M}{R}\right)$$
függvényt kapjuk. Ennek r szerinti deriváltja:
$$V'(r)=2r\pi M-3r^2\pi\frac{R}{M}.$$
A
$$2r\pi M-3r^2\pi\frac{R}{M}=0$$
egyenlet zérustól különböző megoldása $r=\frac{2}{3}R$. Ezen a helyen a
$$V"=2\pi M-6r\pi\frac{M}{R}$$
negatív, ezért valóban a térfogat maximumhelyét találtuk meg. Ha $r=\frac{2}{3}R$, akkor $m=\frac{1}{3}M$.

14. feladat
Jelölje a parabola keresett pontjának koordinátáit $(x;y)$. Az $(x;y)$ pont távolsága a $(6;0)$ ponttól:
$$d=\sqrt{(x-6)^2+y^2}.$$
A távolság akkor lesz a legkisebb, ha a négyzete a legkisebb. Használjuk fel továbbá, hogy $y^2=8x$. Tehát a
$$d^2=(x-6)^2+8x$$
függvény minimumát kell meghatározni. A derivált: $2(x-6)+8=2x-4$. Ennek zérushelye $x=2$. Itt nyilvánvalóan minimum van. Tehát a parabola $(2;4)$, illetve $(2;-4)$ koordinátájú pontja van legközelebb a $(6;0)$ ponthoz és a távolság $d=4\sqrt{2}$.

7. fejezet

Függvényvizsgálat

Vizsgálja meg és ábrázolja az alábbi függvényeket!

1. $f(x) = \frac{5x^2-10x+5}{x^2+1}$
2. $f(x) = (x-2)^2(x-3)^2$
3. $f(x) = x(x-5)^2$
4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
5. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
6. $f(x) = x^3 + \frac{1}{5x}$
7. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$
8. $f(x) = \frac{x^2-x+9}{x^2+x+9}$
9. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$
10. $f(x) = \frac{x^2-3x-19}{5(x+4)}$
11. $f(x) = \sin^3 x$
12. $f(x) = x + \sin x$
13. $f(x) = x + \text{arctg}\, x$
14. $f(x) = \sin x + \cos 2x$

15. $f(x) = e^{-x^2}$

16. $f(x) = e^x \cos x$

17. $f(x) = x^2 \ln x$

18. $f(x) = \ln \sin x$

19. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{10 - x}$

20. $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + 8x + 1$

21. $f(x) = -\sqrt{10x - x^2}$

Megoldások

1. $f(x) = \frac{5x^2-10x+5}{x^2+1}$
Mintamegoldás:

(a) Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$.
A függvényünk nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

(b) Zérushelyek: $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x_{1,2} = 1$.

(c) Aszimptotikus vizsgálat: A függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben ugyanoda tart,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 - 10x + 5}{x^2 + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{10}{x}\nearrow^0 + \frac{5}{x^2}\nearrow^0\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\searrow_0\right)} = 5.$$

$y = 5$ vízszintes aszimptota $\pm\infty$-ben.
Függőleges aszimptotánk nincsen.

(d) Elsőrendű derivált és alkalmazásai (szigorúan monoton ívek, lokális szélsőértékek)

$$f'(x) = \frac{(10x - 10)(x^2 + 1) - (5x^2 - 10x + 5) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 10 \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$f'(x) = 0 \iff x_{1,2} = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	
$f(x)$		$\nearrow$	10 lokális maximum	$\searrow$	0 lokális minimum	$\nearrow$	

(e) Másodrendű derivált és alkalmazásai (konvex-, konkáv ívek és inflexiós pontok): Kiszámoljuk a másodrendű deriváltat:

$$f''(x) = \left[10 \cdot \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right]' = 10 \cdot \frac{2x(x^2+1)^2 - (x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= 10 \cdot \frac{2x(x^2+1)[x^2+1-(x^2-1)\cdot 2]}{(x^2+1)(x^2+1)^3} = \frac{20x\cdot(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

A másodrendű derivált zérushelyei: $x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

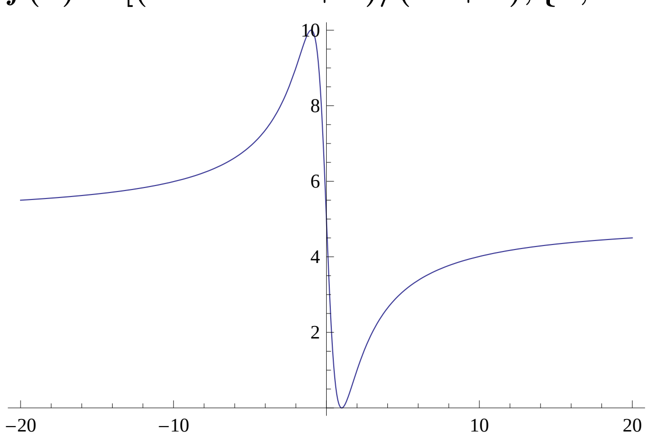
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$3-x^2$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	
$f''(x)$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	0	$---$	
$f(x)$		$\smile$ konvex	$\frac{10+5\sqrt{3}}{2}$ inflexiós pont	$\frown$ konkáv	5 inflexiós pont	$\smile$ konvex	$\frac{10-5\sqrt{3}}{2}$ inflexiós pont	$\frown$ konkáv	

(f) értékkészlet: $R_f = [0;10]$.

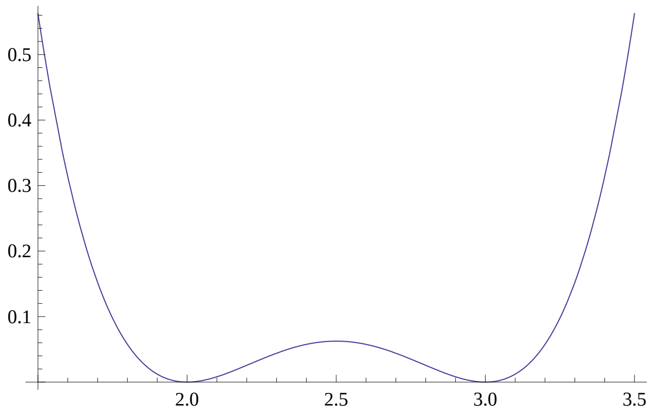
Megjegyzés

Kicsit leegyszerűsíthetjük a megoldást, ha még az elején figyelembe vesszük, hogy $f(x) = 5 - \frac{10x}{x^2+1}$.

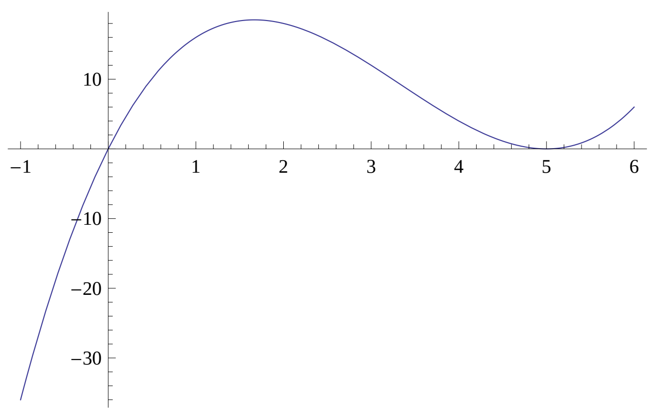
$\boldsymbol{f(x) = }[\boldsymbol{(5x^2 - 10x + 5)/(x^2+1), \{x, -20, 20\}}]$



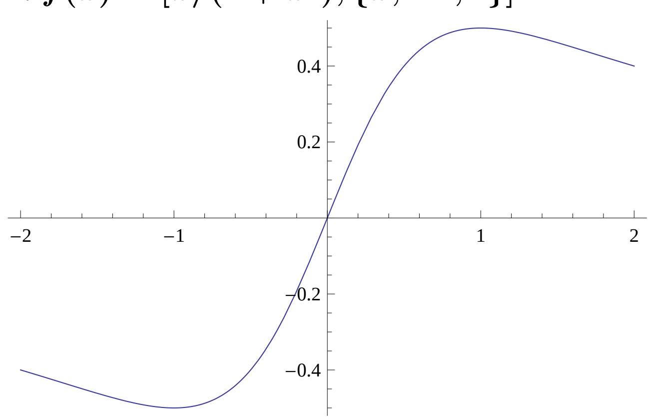
2. $\boldsymbol{f(x) = [(x-2)^2(x-3)^2, \{x, 1.5, 3.5\}]}$



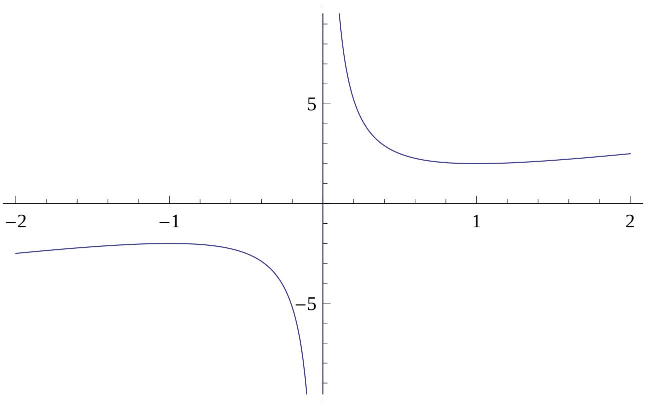
3. $\boldsymbol{f(x) = [x(x-5)^2, \{x, -1, 6\}]}$



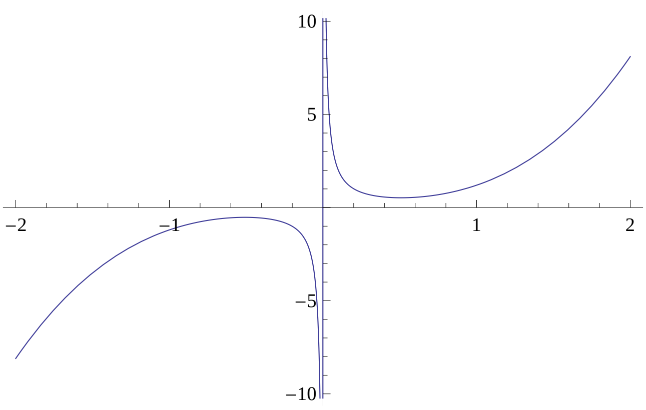
4. $\boldsymbol{f(x) = [x/(1+x^2), \{x, -2, 2\}]}$



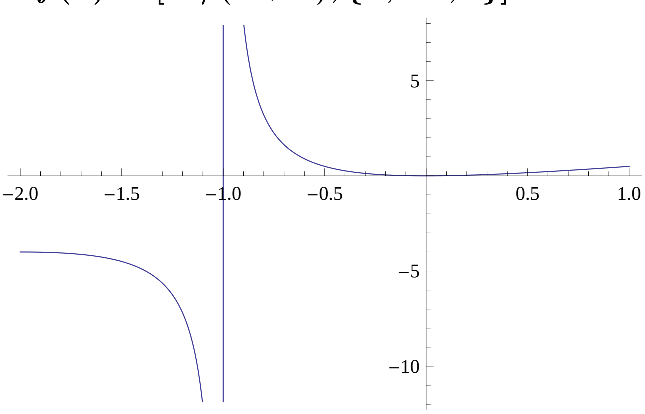
5. $\boldsymbol{f(x) = [x + 1/x, \{x, -2, 2\}]}$



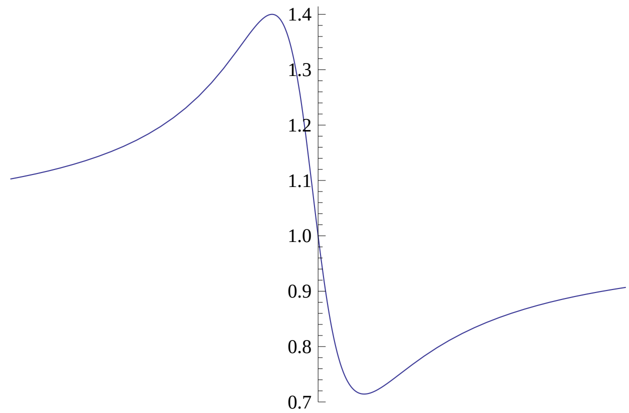
6. $\boldsymbol{f(x) = [x^3 + 1/(5x), \{x, -2, 2\}]}$



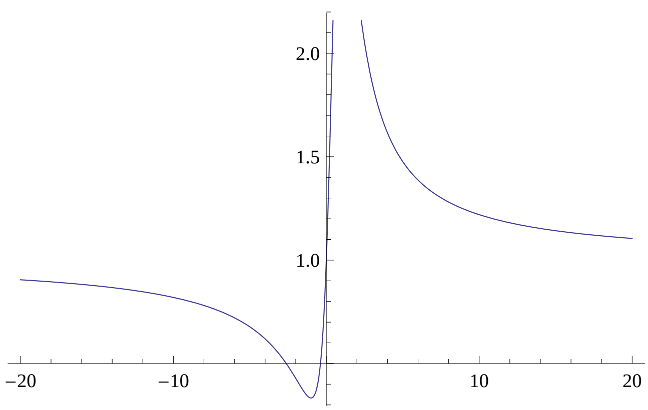
7. $\boldsymbol{f(x) = [x^2/(1 + x), \{x, -2, 1\}]}$



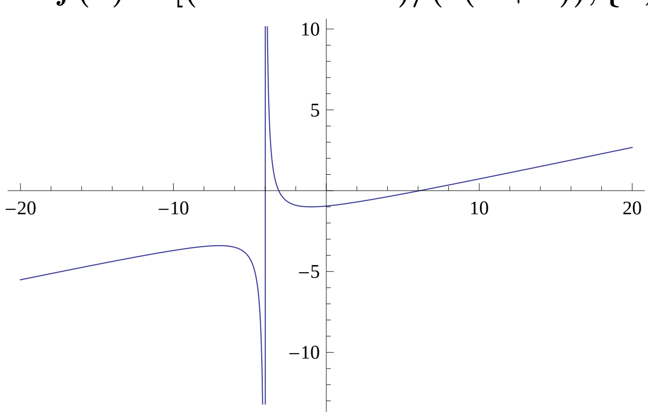
8. $\boldsymbol{f(x) = [(x^2 - x + 9)/(x^2 + x + 9), \{x, -20, 20\}}]$



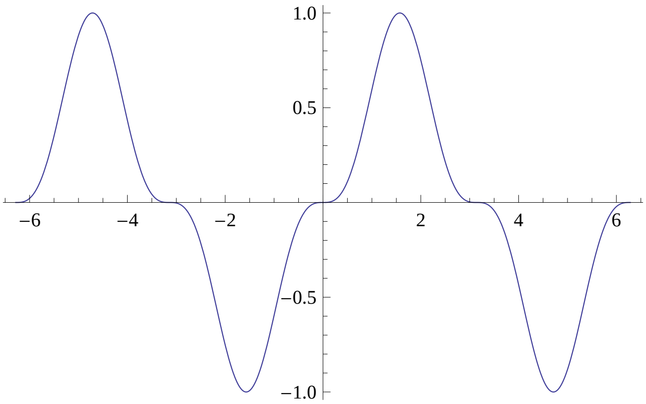
9. $\boldsymbol{f(x) = [(x^2 + x + 1)/(x^2 - x + 1), \{x, -20, 20\}}]$



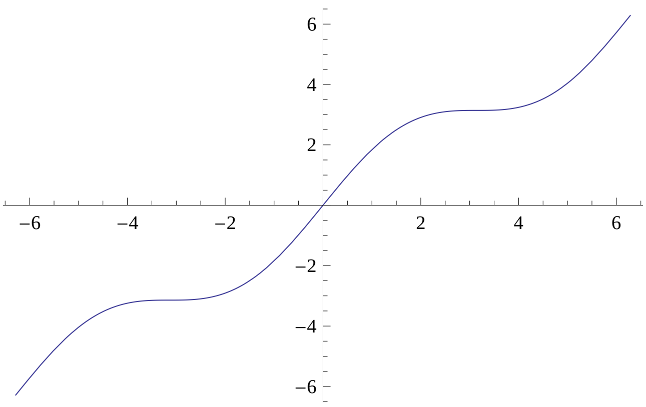
10. $\boldsymbol{f(x) = [(x^2 - 3x - 19)/(5(x + 4)), \{x, -20, 20\}}]$



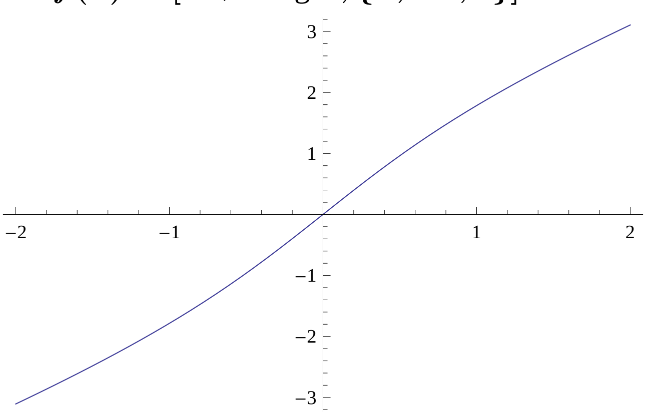
11. $\boldsymbol{f(x) = [(\sin x)^3, \{x, -2\pi, 2\pi\}]}$



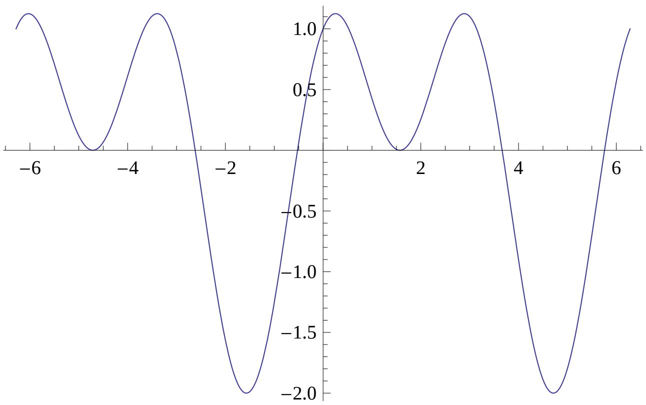
12. $\boldsymbol{f(x) = [x + \sin x, \{x, -2\pi, 2\pi\}]}$



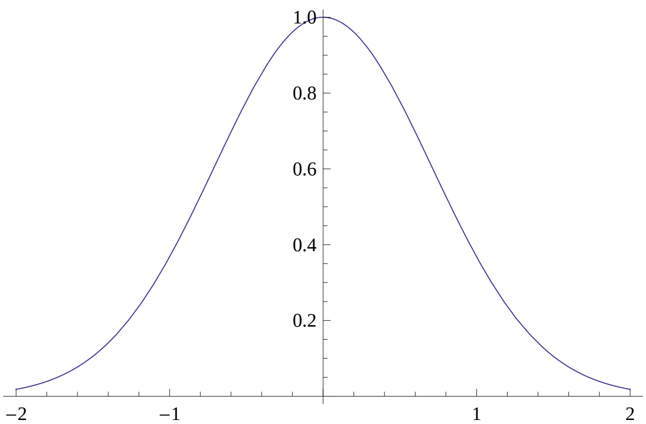
13. $\boldsymbol{f(x) = [x + \mathrm{arctg}\, x, \{x, -2, 2\}]}$



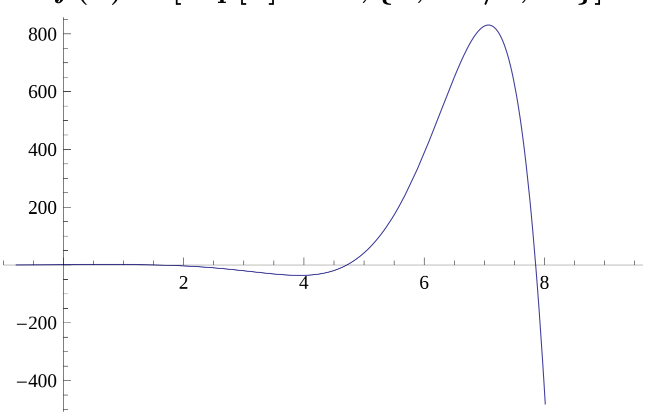
14. $f(x) = \sin x + \cos 2x, [\{x, -2\pi, 2\pi\}]$



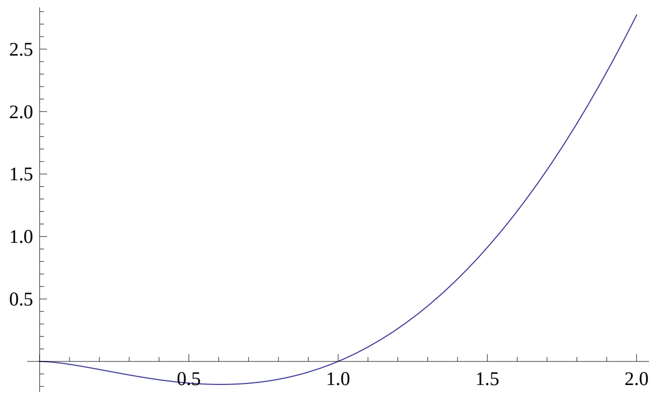
15. $f(x) = [\exp[-x^2], \{x, -2, 2\}]$



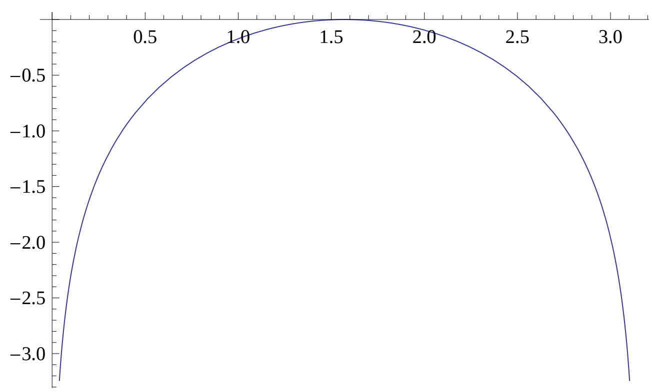
16. $f(x) = [\exp[x] \cos x, \{x, -\pi/4, 3\pi\}]$



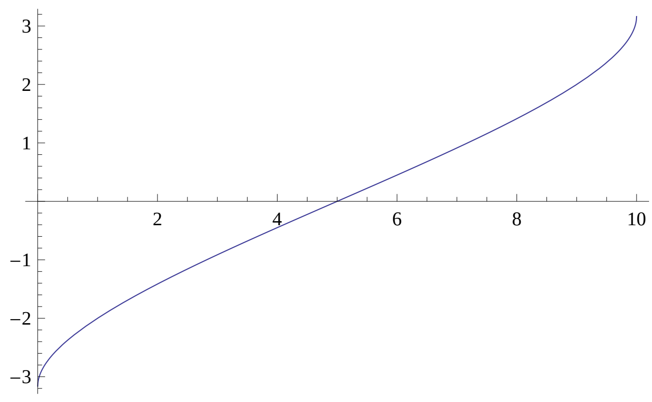
17. $f(x) = [x^2 \ln x, \{x, 0, 2\}]$



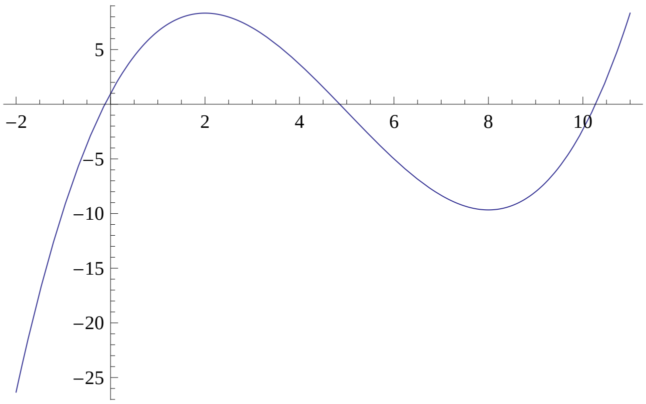
18. $f(x) = [\ln \sin x, \{x, 0, \pi\}]$



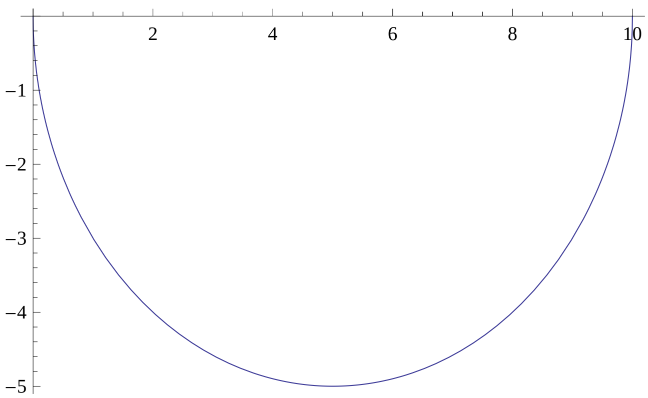
19. $f(x) = [\sqrt{x} - \sqrt{10 - x}, \{x, 0, 10\}]$



20. $f(x) = [x^3/6 - 5x^2/2 + 8x + 1, \{x, -2, 11\}]$



21. $f(x) = [-\sqrt{10x - x^2}, \{x, 0, 10\}]$



8. fejezet

Határozatlan integrál, az integrálás technikája

1. $\int x^2(x^2-1)dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2}$
3. $\int \frac{\sqrt{x}-x+x^2}{x^2}dx$
4. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$
5. $\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}dx$
6. $\int(2x+3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+1})dx$
7. $\int \frac{3}{2x+5}dx$
8. $\int \frac{3x+10}{2x+5}dx$
9. $\int \frac{3}{2x^2+5}dx$
10. $\int \frac{3x}{2x^2+5}dx$
11. $\int \frac{3x+10}{2x^2+5}dx$
12. $\int \frac{3x^2}{2x+5}dx$
13. $\int \frac{3x^2}{2x^2+5}dx$
14. $\int \frac{3}{\sqrt{2x+5}}dx$
15. $\int \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}dx$
16. $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+5}}dx$
17. $\int(x^5+5^x)dx$

18. $\int(\sqrt[5]{x}+e^{5x})dx$
19. $\int(4\sin x-3\cos x)dx$
20. $\int \text{tg}\, x dx$
21. $\int \text{tg}^2 x dx$
22. $\int \sin^2 x dx$
23. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$
24. $\int \frac{1}{\text{sh}\, x+\text{ch}\, x}dx$
25. $\int \frac{e^{3x}}{\text{sh}\, x+\text{ch}\, x}dx$
26. $\int \frac{e^x}{e^x+11}dx$
27. $\int \frac{\cos 3x}{8+\sin 3x}dx$
28. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
29. $\int x\sqrt{x^2+1}dx$
30. $\int \frac{dx}{x(\ln x+1848)}$
31. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$
32. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$
33. $\int \sqrt[3]{\cos^7 x}\cdot \sin x dx$
34. $\int e^{-x}dx$
35. $\int \frac{dx}{5^{(3x-2)}}dx$
36. $\int e^{\sin x}\cos x dx$
37. $\int x\sqrt{25+x^2}dx$
38. $\int \frac{14}{(6-4x)^7}dx$
39. $\int \frac{\ln x}{x}dx$
40. $\int x\sin 3x dx$
41. $\int x\sin x\cos x dx$
42. $\int(x^2-1)\sin x dx$
43. $\int \ln x dx$
44. $\int \ln^2 x dx$
45. $\int x^2\ln x dx$
46. $\int x^3 e^{-x^2}dx$

47. $\int \operatorname{arctg} x dx$
48. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$
49. $\int e^{3x} \sin 2x dx$
50. $\int e^{5x} \cos 3x dx$
51. $\int \arccos \frac{x}{3} dx$
52. $\int \frac{1}{x+3} dx$
53. $\int \frac{1}{x^2+6x+9} dx$
54. $\int \frac{1}{(x+3)^{10}} dx$
55. $\int \frac{1}{x^2+6x+25} dx$
56. $\int \frac{1}{x^2+6x+5} dx$
57. $\int \frac{1}{x^2-7x+12} dx$
58. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx$
59. $\int \frac{x^2-6x+10}{x^2-7x+12} dx$
60. $\int \frac{1}{x^2+12} dx$
61. $\int \frac{1}{x^2-12} dx$
62. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$
63. $\int \frac{x^4}{x^2+x-2} dx$
64. $\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} dx$
65. $\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} dx$
66. $\int \frac{5}{x(x^2+4)} dx$
67. $\int \frac{2x^2}{x^4-1} dx$
68. $\int \frac{1}{x^4-81} dx$
69. $\int \frac{4}{e^{2x}-4} dx$
70. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$
71. $\int \frac{e^x}{e^{-x}+2} dx$
72. $\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}} dx$
73. $\int x \cdot \sqrt[4]{5x+3} dx$
74. $\int \sqrt{1-x^2} dx$

75. $\int \sqrt{x^2-1}dx$
76. $\int \sqrt{x^2+1}dx$
77. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$
78. $\int \frac{6x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
79. $\int \frac{6x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
80. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$
81. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx$
82. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Néhány mintafeladat megoldása

Fontosabb helyettesítések:

a) $\displaystyle\int R\left(e^x, e^{2x}, \ldots\right) dx$ (R racionális törtfüggvény) alak esetén $t = e^x$ helyettesítés, ahonnan $x = \ln t$; $dx = \frac{1}{t} \cdot dt$.

Például:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = \int \left[1 - \frac{1}{t+1}\right] dt =$$
$$= t - \ln|t+1| + c = e^x - \ln\left(e^x+1\right) + c$$

$$\begin{aligned} e^x &= t \\ x &= \ln t \\ dx &= \frac{1}{t}dt \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ típusú integrál esetében $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítés.

Például:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}\,dx = \int \frac{\frac{t^2-4}{3}}{t}\,\frac{t}{3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int \left(t^2-4\right)\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}-4t\right]+c = \frac{1}{9}\left[\frac{\sqrt{(6x+4)^3}}{3}-4\sqrt{6x+4}\right]+c$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6x+4} &= t \\ 6x+4 &= t^2 \\ x &= \frac{t^2-4}{6} \\ dx &= \frac{1}{6}\cdot 2t\,dt = \frac{t}{3}\,dt \end{aligned}$$

c) $\int \left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx$ típusú integrál esetén $x = a\cdot \operatorname{sh} t$ helyettesítés ($dx = a\cdot \operatorname{ch} t\, dt$).

Ilyenkor használjuk még a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ képletet, valamint

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\operatorname{arch} x) &= \sqrt{x^2-1} \\ \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) &= \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

képleteket, melyek a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ és $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ képletek megfelelői a hiperbolikus függvényeknél.

$\int \left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$ típusú integrál esetében $x = a\cdot \operatorname{ch} t$ helyettesítés ($dx = a\cdot \operatorname{sh} t\, dt$).

$\int \left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$ típusú integrál esetén pedig $x = a\cdot \sin t$ vagy $x = a\cdot \cos t$ helyettesítések bármelyike alkalmazható (ekkor $dx = a\cdot \cos t\, dt$ vagy a második helyettesítés esetén $dx = -a\cdot \sin t\, dt$).

Például:

$$\int \sqrt{x^2-16}dx = \int \sqrt{16\left(\operatorname{ch}^2 t - 1\right)}\cdot 4\operatorname{sh} t\, dt =$$

$$= 16\int \mathrm{sh}^2 t\, dt = 16\int \frac{-1+\mathrm{ch}\, 2t}{2}\, dt = -8t + 8\int \mathrm{ch}\, 2t\, dt =$$
$$= -8t + \frac{8}{2}\mathrm{sh}2t + c = -8\mathrm{arch}\frac{x}{4} + 4\cdot 2\cdot \mathrm{sh}\left(\mathrm{arch}\frac{x}{4}\right)\mathrm{ch}\left(\mathrm{arch}\frac{x}{4}\right) + c =$$
$$= -8\mathrm{arch}\frac{x}{4} + 8\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1}\frac{x}{4} + c == -8\mathrm{arch}\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-16} + c$$

$$\begin{aligned} x &= 4\mathrm{ch}\, t \\ dx &= 4\mathrm{sh}\, t\, dt \\ t &= \mathrm{arch}\frac{x}{4} \end{aligned}$$

Használtuk itt a $\mathrm{sh}^2 t = \frac{-1+\mathrm{ch}\, 2t}{2}$ linearizálás-képletet, melynek a párja: $\mathrm{ch}^2 t = \frac{1+\mathrm{ch}\, 2t}{2}$ és a $\mathrm{sh}\, 2t = 2\cdot \mathrm{sh}\, t\cdot \mathrm{ch}\, t$ képletet.

Feladat. Számítsuk ki az $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-81}$ értékét!

Megoldás:

$$\frac{1}{x^4-81} = \frac{1}{(x^2-9)(x^2+9)} = \frac{1}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+9} =$$
$$= \frac{A(x+3)(x^2+9) + B(x-3)(x^2+9) + (Cx+D)(x-3)(x+3)}{x^4-81}.$$

x csökkenő hatványai szerint rendezve a számlálót kapjuk, hogy

$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (3A-3B+D)x^2 + (9A+9B-9C)x + 27A - 27B - 9D}{x^4-81},$$

ahonnan a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0, \\ 3A-3B+D &= 0, \\ 9A+9B-9C &= 0, \\ 27A-27B-9D &= 1. \end{aligned}$$

Az első és harmadik egyenletből kapjuk, hogy $C=0$, majd ezt mindegyik egyenletbe behelyettesítve és megoldva a három egyenletből álló három ismeretlenes egyenletrendszert (két egyenlet ugyanaz lesz) kapjuk, hogy $A = \frac{1}{108}$, $B = -\frac{1}{108}$, $D = -\frac{1}{18}$. Ezért az elemi törtekre bontás a következőhöz vezet:

$$\int \frac{dx}{x^4-81} = \int \left[\frac{1}{108}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{108}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{x^2+9}\right] dx =$$
$$= \frac{1}{108}\cdot \ln|x-3| - \frac{1}{108}\cdot\ln|x+3| - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + c,$$

mert $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{3}{9}\int \frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + c.$

Gyakorló feladatok megoldásai

1. $-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$
2. $-\frac{1}{x}$
3. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + x - \ln x$
4. $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln x + \frac{1}{x}$
5. $\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln(x-2)$
6. $x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}$
7. $\frac{3}{2}\ln(2x+5)$
8. $\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\ln(2x+5)$
9. $\sqrt{\frac{9}{10}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)$
10. $\frac{3}{4}\ln(2x^2+5)$
11. $\sqrt{10}\mathrm{arctg}\left[\sqrt{\frac{2}{5}}x\right] + \frac{3}{4}\mathrm{Log}\left[5+2x^2\right]$
12. $\frac{3}{16}\left(-75 - 20x + 4x^2 + 50\mathrm{Log}[5+2x]\right)$
13. $3\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{arctg}\left[\sqrt{\frac{2}{5}}x\right]\right)$
14. $3\sqrt{5+2x}$
15. $(-5+x)\sqrt{5+2x}$
16. $\frac{3}{2}\sqrt{5+2x^2}$
17. $\frac{x^6}{6} + \frac{5^x}{\mathrm{Log}[5]}$
18. $\left\{\frac{e^{5x}}{5} + \frac{5x^{6/5}}{6}\right\}$

19. $-4\cos x - 3\sin x$
20. $-\ln\cos x$
21. $-x + \text{tg } x$
22. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$
23. $\cos x + \sin x$
24. $-\text{ch } x + \text{sh } x$
25. $\frac{e^{2x}}{2}$
26. $\ln\left[-11 - e^{x}\right]$
27. $\frac{1}{3}\ln[8 + \sin 3x]$
28. $\sqrt{1+x^2}$
29. $\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$
30. $\ln[1848 + \ln x]$
31. $2\sqrt{\sin x}$
32. $\frac{2}{3}[\ln x]^{3/2}$
33. $\left\{-\frac{3}{10}[\cos x]^{10/3}\right\}$
34. $-e^{-x}$
35. $\left\{-\frac{5^{2-3x}}{3\ln 5}\right\}$
36. $e^{\sin x}$
37. $\frac{1}{3}\left(25+x^2\right)^{3/2}$
38. $\frac{7}{12(6-4x)^6}$
39. $\frac{[\ln x]^2}{2}$
40. $-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x$
41. $-\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$
42. $\cos x - \left(-2+x^2\right)\cos x + 2x\sin x$
43. $-x + x\ln x$
44. $2x - 2x\ln x + x\ln x^2$
45. $-\frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}x^3\ln x$
46. $\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(-1-x^2\right)$
47. $x\text{arctg } x - \frac{1}{2}\ln\left[1+x^2\right]$
48. $-\frac{x}{2} + \frac{\text{arctg } x}{2} + \frac{1}{2}x^2\text{arctg } x$

49. $\frac{1}{13}e^{3x}(-2\cos[2x]+3\sin[2x])$
50. $\frac{1}{34}e^{5x}(5\cos[3x]+3\sin[3x])$
51. $-\sqrt{9-x^2}+x\arccos\left[\frac{x}{3}\right]$
52. $\ln[3+x]$
53. $-\frac{1}{3+x}$
54. $\left\{-\frac{1}{9(3+x)^9}\right\}$
55. $\frac{1}{4}\text{arctg}\left[\frac{3+x}{4}\right]$
56. $\frac{1}{4}\ln[-1-x]-\frac{1}{4}\ln[5+x]$
57. $\ln[-2(-4+x)]-\ln[2(-3+x)]$
58. $2\ln[-3(-4+x)]-\ln[3(-3+x)]$
59. $x+2\ln[-3(-4+x)]-\ln[3(-3+x)]$
60. $\frac{\text{arctg}\left[\frac{x}{2\sqrt{3}}\right]}{2\sqrt{3}}$
61. $\frac{\ln\left[2\sqrt{3}-x\right]-\ln\left[2\sqrt{3}+x\right]}{4\sqrt{3}}$
62. $4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+5\ln[-8(-2+x)]+2\ln x-3\ln[8(2+x)]$
63. $3x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln[-17(-1+x)]-\frac{16}{3}\ln[17(2+x)]$
64. $\frac{1}{(2+x)^2}+\frac{8}{2+x}+3\ln[2+x]$
65. $-\frac{6}{-3+x}-\frac{1}{2}\ln[-3+x]+\frac{1}{2}\ln[-1+x]$
66. $5\left(\frac{\ln x}{4}-\frac{1}{8}\ln\left[4+x^2\right]\right)$
67. $2\left(\frac{\text{arctg}\,x}{2}+\frac{1}{4}\ln[-1+x]-\frac{1}{4}\ln[1+x]\right)$
68. $\frac{1}{54}\text{arctg}\left[\frac{3}{x}\right]+\frac{1}{108}\ln[-3+x]-\frac{1}{108}\ln[3+x]$
69. $4\left(-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln\left[4-e^{2x}\right]\right)$
70. $e^x-\ln\left[1+e^x\right]$
71. $\frac{1}{4}\left(2e^x-\ln\left[1+2e^x\right]\right)$
72. $\frac{2}{27}(-4+3x)\sqrt{4+6x}$
73. $\left\{\frac{4(3+5x)^{5/4}(-12+25x)}{1125}\right\}$
74. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$
75. $\frac{1}{2}x\sqrt{-1+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left[2\left(x+\sqrt{-1+x^2}\right)\right]$

76. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\text{arsh}\,x\right)$
77. $-\frac{1}{15}\left(1-x^2\right)^{3/2}\left(2+3x^2\right)$
78. $-6\sqrt{1-x^2}$
79. $6\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin x}{2}\right)$
80. $2\text{arctg}\left[\sqrt{x}\right]$
81. $\left\{-3(1+x)^{1/3}+\frac{3}{2}(1+x)^{2/3}+3\ln\left[1+(1+x)^{1/3}\right]\right\}$
82. $\frac{(\arcsin x)^2}{2}$

9. fejezet

Az integrálás alkalmazásai. Terület

1. Határozza meg az $y = \frac{1}{1-x^2}$ függvény görbéje és az x-tengely közötti területet a) a $[0; 0{,}6]$ intervallum fölött; b) az $[1{,}2; 7]$ intervallum fölött.
2. Határozza meg az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbéje és az x-tengely közötti területet a [2; 3] intervallum fölött.
3. Határozza meg az $y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ parabola és az $y = -x + 3$ egyenes által határolt síkrész területét.
4. Határozza meg az $y^2 = x$ és az $y = x^2$ görbék által határolt síkrész területét.
5. Válassza meg az $\alpha > 0$ számot úgy, hogy az $y = \alpha \cdot x \cdot \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$ görbe alatti terület 10 legyen!
6. Számítsa ki az $x^2 + y^2 = r^2$ kör területét. Oldja meg a feladatot paraméteres alakban is, majd határozza meg a területet, mint szektor területet is.
7. Határozza meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területét. Oldja meg a feladatot paraméteres alakban is, majd határozza meg a területet, mint szektor területet is.
8. Határozza meg az $x = t^2$, $y = t^3$ görbe és az x-tengely által határolt területet az $1 \leq t \leq 3$ paramétertartomány esetén.
9. Határozza meg az $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ egyenletű ciklois egy íve és az x-tengely által határolt területet.
10. Határozza meg az $x = 5\cos^3 t$, $y = 5\sin^3 t$ egyenletű asztois területét. Oldja meg a feladatot a szektorterület integrálképlete alapján is.
11. Határozza meg a $\rho = a\sqrt{\cos 2\phi}$ egyenletű lemniszkáta $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ polárszögtartomány által kijelölt darabjának területét.
12. Határozza meg a $\rho = 2(1 + \cos \phi)$ egyenletű kardioid $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ polárszögtartomány által kijelölt szektorának területét.

Megoldások

1. a) $T = \ln 2$; b) $T = \ln\sqrt{12}$.
2. $T = \ln\frac{3}{2}$.
3. $\int_1^3 \{(-x+3)-[2-\sqrt{2x-2}]\}dx = \frac{2}{3}$ vagy $\int_0^2 [(3-y)-\frac{1}{2}(y^2-4y+6)]dy = \frac{2}{3}$.
4. $T = \frac{1}{3}$.
5. **Mintamegoldás.** Ha $1 \leqslant x \leqslant e$ és $\alpha > 0$, akkor az $y = \alpha \cdot x \cdot \ln x$ pozitív értékű, ezért 1 és e között a görbe alatti terület $T = \displaystyle\int_1^e \alpha \cdot x \cdot \ln x \, dx = 10$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$(\text{polinom} \cdot \ln \Rightarrow \text{ parciális integrálás})$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c$$

$$\int_1^e \alpha \cdot x \cdot \ln x \, dx = \alpha \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \alpha \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \alpha\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \alpha\frac{e^2+1}{4}$$

$$\alpha\frac{e^2+1}{4} = 10 \Longrightarrow \alpha = \frac{40}{e^2+1}$$

6. $T = r^2\pi$
7. $T = ab\pi$
8. $T = \frac{484}{5}$
9. $T = 48\pi$
10. $T = \frac{15\pi}{8}$
11. $T = \frac{a^2}{2}$
12. $T = \frac{3\pi+8\sqrt{2}+2}{4}$

10. fejezet

Az integrálás alkalmazásai. Térfogat

1. Határozza meg az $y = x^2$ parabola x-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha az ív két végpontjának abszciszája 0 és 4.

2. Határozza meg az $y = x^2$ parabola y-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha az ív két végpontjának ordinátája 0 és 4.

3. Határozza meg az $y = \ln x$ görbe x-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha az ív két végpontjának abszciszája 1 és 5.

4. Határozza meg az $y = \ln x$ görbe y-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha az ív két végpontjának ordinátája 0 és 4.

5. Határozza meg az R sugarú gömb térfogatát. Oldja meg a feladatot paraméteres alakban is.

6. Határozza meg az $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ ciklois egy ívének x-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát.

7. Határozza meg az $x = 5\cos^3 t, \quad y = 5\sin^3 t$ asztrois $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ívének x-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát.

8. Határozza meg a $\rho = 2(1 + \cos\phi)$ egyenletű kardioid polártengelykörüli forgatásával keletkező test térfogatát.

9. Határozza meg a $\rho = 2a\cos\phi$ egyenletű görbe polártengelykörüli forgatásával keletkező test térfogatát.

Megoldások

1. $V = \frac{512}{5}\pi$
2. $V = 8\pi$
3. $V = (5\ln^2 5 - 10\ln 5 + 8)\pi$
4. $V = \frac{\pi}{2}(e^8 - 1)$
5. $V = \frac{4}{3}R^3\pi$
6. $V = 5a^3\pi^2$
7. $V = \frac{400\pi}{21}$
8. $V = \frac{5}{4}a^3\pi^2$
9. $V = 2a^3\pi^2$

11. fejezet

Az integrálás alkalmazásai. Felszín

1. Határozza meg az $y = 2\sqrt{x}$ parabola x-tengely körüli forgatásával keletkező test felszínét, ha az ív két végpontjának abszciszája 0 és 8.

2. Határozza meg az $y = \frac{x^2}{2}$ parabola x-tengely körüli forgatásával keletkező test felszínét, ha az ív két végpontjának abszciszája 0 és 4.

3. Határozza meg az $y = 3x^3$ görbe x-tengely körüli forgatásával keletkező test felszínét, ha az ív két végpontjának abszciszája 0 és 5.

4. Határozza meg az $y = \ln x$ görbe y-tengely körüli forgatásával keletkező test felszínét, ha az ív két végpontjának ordinátája 1 és 5.

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 = r^2$ kör x-tengely körüli forgatásával keletkező gömb felszínét. Oldja meg a feladatot paraméteres alakban is.

6. Határozza meg az $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ ciklois egy ívének x-tengely körüli forgatásával keletkező test felszínét.

7. Határozza meg az $x = 5\cos^3 t, \quad y = 5\sin^3 t$ asztrois $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ívének x-tengely körüli forgatásával keletkező test felszínét.

Megoldások

1. $F = \frac{208}{3}\pi$

2. $F = \frac{\pi}{8}\left(132\sqrt{17} - \text{arsh}\, 4\right)$

3. $F = \frac{\pi}{81}\left[(1+81\cdot 5^4)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$
4. $F = \pi\left(e^5\sqrt{1+e^{10}} + \operatorname{arsh} e^5 - \sqrt{2} - \operatorname{arsh} 1\right)$
5. $F = 4r^2\pi$
6. $F = \frac{64a^2\pi}{3}$
7. $F = 30\pi$

12. fejezet

Az integrálás alkalmazásai. Ívhossz

Határozza meg az alábbi függvények megadott darabjának ívhosszát!

1. $y = x^2 \qquad 1 \le x \le 4$
2. $y = \operatorname{ch} x \qquad 0 \le x \le 4$
3. $y = \ln x \qquad 1 \le x \le 4$
4. $y = \ln \sin x \qquad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$
5. $y = \sqrt{16 - x^2} \qquad 0 \le x \le 4$
6. $x = 5 \cos t \quad y = 5 \sin t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
7. $x = 4(t - \sin t) \quad y = 4(1 - \cos t) \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
8. $x = 5 \cos^3 t \quad y = 5 \sin^3 t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$
9. $x = 2t \quad y = 3t^2 \qquad 2 \le t \le 5$
10. $\rho = a\phi \qquad 0 \le \phi \le 1$
11. $\rho = 2(1 + \cos \phi) \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

Megoldások

1. $L = \frac{1}{4}[8\sqrt{65} - 2\sqrt{5} + \operatorname{arsh} 8 - \operatorname{arsh} 2]$
2. $L = \operatorname{sh} 4$

3. $L = \frac{1}{2}e^4 + e^{-4} - e - e^{-1} - 2[\ln(e^4+1) - \ln(e^4-1) + \ln(e-1) - \ln(e+1)]$
4. $L = -\ln \mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$
5. $L = 2\pi$
6. $L = \frac{5}{2}\pi$
7. $L = 16 - 8\sqrt{2}$
8. $L = \frac{45}{8}$
9. $L = \frac{1}{3}[15\sqrt{226} - 6\sqrt{37} + \mathrm{arsh}\, 15 - \mathrm{arsh}\, 6]$
10. $L = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + \mathrm{arsh}\, 1)$
11. $L = 8 - 4\sqrt{2}$

13. fejezet

Az integrálás alkalmazásai. Súlypont

1. Mutassa meg az integrálszámítás alkalmazásával, hogy a $[-a;\ a]$ intervallum fölött az $y = M - \frac{M}{a}|x|$ függvény grafikonjával határolt egyenlőszárú háromszög súlypontja $\mathrm{S}(0;\ \frac{M}{3})$, ha a háromszöglemez egyenletes tömegeloszlású és M, valamint a pozitív paraméterek!

2. Határozza meg a $[-R;\ R]$ intervallum és az $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ görbe által határolt egyenletes tömegeloszlású félkör súlypontjának koordinátáit!

3. Határozza meg a $[-3;\ 3]$ intervallum és az $y = 9 - x^2$ görbe által határolt egyenletes tömegeloszlású síklemez súlypontjának koordinátáit!

4. Határozza meg a $y = \sqrt{x}$ görbe, a $0 \leq x \leq 25$ intervallum, és az $x = 25$ egyenes által határolt homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!

5. Határozza meg a $y = e^x$ görbe, a $0 \leq x \leq a$ intervallum, és az $x = a$ egyenes által határolt homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!

6. Határozza meg a $y = \cos x$ függvény $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ intervallum, és az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenes által határolt homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!

7. Határozza meg a $y = \sin x$ függvény és a $0 \leq x \leq \pi$ intervallum által határolt homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!

Megoldások

1. –
2. $S(0; \frac{4}{3\pi}R)$
3. $S(0; \frac{18}{5})$
4. $S(15; \frac{15}{8})$
5. $S(\frac{ae^a - e^a + 1}{e^a - 1}; \frac{e^a + 1}{4})$
6. $S(\frac{\pi}{2} - 1; \frac{\pi}{8})$
7. $S(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8})$

14. fejezet

Görbület, simulókör

1. Határozza meg az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbületét és simulókörének sugarát, középpontját az $x = 1$ abszcisszájú pontban!
2. Határozza meg az $y = x^2$ függvény görbületét és simulókörének sugarát, középpontját az $x = 0$ abszcisszájú pontban!
3. Határozza meg azt a pontot, ahol az $y = \ln x$ görbe görbületének legnagyobb az abszolút értéke!
4. Határozza meg az $y = \sin x$ függvény görbületét és simulókörének sugarát, középpontját az $x = \frac{\pi}{2}$ abszcisszájú pontban!
5. Határozza meg az $y = \operatorname{tg} x$ függvény görbületét és simulókörének sugarát, középpontját az $x = \frac{\pi}{4}$ abszcisszájú pontban!

Megoldások

1. $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = \sqrt{2}$, $a = 2$, $b = 2$.
2. $G = 2$, $R = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$.
3. $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. $G = -1$, $R = 1$, $a = \frac{\pi}{2}$, $b = 0$.
5. $G = \frac{4}{\sqrt{5^3}}$, $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$, $a = \frac{\pi - 10}{4}$, $b = \frac{9}{4}$.

15. fejezet

Vektortér

1. Egy síkban vannak-e a következő vektorok: $\underline{a}(5,-4,-1)$ $\underline{b}(-2,3,7)$ $\underline{c}(3,-1,6)$?
2. Függetlenek-e a következő vektorok: $\underline{a}(1,0,0)$ $\underline{b}(1,1,0)$ $\underline{c}(1,1,1)$?
3. Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az $\underline{a}(1,2,3)$ és $\underline{b}(2,3,1)$ vektorok szögét!
4. Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az $\underline{a}(3,4)$ és $\underline{b}(5,12)$ vektorok szögét!
5. Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az $A(3,4)$ $B(5,12)$ szakasz felezőpontjába mutat!
6. Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az $A(3,4,5)$ $B(5,12,-1)$ szakasz felezőpontjába mutat!
7. Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az $A(3,4)$ $B(6,16)$ szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontjába mutat!
8. Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az $A(3,4,0)$ $B(9,8,4)$ szakasz B-hez közelebbi negyedelő pontjába mutat!
9. Merőleges-e egymásra a következő két vektor $\underline{a}(5,-4,-11)$ $\underline{b}(-2,3,-2)$?
10. Mekkora szöget zár be egymással a következő két vektor $\underline{a}(3,4)$ és $\underline{b}(5,12)$?
11. Mekkora szöget zár be egymással a következő két vektor $\underline{a}(2,1,3)$ és $\underline{b}(5,2,1)$?
12. Határozza meg az $\underline{a}(-4,12,3)$ vektor irányába mutató egységvektort!
13. Mekkora szöget zár be a koordinátatengelyek pozitív felével a $\underline{v}(4,7,2)$ vektor?
14. Határozza meg az $\underline{u}\,(1,2,3)$ vektor $\underline{v}\,(0;1;2)$ vektor tartóegyenesére vett merőleges vetületvektorát!
15. Határozza meg az $\underline{a}(4,-3,1)$ vektor vetületét a $\underline{b}(-6,3,-2)$ vektor egyenesén!

16. Bontsa fel az $\underline{a}(-2, 11, -2)$ vektort a $\underline{b}(-6, 3, -2)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!
17. Bontsa fel a $\underline{b}(-6, 3, -2)$ vektort a $\underline{k}(0, 0, 1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!
18. Bontsa fel a $\underline{k}(0, 0, 1)$ vektort a $\underline{b}(-6, 3, -2)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!
19. Tükrözze a $\underline{d}(9, 7, -19)$ vektort az $\underline{e}(-7, 11, 4)$ vektor egyenesére!
20. Mekkora annak a háromszögnek a területe, kerülete és mekkorák a szögei, amelyet az origóból induló $\underline{a}(4, 3, -7)$ és $\underline{b}(5, 2, 6)$ vektorok feszítenek ki?
21. Számítsa ki az $\underline{a}(1, 2, 3)$, $\underline{b}(4, 5, 6)$ és $\underline{c}(7, 8, 10)$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát!

Legyen innen kezdve $\underline{a} = 3\underline{i} + 12\underline{j} - 5\underline{k}$, $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$, $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$.

22. Határozza meg az $5\underline{a}$, $2\underline{a} + 3\underline{b}$, $3\underline{a} - 2\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, vektorokat.
23. Számítsa ki az $\underline{a}\underline{b}$, $\underline{a}\underline{c}$, $\underline{a}(\underline{b} + 2\underline{c})$ skaláris szorzatokat.
24. Határozza meg x értékét úgy, hogy a $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektor merőleges legyen a $\underline{d} = x\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$ vektorra.
25. Számítsa ki az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok hosszát.
26. Számítsa ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$, valamint az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ vektorok szögét.
27. Határozza meg az $\underline{e} = -\underline{i} + 6\underline{j} + 13\underline{k}$ vektornak a $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektorra eső merőleges vetületét.
28. Határozza meg a $\underline{j}$ vektornak a $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektorra eső merőleges vetületét.
29. Határozza meg a $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektornak az $\underline{e} = -\underline{i} + 6\underline{j} + 13\underline{k}$ vektorra eső merőleges vetületét.
30. Határozza meg az $\underline{a} + \underline{b}$ vektornak a $\underline{k}$ vektorra eső merőleges vetületét.
31. Bontsa fel az $\underline{f} = 4\underline{i} + 7\underline{j} + 6\underline{k}$ vektort a $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre.
32. Bontsa fel az $\underline{g} = \underline{i} - 10\underline{j} - 11\underline{k}$ vektort a $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre.
33. Bontsa fel a $\underline{h} = 10\underline{i} + 24\underline{j} - 13\underline{k}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos komponensekre.
34. Bontsa fel a $\underline{h} = 15\underline{i} + 39\underline{j} - 15\underline{k}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokkal párhuzamos komponensekre.

35. Számítsa ki az $\underline{a}_1 = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ és $\underline{a}_2 = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ vektorok vektoriális szorzatát.
36. Határozza meg az $\underline{a}_3 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ és $\underline{a}_4 = 5\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét.
37. Határozza meg az $\underline{a}_5 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$ és $\underline{a}_6 = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ vektorok által kifeszített háromszög területét.
38. Határozza meg annak a háromszögnek a területét, amelynek az origóból a csúcsaiba mutató vektorok az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$ és $\underline{c} = 5\underline{i} + 3\underline{k}$.
39. Egy háromszög csúcsaiba mutató vektorok $A = 5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$, $B = 3\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$ és $C = 7\underline{i} + 15\underline{j} + 3\underline{k}$.
    Határozza meg az AB oldal felezőpontjába mutató vektort.
    Határozza meg a súlypontba mutató vektort.
    Határozza meg a C pontból induló magasság talppontját.
    Határozza meg az AC oldal merőleges vetületét az AB oldalon.

40. Egy síkban vannak-e az $\underline{a} = 3\underline{i} + 12\underline{j} - 5\underline{k}$, $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$, $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ és $\underline{d} = -5\underline{i} + 39\underline{j}$ vektorok végpontjai?
41. Egy síkban vannak-e az $\underline{a} = 3\underline{i} + 12\underline{j} - 5\underline{k}$, $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$, $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ és $\underline{d} = 5\underline{i} - 39\underline{j} + \underline{k}$ vektorok végpontjai?

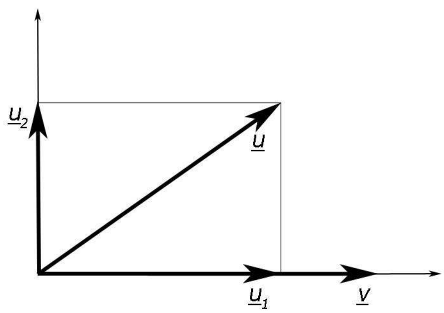
Megoldások

1. Igen, mert $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$.
2. Igen.
3. $\underline{a} + \underline{b} = (3; 5; 4)$ és $\underline{a} - \underline{b} = (-1; -1; 2)$ irányú vektorok.
4. $13\underline{a} + 5\underline{b} = (64; 112)$ és $13\underline{a} - 5\underline{b} = (14; -8)$ irányú vektorok.
5. $F = \frac{A+B}{2} = (4; 8)$.
6. $F = (4; 8; 2)$.
7. $H = \frac{2A+B}{3} = (4; 8)$.
8. $N = \frac{A+3B}{4} = (7,5; 8; 3)$.
9. Igen, mert $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.
10. $\cos\alpha = \frac{63}{65}$.
11. $\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{14 \cdot 30}}$.

12. $\underline{e} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = (-\frac{4}{13}; \frac{12}{13}; \frac{3}{13})$.

13. $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{69}}$.

14. **Mintamegoldás.** $\underline{u}$ vektor felbontása $\underline{v}$-vel párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére:



$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \left(\underline{u} \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \\ \underline{u}_2 &= \underline{u} - \underline{u}_1 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$.

$\underline{u}_1 = \left[(1,2,3) \cdot \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right] \cdot \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (0; \frac{8}{5}; \frac{16}{5})$, mert $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(0;1;2) = \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

15. $-\frac{5}{7}\underline{b} = (\frac{30}{7}; -\frac{15}{7}; \frac{10}{7})$.

16. Párhuzamos komponens: $(-6; 3; -2)$, merőleges komponens: $(4; 8; 0)$.

17. Párhuzamos komponens: $(0; 0; -2)$, merőleges komponens: $(-6; 3; 0)$.

18. Párhuzamos komponens: $(\frac{12}{49}; -\frac{6}{49}; \frac{4}{49})$, merőleges komponens: $(-\frac{12}{49}; \frac{6}{49}; \frac{45}{49})$.

19. $\underline{d}'(-\frac{13}{3}; -\frac{43}{3}; \frac{49}{3})$.

20. $T = \frac{1}{2}\sqrt{32^2 + 59^2 + 7^2}$, $K = \sqrt{74} + \sqrt{65} + \sqrt{171}$,
$\cos\alpha = \frac{81}{\sqrt{65 \cdot 171}}$, $\cos\beta = \frac{90}{\sqrt{74 \cdot 171}}$, $\cos\gamma = \frac{-16}{\sqrt{74 \cdot 65}}$.

21. $V = 3$.

22. $5\underline{a} = 15\underline{i} + 60\underline{j} - 25\underline{k}$
$2\underline{a} + 3\underline{b} = 18\underline{i} + 24\underline{j} - 19\underline{k}$
$3\underline{a} - 2\underline{b} = \underline{i} + 36\underline{j} - 6\underline{k}$
$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 5\underline{i} + 15\underline{j} - 2\underline{k}$.

23. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 27$, $\underline{a} \cdot \underline{c} = 0$, $\underline{a} \cdot (\underline{b} + 2\underline{c}) = 27$.

24. $x = 6$.

25. $|\underline{a}| = \sqrt{178}$, $|\underline{b}| = 5$, $|\underline{c}| = 7$.

26. $\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{27}{5\sqrt{178}}$, $(\underline{a}, \underline{c})$szöge $= 90°$.
27. $\underline{e}$ vetülete $= 2\underline{c} = -4\underline{i} + 6\underline{j} + 12\underline{k}$.
28. $\underline{j}$ vetülete $= \frac{3}{49}\underline{c}$.
29. $\underline{c}$ vetülete $= \frac{98}{206}\underline{e}$.
30. $\underline{a} + \underline{b} = 7\underline{i} + 12\underline{j} - 8\underline{k}$, ezért vetülete $-8\underline{k}$.
31. Párhuzamos komponens$= \underline{c} = (-2; 3; 6)$, merőleges komponens:$(6; 4; 0)$.
32. Párhuzamos komponens$= -2\underline{c} = (4; -6; -12)$, merőleges komponens:$(-3; -4; 1)$.
33. $\underline{h} = 2\underline{a} + \underline{b}$.
34. $\underline{h} = 3\underline{a} + 2\underline{b} + \underline{c}$.
35. $\underline{a}_1 \times \underline{a}_2 = 12\underline{i} + 9\underline{j} - 10\underline{k}$.
36. $T = \sqrt{117}$.
37. $T = 3$.
38. $T = \sqrt{89}$.
39. AB oldal felezőpontja $= (4; 3; 0)$, $S(5; 2; 5)$, $T(11; -4; 7)$, $AT = (6; -6; 6)$.
40. Igen.
41. Nem.

16. fejezet

Koordinátageometria

1. Írja fel a $P(1,2,3)$ ponton átmenő $\underline{v}(5,4,3)$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét!

2. Írja fel a $P(1,2,3)$ és $Q(4,6,15)$ pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét!

3. Rajta van-e a $P(1,2,3)$ és $Q(4,6,15)$ pontokon átmenő egyenesen az $R(7,8,9)$ pont?

4. Rajta van-e a $P(1,2,3)$ és $Q(4,6,15)$ pontokon átmenő egyenesen az $S(10,14,39)$ pont?

5. Milyen a következő két egyenes kölcsönös helyzete (párhuzamos, metsző, kitérő)?
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+3t \\ y &=& 6+4t \\ z &=& 15+12t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 7+6t \\ y &=& 4+8t \\ z &=& -11+24t \end{array}\right.$$

6. Milyen a következő két egyenes kölcsönös helyzete (párhuzamos, metsző, kitérő)?
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+3t \\ y &=& 6+4t \\ z &=& 15+12t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 9+t \\ y &=& 14+2t \\ z &=& 37+5t \end{array}\right.$$

7. Milyen a következő két egyenes kölcsönös helyzete (párhuzamos, metsző, kitérő)?
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+3t \\ y &=& 6+4t \\ z &=& 15+12t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 7+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& -11+5t \end{array}\right.$$

8. Határozza meg az alábbi kitérő egyenes pár egy normál tranzverzális vektorát!
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+3t \\ y &=& 6+4t \\ z &=& 15+12t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 7+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& -11+5t \end{array}\right.$$

9. Írja fel a $P(2,0,2)$ ponton átmenő $\underline{n}(4,3,-2)$ normálvektorú sík egyenletét!

10. Írja fel a $P(2,0,2)$ pont és az $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+3t \\ y &=& 6+4t \\ z &=& 15+12t \end{array}\right.$ egyenes által meghatározott sík egyenletét!

11. Írja fel a $P(9,8,-1)$ $Q(7,4,-11)$ és $R(15,0,-1)$ pontok által meghatározott sík egyenletét!

12. Rajta van-e a $P(9,8,-1)$ pont a $4x+3y-2z=4$ síkon?

13. Rajta van-e a $P(4,6,15)$ pont a $4x+3y-2z=4$ síkon?

14. Határozza meg a $4x+3y-2z=4$ sík és az $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+3t \\ y &=& 6+4t \\ z &=& 15+12t \end{array}\right.$ egyenes kölcsönös helyzetét!

15. Határozza meg a $4x+3y-2z=4$ sík és az $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 7+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& -11+5t \end{array}\right.$ egyenes kölcsönös helyzetét!

16. Határozza meg a $4x+3y-2z=62$ sík és az $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 12+3t \\ y &=& 10+2t \\ z &=& t \end{array}\right.$ egyenes kölcsönös helyzetét!

17. Határozza meg az $x+2y+3z=5$ és $2x+4y+6z=5$ síkok kölcsönös helyzetét!

18. Határozza meg az $x+2y+3z=6$ és $3x+2y+z=6$ síkok kölcsönös helyzetét!

19. Határozza meg a $P(2,3,4)$ és $Q(14,0,8)$ pontok távolságát!

20. Határozza meg a $P(2,3,4)$ pont és $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 12+2t \\ y &=& 18+3t \\ z &=& 9+t \end{array}\right.$ egyenes távolságát!

21. Határozza meg a $P(11,16,3)$ pont és $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 12+2t \\ y &=& 18+3t \\ z &=& 9+t \end{array}\right.$ egyenes távolságát!

22. Határozza meg a $P(4,3,2)$ pont és $x+2y+5z=100$ sík távolságát!

23. Határozza meg az $x + 2y + 5z = 20$ és $x + 2y + 5z = 30$ síkok távolságát!

24. Határozza meg az $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 6 + 4t \\ z = 15 + 12t \end{cases}$ és $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -11 + 5t \end{cases}$ kitérő egyenesek távolságát!

25. Határozza meg az $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 6 + 4t \\ z = 15 + 12t \end{cases}$ és $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -11 + 5t \end{cases}$ kitérő egyenesek normál tranzverzálisának végpontjait!

Megoldások

1. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 12t \end{cases}$

3. Nincs.

4. Igen.

5. Párhuzamos.

6. Metsző, metszéspont $(7; 10; 27)$.

7. Kitérő.

8. $\underline{n}(-4; -3; 2)$.

9. $4x + 3y - 2z = 4$.

10. $4x + 3y - 2z = 4$.

11. $4x + 3y - 2z = 62$.

12. Nincs.

13. Igen.

14. Az egyenes benne van a síkban.
15. Az egyenes párhuzamos a síkkal.
16. Döféspont $(9; 8; -1)$.
17. Párhuzamos.
18. Metsző.
19. $|PQ| = 13$.
20. A pont rajta van a síkon.
21. $d = \sqrt{27}$.
22. $d = \frac{80}{\sqrt{30}}$.
23. $d = \frac{10}{\sqrt{30}}$.
24. $d = 2\sqrt{29}$.
25. Az $A(1; 2; 3)$ és $B(9; 8; -1)$ pontok.

17. fejezet

Mátrixok

Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Határozza meg az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$, $3\underline{\underline{A}}$, $3\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{B}}$ mátrixokat!

   Legyen $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Határozza meg az $\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{C}} - 2\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{CD}}$, $\underline{\underline{DC}}$, $\underline{\underline{CDE}}$ mátrixokat!

3. Végezze el az alábbi műveleteket, ha lehet!

   $\underline{\underline{AC}}$, $\underline{\underline{AD}}$, $\underline{\underline{EA}}$, $\underline{\underline{BA}}$, $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}})$, $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$, $\underline{\underline{C}}^2$, $\underline{\underline{CC}}^T$, $\underline{\underline{CA}}^T$, $\underline{\underline{E}}^2$,

   ahol $\underline{\underline{A}}^T$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix transzponáltját jelöli.

   Legyen $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Határozza meg az $\underline{\underline{FG}} - \underline{\underline{GF}}$ mátrixot!

   Legyen $\underline{a}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Határozza meg az $\underline{a}^T\underline{a}$ és $\underline{a}\underline{a}^T$ szorzatokat!

   Legyen $\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Számítsa ki az $\underline{a}^T\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{H}}\,\underline{a}$, valamint $\underline{a}^T\underline{\underline{H}}\,\underline{a}$ szorzatokat!

   Legyen $\underline{x}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$.

7. Számítsa ki az $\underline{x}^T \underline{\underline{H}}\, \underline{x}$ szorzatot!

   Legyen $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$.

8. Számítsa ki a $\underline{\underline{T}}^2,\ \underline{\underline{T}}^n,\ \underline{\underline{T}}\,\underline{v},\ \underline{v}^T\underline{\underline{T}}\,\underline{v},\ \underline{\underline{T}}^2\,\underline{v},\ \underline{v}^T\underline{\underline{T}}^2\,\underline{v}$ szorzatokat!

   Legyen $\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

9. Számítsa ki a $\underline{\underline{R}}^2,\ \underline{\underline{R}}^3,\ \underline{\underline{R}}\,\underline{v},\ \underline{v}^T\underline{\underline{R}}\,\underline{v},\ \underline{\underline{R}}^2\,\underline{v},\ \underline{v}^T\underline{\underline{R}}^2\,\underline{v}$ és $\underline{v}^T\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}\,\underline{v}$ szorzatokat!

10. Van-e olyan null mátrixtól különböző négyzetes mátrix, amelynek a négyzete null mátrix?

11. Mutassa meg, hogy az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixhoz található olyan $\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{0}}$ másodrendű négyzetes mátrix, hogy $\underline{\underline{AB}} = \underline{\underline{0}}$ null mátrix.

12. Egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix szimmetrikus, ha $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ és antiszimmetrikus, ha $\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$. Bizonyítandó, hogy minden négyzetes mátrix előállítható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

13. Igazolja, hogy ha az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixok összeszorozhatók, akkor $\left(\underline{\underline{AB}}\right)^T = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T$.

14. Ortogonális-e az alábbi mátrix? $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

    Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét, ha létezik:

15. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

Számítsa ki a következő determinánsok értékét!

24. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

Megoldások

1. $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$3\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

$3\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 14 \\ 2 & 22 & 15 \end{bmatrix}$

2. $\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{C}} - 2\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{CD}} = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{DC}} = \begin{bmatrix} -9 & -70 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{CDE}} = \begin{bmatrix} -2 & 75 \\ 2 & 117 \end{bmatrix}$

3. $\underline{\underline{AC}}$ nem lehet.
$\underline{\underline{AD}}$ nem lehet.
$\underline{\underline{EA}} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -11 \\ 0 & 24 & 30 \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{BA}}$ nem lehet.
$\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} 5 & 24 & 16 \\ 13 & 54 & 38 \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$ nem lehet.
$\underline{\underline{C}}^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{CC}}^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{CA}}^T$ nem lehet.
$\underline{\underline{E}}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -24 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$

4. $\underline{\underline{FG}} - \underline{\underline{GF}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\underline{a}^T \underline{a} = 26.$
$\underline{aa}^T = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

6. $\underline{a}^T \underline{\underline{H}} = [6; 13; 1]$
$\underline{\underline{H}}\underline{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\underline{a}^T \underline{\underline{H}}\underline{a} = 40.$

7. $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$

8. $\underline{\underline{T}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}$
$\underline{\underline{T}}^n = \begin{cases} \underline{\underline{T}} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \underline{\underline{I}} & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$
$\underline{\underline{T}}\underline{v} = \underline{v}.$
$\underline{v}^T \underline{\underline{T}}\underline{v} = 1$
$\underline{\underline{T}}^2 \underline{v} = \underline{v}$
$\underline{v}^T \underline{\underline{T}}^2 \underline{v} = 1$

9. $\underline{\underline{R}}^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{R}}^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{R}v} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}$
$\underline{v}^T \underline{\underline{R}v} = \cos\alpha \; \underline{\underline{R}}^2 \underline{v} = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha \\ \sin 3\alpha \end{bmatrix}$
$\underline{v}^T \underline{\underline{R}}^2 \underline{v} = \cos 2\alpha$
$\underline{v}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}v} = 1.$

10. Igen, pl.: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

11. Pl.: $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

12. $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\right)$

13. Definíció alapján.

14. Igen, sőt ortonormált, mert $\underline{\underline{AA}}^T = \underline{\underline{I}}$.

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

16. Nem létezik.

17. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix}$

Egy lehetséges megoldás:

$\det \underline{\underline{A}} = 20 + 54 + 18 - 27 - 20 - 36 = 72 - 63 = 9 \neq 0$ tehát van inverz mátrix.

$$\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & -1 \\ -3 & 17 & -4 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -6 & -7 & 17 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \cdot \mathrm{adj}\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

20. $\begin{bmatrix} \frac{9}{190} & \frac{41}{190} & \frac{17}{190} \\ \frac{41}{190} & \frac{39}{190} & -\frac{7}{190} \\ \frac{17}{190} & -\frac{7}{190} & \frac{11}{190} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

24. -207.

25. 0.

26. 0.

27. 15.

28. 6.

29. 20.

30. $-2(x^3 + y^3)$.

31. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$.

32. 12.

18. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket:

1. $$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 22x_3 - 18x_4 &= -20 \end{aligned}$$

6. A t paraméter értékétől függően vizsgálja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát! Ahol van megoldás, ott oldja is meg az egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + tx_4 &= 7 \end{aligned}$$

7. Határozza meg λ értékét úgy, hogy az egyenletrendszer kompátibilis legyen és oldja meg az egyenletrendszert!

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

10.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

12.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

13.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

14. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \\ 9 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15. $$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

16. $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

17. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

18. $$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

19. A λ paraméter milyen értéke mellett van megoldása az egyenletrendszernek? Mi ekkor a megoldás?

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 & -1 \\ 5 & -2 & -7 & -9 \\ 3 & 13 & 10 & 23 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 19 \\ -17 \\ -5 \end{bmatrix}$$

20. A λ paraméter milyen értéke mellett van megoldása az egyenletrendszernek? Mi ekkor a megoldás?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ \lambda \\ -3 \end{bmatrix}$$

Megoldások

1. $x = 3 \qquad y = 1 \qquad z = 1$
2. $x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = -2$
3. $x = 2 \qquad y = -2 \qquad z = 3$
4. $x_1 = -1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 1$
5. $x_1 = -34 - 35x_3 + 28x_4 \qquad x_2 = 14 + 13x_3 - 10x_4 \qquad x_3 =$ tetszőleges
   $x_4 =$ tetszőleges.

Egy mintamegoldás:

6. A t paraméter értékétől függően vizsgáljuk az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát!

   Ahol van megoldás, ott oldjuk is meg az egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + tx_4 &= 7 \end{aligned}$$

Mátrixos alakba írva: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}.$

Gauss-módszerrel kapjuk, hogy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & t & 7 \end{array}\right] \overset{\begin{pmatrix} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 2S_1 \\ S_4 - S_1 \end{pmatrix}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & t-3 & 5 \end{array}\right] \overset{\begin{pmatrix} S_3 + S_2 \\ S_4 - 2S_2 \end{pmatrix}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 5 \end{array}\right] \overset{\begin{pmatrix} S_2 \cdot (-1) \\ S_3 \leftrightarrow S_4 \end{pmatrix}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

a) Pontosan egy megoldásunk akkor lenne, ha

$$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}\,[A|b] = 4 \text{ (ismeretlenek száma)},$$

ez nem állhat fenn.

b) ∞ sok megoldásunk van $\iff$ $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}\,[A|b] < 4$.

Ez csak akkor lehetséges, ha a két $\mathrm{rang} = 3$, azaz $t \neq 1$.

Ekkor

$$\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\
4x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
(t-1)\,x_4 &= 5 \implies x_4 = \frac{5}{t-1} \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 2 - \frac{15}{t-1} \\
4x_2 - x_3 &= -\frac{5}{t-1} \\
x_4 &= \frac{5}{t-1}
\end{aligned}$$

Ekkor a szabadságfok $= 4 - 3 = 1$

$$\begin{aligned}
x_3 &= u \in \mathbb{R} \\
x_2 &= \frac{1}{4}\left(u - \frac{5}{t-1}\right) \\
x_1 &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{15}{t-1} - u - \frac{5}{4}u + \frac{25}{4}\frac{1}{t-1}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{35}{4}\frac{1}{t-1} - \frac{9}{4}u\right) \\
x_4 &= \frac{5}{t-1}.
\end{aligned}$$

c) Nincs megoldás (azaz az egyenletrendszer megoldáshalmaza üres), ha $\mathrm{rang}\ A \neq \mathrm{rang}\,[A|b]$. Ez úgy lehet, hogy $\mathrm{rang} A = 2 < 3 = \mathrm{rang}\,[A|b]$, azaz

$$t = 1.$$

Megjegyzés

Ha nem kéri a feladat, hogy oldjuk is meg az egyenletrendszert ott, ahol van megoldás, akkor elég csak a megoldások számát tárgyalni a t paraméter függvényében, azaz a b) pontban szereplő (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldásokat nem kell megadni.

7. Ha $\lambda \neq 0$, akkor nincs megoldás.
   Ha $\lambda = 0$, akkor végtelen sok megoldás van, mégpedig:
   $x_1 =$ tetszőleges, $x_2 =$ tetszőleges, $x_3 = \frac{17}{2} - \frac{19}{2}x_1 + \frac{13}{2}x_2$, $x_4 = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2$.
8. $x_1 = -2x_3 + 2x_4$, $x_2 = -3x_3 + 3x_4$, $x_3 =$ tetszőleges, $x_4 =$ tetszőleges.
9. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.
10. Nincs megoldás.
11. $x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4$, $x_2 = -1 + x_3 + x_4$, $x_3 =$ tetszőleges, $x_4 =$ tetszőleges.
12. $x_1 = 6 - x_3$, $x_2 = -2$, $x_3 =$ tetszőleges, $x_4 = 0$.
13. Nincs megoldás.
14. $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$.
15. $x_1 =$ tetszőleges, $x_2 =$ tetszőleges, $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$.
16. Nincs megoldás.
17. $x_1 = 3x_2 + 2x_3$, x_2, x_3, x_4 tetszőleges, $x_5 = -5x_2 - 5x_3 - x_4$.
18. $x_1 = -5x_3$, $x_2 = 2x_3$, $x_3 =$ tetszőleges.
19. Csak akkor van megoldás, ha $\lambda = 15$, ekkor $x_1 = 3 + x_3 + x_4$, $x_2 = -2 - x_3 - 2x_4$, x_3 és x_4 tetszőleges.
20. Csak akkor van megoldás, ha $\lambda = 1$, ekkor $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_3 = 6 + 2x_4$, x_4 tetszőleges.