BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Babcsányi - Gyurmánczi - Szabó - Wettl

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY I.

Műegyetemi Kiadó, 2009

Lektor:
Szász Gábor

Szerkesztő:
Wettl Ferenc

Szerzők:
Babcsányi István (1., 7., 8. fejezet)
Gyurmánczi János (6., 12., 13. fejezet)
Szabó Lajos (2., 3., 4., 5. fejezet)
Wettl Ferenc (9., 10., 11. fejezet)

Rajzoló:
Lukács Erzsébet

Műszaki szerkesztő:
Babcsányi István
Wettl Ferenc
Zibolen Endre

(Tizennegyedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **075001**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 30 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 778/09

Előszó

Ez a kötet az első abból a négykötetes feladatgyűjteményből, melyet a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékének oktatói készítenek Szász Gábor Matematika I-II-III című tankönyvéhez. A kötet tizenhárom fejezetének címei — az első fejezet kivételével — megegyeznek a tankönyv első kötetében lévő fejezetcímekkel. A fejezetek sorszámozatlan alfejezetekre oszlanak. Minden alfejezet tipográfiailag is elkülönülő elméleti összefoglalóval kezdődik; ez tartalmazza a felhasználandó ismeretek legfontosabb elemeit: definíciókat, tételeket, esetleg számítási technikákat, módszereket, melyek azonosítója egy betűvel kezdődik (ezek jelentése: **D** definíció, **T** tétel, **P** példa, **J** jelölés, **M** megjegyzés), majd a fejezet sorszáma, végül a fejezeten belüli saját sorszám következik. Például:

T 3.2 Ez itt a harmadik fejezet elméleti bevezetőjének kettes sorszámú tétele.

Az elméleti bevezető után következnek a feladatok; ezek csak a fejezeten belüli sorszámukat viselik. Azonos fejezetből való hivatkozásnál ez a sorszám (pl.: **56.**), más fejezetből való hivatkozásnál a fejezet és a feladat sorszáma együtt szerepel (pl.: **7.56.**). A feladat sorszámának felső indexében szerepelhet egy jel, melyet az alábbi példákban magyarázunk:

51.$^{\bullet}$ Ez az 51. feladat, megoldását fontosnak tartjuk.

52.$^{\triangleright}$ Ehhez a feladhoz részletes útmutató tartozik a megoldásoknál.

53.* Ez a feladat a nehezebbek közé tartozik.

54.^{k} Ehhez a feladathoz kalkulátor használata szükséges.

55.^{p} Ehhez a feladathoz programozható számoló- vagy számítógép használata szükséges.

A végeredményt, néhány kivétellel, minden feladatnál közöljük. Az ábráknak nincs saját sorszámuk, de minthogy közvetlenül a feladat mellett szerepelnek, a szövegből mindig egyértelmű, hogy melyikhez tartoznak.

A kötet szerzői köszönetet mondanak Szász Gábornak rendkívül gondos lektori munkájáért és hasznos javaslataiért.

A feladatgyűjtemény szövegét a MATEX, rajzait az AUTOCAD programcsomaggal szerkesztettük. Ez könnyebbé teszi egy javított kiadás elkészítését. Ezért kérünk minden olvasót, hogy a megtalált hibákat, javítási ötleteiket juttassák el a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékére.

Budapest, 1992. május 20.

A szerkesztő

1. fejezet

Bevezetés

Algebrai feladatok

J 1.1 A számok gyakran használt halmazaira a következő jelöléseket vezetjük be: **N** a nemnegatív egész számok, $\mathbf{N}^+$ a pozitív egész számok, **Z** az egész számok, **Q** a racionális számok, **R** a valós számok és $\mathbf{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza.

J 1.2 Az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ összegre a $\sum_{k=1}^{n} a_k$ vagy a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ jelölést használjuk (kiejtés: szumma $k = 1$-től n-ig a_k).

D 1.3 Vezessük be az $1 \cdot 2 \ldots n$ szorzatra az $n!$ (kiejtés: n faktoriális) jelölést. Legyen továbbá $0! = 1! = 1$.

D 1.4 Legyenek $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. Az, hogy a **osztója** b-nek, azt jelenti, hogy van olyan $c \in \mathbf{Z}$, hogy $ac = b$. Jelölése: $a|b$.

Feladatok

Legyen $a, b \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}^+$. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

1.• $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

2. $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + a^{2n-4}b^2 - \cdots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$,

3. $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$.

4.• Mutassuk meg, hogy ha $a + b + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$, akkor $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

5. $|x| = x + 1$, **6.** $|2x + 3| = x^2$, **7.** $|\sin x| = \sin x + 2$,

8. $|\sin x| = \sin x + 3$, **9.** $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$, **10.** $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$,

11.▹ $|x^2+6x+6| = |x^2+4x+9| + |2x-3|$, **12.**▹ $|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$,

13. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

14. $\dfrac{3x+5}{4x-7} < 0$, **15.** $\dfrac{2x+3}{x-3} \leq 5$, **16.** $1 < \dfrac{3x-2}{4x+5} < 4$,

17. $\dfrac{5x-2}{|2x+1|} < 3$, **18.*** $|3x-7| < 1$, **19.**▷ $|x| < |x+6|$,

20. $|x+2| + |x-2| \leq 12$, **21.** $|4x-3| < x < |4x+3|$,

22. $||x+1| - |x-1|| < 1$, **23.** $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$,

24. $\dfrac{2x+1}{x-4} < \dfrac{x+5}{x+1}$, **25.**▷ $\dfrac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} \leq 2$,

26. $|2-x^2| > 3$, **27.** $|x(1-x)| < 0{,}05$,

28. $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$, **29.** $|x^2-5x| > |x^2| - |5x|$,

30.▷ $\sqrt{3-2x-x^2} > x+2$, **31.** $\sqrt{2-x} - \sqrt{x} > 1$.

Oldjuk meg valós x ismeretlenre az alábbi egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket:

32.▷ $4 < (2x+3)^2 < 9$, **33.** $(a-1)x > 2a, \quad ax < a+1$.

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az (x, y) pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira a következő egyenletek, illetve egyenlőtlenségek teljesüljenek:

34.▷ $|y| \leq |x|$, **35.** $|y| < |x+2|$,

36.* $|x| + |y| \leq 2$. **37.*** $|x| + |y| = 1$,

38. $|x| - |y| = 1$, **39.*** $|x+y| = |x| + |y|$,

40. $|x-y| = |x| - |y|$,

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket a valós számpárok halmazán:

41. $x-y-2<0$, $3x-y-8>0$, **42.** $3x-y-2<0$, $5x-4y+6<0$,

43. $x-y-2<0$, $3x-3y+10<0$, **44.** $4x+y-2=0$, $x-2y-14<0$,

45. $x-5y+7<0$, $x-y-1<0$, $x-2y+4>0$, **46.** $3x-7y+13=0$, $2x+5y-1>0$, $5x-2y-17<0$,

47. $y^2-4x<0$, $x^2+y^2-2x \geq 0 \quad x \leq 2$, **48.** $25x^2+9y^2-225 \leq 0$, $9y^2-16x^2-144 \geq 0$.

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket. Ahol lehet, állapítsuk meg, hogy milyen feltételek mellett áll fenn az egyenlőség:

49.* $|x+y| \leq |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbf{R})$ (**háromszög-egyenlőtlenség**, l. még **125.**),

50.▷ $a^2+b^2 \geq 2|ab| \quad (a, b \in \mathbf{R})$, **51.**▷ $|a-b| \geq ||a|-|b|| \quad (a, b \in \mathbf{R})$,

52. $\left|\dfrac{1}{a-b}\right| < \dfrac{2}{|a|}$, ha $|b| < \dfrac{|a|}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R})$,

53.* $a + \dfrac{1}{a} \geq 2 \quad (a \in \mathbf{R}^+)$, **54.** $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \quad (x \in \mathbf{R})$,

55. $\dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$,

56.• $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R}^+)$ (**a harmonikus, a mértani** és **a számtani közép** közötti összefüggés; l. még a **128.** feladatot!)

57.* Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \ge 0$ és $\alpha > \beta > 0 \quad (a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R})$, akkor

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(a^\beta + b^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Az alábbi feladatokban értelmezzük a (nem üres) S halmazon a megadott $\star$ vagy $\circ$ műveleteket. Vizsgáljuk meg, hogy a halmaz zárt-e ezekre a műveletekre nézve, azaz a műveletek eredménye mindig benne van-e a halmazban? Ha igen, akkor a műveletek kommutatívak-e, asszociatívak-e? Ahol két műveletet is megadtunk, ott disztributív-e valamelyik művelet a másikra nézve?

58. $S = \mathbf{R}, \quad x \star y = y, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

59. $S = \mathbf{R}, \quad x \star y = \max(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}$,

60. S a páratlan számok halmaza, $\star$ a számok összeadása,

61. S a páros számok halmaza, $\star$ a számok összeadása,

62. S a páratlan számok halmaza, $\star$ a számok szorzása,

63.▹ $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = x + 2y, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

64.* $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = ax + by + c, \quad x, y \in \mathbf{R}$, ahol a, b, c adott valós számok,

65. $S = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, a $\star$ és a $\circ$ művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,

66. $S = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, a $\star$ és a $\circ$ művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,

67.* $S = \mathbf{R}, \quad a \star b = a + b - 1, \quad a \circ b = a + b - ab \quad (a, b \in \mathbf{R})$.

Számítsuk ki az alábbi összegeket:

68.• $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$,

69.• $\displaystyle\sum_{k=-3}^{1} k^3$,

70. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(2k+1)$,

71.• $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(-1)^k$,

72. $\displaystyle\sum_{k=7}^{20} \pi$,

73.▹ $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k \sin\frac{k\pi}{2}$.

Írjuk fel a szumma jel alkalmazásával a következő összegeket:

74.• $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$,

75.• $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}$,

76. $15 + 24 + 35 + \cdots + (n^2 - 1)$,

77. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$,

78.• $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,

79. $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

Melyek igazak az alábbi összefüggések közül minden $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ és c valós számra?

80.* $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$,

81.* $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$,

82. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$,

83.* $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$.

84. Írjuk fel az x-ben másodfokú $\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2$ függvény diszkriminánsát, ahol $a_k, b_k \in \mathbf{R}$.

85.$^{\triangleright}$ (**Cauchy-Bunyakovszkij** egyenlőtlenség) Az előző feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget, ahol $a_k, b_k \in \mathbf{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

86. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a és b valós számra:

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2.$$

87. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b és x valós számra:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\cos x + b\sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Számítsuk ki a következő összegeket:

88. $\sum_{k=0}^{0}(-3)$,

89. $\sum_{k=m}^{n} c \quad (n \geq m)$; c konstans,

90. $\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$,

91. $\sum_{k=2}^{20}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right)$,

92.* $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$,

93. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\left(\text{Útmutatás}: \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$,

94.* $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ (Útmutatás: szorozzunk $2\sin\frac{x}{2}$-vel),

95. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$, ahol $a_{kl} = 0$, ha $k \neq l$ és $a_{kl} = 1$, ha $k = l$,

96. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$, ha $a_{kl} = k$,

97. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$, ha $a_{kl} = k - l$.

Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

98. $\frac{10!}{8!} + \frac{10!}{3!7!} - \frac{1!}{0!}$,

99. $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \quad (n \geq 2)$,

100.* $\frac{n!(2n+1)!}{(n-1)!(2n+3)!} \quad (n \in \mathbf{N}^+)$,

101. $\frac{(n-k)!(2n+1)!}{n!(n+k)!} \quad (n, k \in \mathbf{N}; k \leq n)$.

102.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy ha $k|m$ és $k|(m+n)$, ahol $k, m, n \in \mathbf{Z}$ és $k \neq 0$, akkor $k|n$. Igaz-e az állítás megfordítása?

Teljes indukció

D 1.5 A **teljes indukció** a direkt bizonyítás egyik fontos típusa. Jelöljön $A(n)$ olyan állítást, amely az n egész számtól függ. A bizonyítás két lépésből áll. Először megmutatjuk, hogy van olyan n_0 egész szám, hogy az $A(n_0)$ állítás igaz. Azután feltesszük, hogy valamely n egész számra $A(n)$ igaz, s ennek alapján bebizonyítjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz. Ezekből már következik, hogy $A(n)$ igaz minden $n \geq n_0$ esetben.

Feladatok

Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy a következő állítások igazak, ha az n pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely n_0 pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen n_0-t):

103.• $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, **104.** $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,

105.• $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

106. $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$,

107.▹ $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$,

108. $\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)k^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, **109.** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$,

110. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$,

111. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

112. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+t-1)=\dfrac{n(n+1)\dots(n+t)}{t+1}$, $t\in \mathbb{N}^+$,

113. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, **114.** $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k!)=(n+1)!-1$,

115.• $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, **116.**▹ $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}>\dfrac{13}{24}$,

117.▹ $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$,

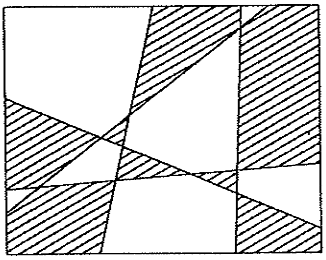
118.▷ $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$, **119.**▷ $3^n > 2^n + 7n$,

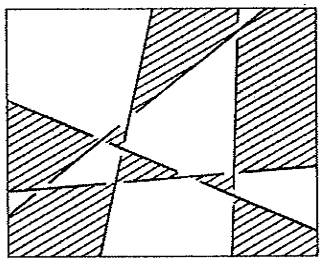
120. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$,

121.* $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (a bal oldalon n darab gyökjel van),

122.* $3 + 33 + \cdots + 33\ldots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$ (a bal oldalon n tagú összeg van).

123.▷ Egy síkbeli tartományt n darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott "térkép" két színnel színezhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek (l. bal oldali ábra).





124.* Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út, és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk át a kereszteződésen. (Útmutatás: Használhatjuk az előző feladat eredményét és a jobb oldali ábrát.)

125.• Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, akkor

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok között nincsenek különböző előjelűek. (l. a **49.** feladatot!)

126.* Mutassuk meg, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ és $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, akkor $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

127. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$, akkor $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

128.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

azaz pozitív számok mértani közepe nem nagyobb a számtani közepüknél, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

129. Igazoljuk, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ esetén $nx_1x_2\ldots x_n \leq x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n$.

130. Bizonyítsuk be az $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \geq 2)$ egyenlőtlenséget.

Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat ($n \in \mathbb{N}^+$):

131.$^{\triangleright}$ $8 | 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, **132.**$^{\triangleright}$ $6 | n(2n^2 - 3n + 1)$, **133.**$^{\triangleright}$ $133 | 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

134.* Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész szám sorrendtől eltekintve egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára (**a számelmélet alaptétele**).

Keressük meg a hibát a következő bizonyításokban:

135. Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n egész számra, azaz $n = n + 1$. Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy $n + 1 = n + 2$, tehát a tulajdonság öröklődik.

136.* Bebizonyítjuk, hogy a sík minden pontja egy egyenesen van. Ehhez megmutatjuk, hogy véges sok pont a síkon mindig egy egyenesen van. Az állítás $n = 2$ esetén igaz, hiszen bármely két pont egy egyenesen van. Tegyük fel, hogy bármely n pont egy egyenesen van. Bizonyítjuk, hogy akkor bármely $n+1$ pont is egy egyenesen van. Ha ugyanis nem volna, az azt jelentené, hogy van a síkon n olyan pont, amelyek egy egyenesen vannak, és egy $(n+1)$-edik pont, amely nincs ezen az egyenesen. Ekkor elhagyva az egy egyenesen lévő n pont valamelyikét, ezzel a ponttal olyan n pontot kapnánk, amelyek már nincsenek egy egyenesen, ez pedig ellentmond az indukciós feltevésnek.

2. fejezet

Halmazelmélet

D 2.1 Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.

D 2.2 Az A halmazt a B halmaz **részhalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. A **valódi része** B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

T 2.3 A halmazok közötti tartalmazásra teljesül a következő három tulajdonság:
Reflexivitás: minden A-ra $A \subseteq A$.
Antiszimmetria: ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
Tranzitivitás: ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

D 2.4 **Halmazműveletek:** Az A és B halmaz $A \cap B$ **metszetén** (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak; $A \cup B$ **egyesítettjén** (unióján) azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak. Az A és B halmaz $A - B$ **különbségén** értjük az A összes olyan elemeinek halmazát, amelyek nincsenek benne B-ben; $A \ominus B$ **szimmetrikus különbségén** azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyikben vannak benne; $A \times B$ **szorzatán** az (a, b) alakú rendezett pároknak a halmazát, ahol $a \in A$, $b \in B$. A H halmaz valamely A részhalmazának H-ra vonatkozó **komplementerén** a $H - A$ halmazt értjük. Jele $\overline{A}_H$. Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg. Ilyenkor az alaphalmazra vonatkozó komplementert egyszerűen $\overline{A}$ jelöli.

T 2.5 $\subseteq$ **tulajdonságai:** Tetszőleges A, B, C halmazokra igazak az alábbiak:
- ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap C \subseteq B \cap C$ és $A \cup C \subseteq B \cup C$;
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ és $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$;
- ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$, és $A \cup B = B$.

T 2.6 Bármely A, B, C halmazra fennállnak az alábbi **azonosságok:**
Asszociativitás: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
Idempotencia: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
Elnyelési tulajdonságok: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$;
Disztributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

D 2.7 Egy H halmaz összes részhalmazainak halmazát a H halmaz **hatványhalmazának** nevezzük. Jele: $P(H)$. (Megjegyzés: Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, így az üres halmaz minden halmaz hatványhalmazának eleme.)

T 2.8 Ha A és B olyan halmazok, melyekre A, $B \subseteq H$ teljesül, akkor $A - B = A \cap \overline{B}_H$.

T 2.9 **De Morgan-képletek**: bármely A, B halmazra: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Feladatok

Mik az elemei az alábbi halmazoknak?

1. $\{x \in \mathbf{N}^+ ;\ 2|x \text{ és } 100 \le x < 1000\}$, **2.** $\{x \in \mathbf{Z} ;\ 3|x \text{ és } |x| < 100\}$,
3. $\{k \in \mathbf{N}^+ ;\ x = 3k + 1\}$, **4.** $\{x \in \mathbf{R} ;\ x^2 + 2x + 1 = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} ;\ x^2 - 2 = 0\}$, **6.** $\{x \in \mathbf{Z} ;\ x^2 - 2 = 0\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} ;\ x^2 + 1 = 0\}$, **8.** $\{x \in \mathbf{R} ;\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\}$,
9. $\{x \in \mathbf{R} ;\ 2\lg x = \lg x^2\}$, **10.** $\{x \in \mathbf{R} ;\ \lg x = \lg(-x)\}$.

Az (x, y), illetve az (x_n, y_n) számpárokat az xy koordinátasík pontjainak tekintve, milyen geometriai alakzatokat alkotnak az alábbi halmazok?

11. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 = 1\}$, **12.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \le 1\}$,
13. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ xy = yx\}$, **14.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ |x| < y \le 1\}$,
15. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4\}$,
16. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ x^2 + y^2 = 4 \text{ és } y \ge 0\}$,
17.$^\triangleright$ $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 6 \text{ és } 3x + 4y \le 22\}$,
18. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ;\ 0 \le x \le 2, \text{ és } 0 \le y \le x + 2\}$,
19. $\{(x_n, y_n) ;\ n \in \mathbf{N}^+,\ x_n = 2^{-n} \text{ és } y_n = 0\}$,
20. $\{(x_n, y_n) ;\ n \in \mathbf{N}^+,\ x_n = \frac{1}{n} \text{ és } y_n = \frac{1}{n^2}\}$,
21.$^\triangleright$ $\{(x, y) ;\ x = t^2,\ y = 3t^2,\ t \in \mathbf{R}\}$,
22. $\{(x, y) ;\ x = t^3,\ y = 3t^3,\ -1 \le t \le 2\}$,
23. $\{(x, y) ;\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 < t \le 2\pi\}$.

24. Az első évfolyamos hallgatók közül jelöljük M-mel a második tankörösöket, F-fel a fiúkat, A-val az angolul, N-nel a németül tudó (nyelvvizsgával rendelkező) diákokat. Az előbbi halmazok segítségével (a **D 2.4**-ben definiált halmazműveleteket felhasználva) fejezzük ki a következő halmazokat:
a) A második tankörös fiúk. b) Az angolul és németül tudók.
c) Az angolul vagy németül tudók. d) Az angolul vagy németül tudó fiúk.
e) A vagy angolul vagy németül tudók. f) A második tankörös lányok.
g) A németül tudó lányok. h) A németül nem tudó, második tankörös lányok.

25. Legyen $M = \{m, 2m, 3m, \ldots\}$ és $N = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, ahol m és n adott pozitív egész számok.
a) Milyen m és n esetén valódi része az M halmaz az N halmaznak?
b) Milyen m és n esetén része az M az N-nek?
c) Képezzük a két halmaz közös részét és egyesítését!

26. A következő egyenlőség jobb oldalát egészítsük ki a megfelelő halmazműveleti jellel úgy, hogy fennálljon az egyenlőség:

$$\{x ;\ x \in (A - B) \cup (B - A)\} = A \quad B\,.$$

27. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Válaszunkat igazoljuk!
a) Minden A, B halmazpárra $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$.
b) Minden A halmazra $A \subseteq A$.
c) Minden A halmazra $\emptyset \subset A$.
d) Van olyan A halmaz, hogy $A \subset \emptyset$.

28. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén

$$A - B \subseteq C \quad \text{és} \quad A \subseteq B \cup C$$

ekvivalens állítások (vagyis bármelyik teljesülése esetén a másik is fennáll).

29. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges L és M halmazok esetén az alábbi A, B, C állítások ekvivalensek:

$A:\ L \subseteq M;$
$B:\ L \cap M = L;$
$C:\ L \cup M = M.$

30. Legyen A, B és C három halmaz. Fejezzük ki a

$$D := A - (A - (B - (B - C)))$$

halmazt az A, B, C halmazokkal, valamint a metszés és egyesítés jelével! Ennek alapján döntsük el, mivel egyenlő D a következő esetekben:
a) Az A, B és C halmazok páronként közös elem nélküliek (diszjunktak).
b) Pontosan két diszjunkt halmaz van közöttük.
c) Nincs közöttük diszjunkt halmazpár.

31. A következő egyenlőség igaz-e tetszőleges K, L és M halmazokra:

$$(M \cup K) \cap L = (M \cup L) \cap K.$$

Ha igaz, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg három olyan halmazt, melyekre nem teljesül az előbbi egyenlőség.

32. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások tetszőleges K, L és M halmazok esetén teljesülnek:

a) $(K \cup L) - L \subseteq K$, b) $(K \cap L) - L \subseteq M$.

33. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C halmazokra $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq C$.

34. Igazoljuk, hogy az A és B halmazokra $A - B = B - A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A = B$.

35. Mely A, B halmazpárokra igaz az, hogy $A - B = A \cap B$?

36. Mely A, B halmazpárokra igaz az, hogy $A - B = A \cup B$?

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban adott összefüggések tetszőleges K, L és M halmazok esetén teljesülnek! Ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezéseket.

37. $K - (K - L) = L - (L - K)$,

38. $K - (L - M) = (K - L) \cup (K \cap M)$,

39. $(K \cap L) - (K - M) = K \cap L \cap M$,

40. $(K - L) - M = (K - M) - (L - M)$,

41.▷ $K = (K \cup L) \cap (K \cup \overline{L})$, **42.**▷ $K = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$,

43.• $K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,

44.• $(K - L) \cup (L - M) \cup (M - K) \cup (K \cap L \cap M) = K \cup L \cup M$,

45. $(K \cup L) \cap (L \cup M) \cap (K \cup M) = (K \cap L) \cup (L \cap M) \cup (K \cap M)$.

46.▷ Mutassuk meg, hogy az A és B halmazokra $A - B = A$ pontosan akkor teljesül, ha $B - A = B$.

47.▷ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén

$$A \ominus B \subseteq (A \ominus C) \cup (B \ominus C).$$

48.▷ Bizonyítsuk be, hogy $A \ominus B = A \cup B$ akkor és csak akkor teljesül, ha A és B diszjunkt halmazok!

Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazokra fennállnak az alábbi azonosságok:

49.▷ $(A \cap \overline{B}) \ominus (\overline{A} \cap B) = A \ominus B$, **50.** $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \ominus B$.

51.▷ Bizonyítsuk be, hogy a K, L, M és N halmazokra az alábbi egyenlőségek ekvivalensek, azaz vagy mindkettő fennáll, vagy egyik sem:

$$K \ominus L = M \ominus N \qquad K \ominus M = L \ominus N.$$

Adott A és B halmazokhoz határozzuk meg az összes olyan X halmazt, amelyre az alábbi egyenlet teljesül:

52.▷ $A - (B - X) = A$, **53.**▷ $(A - X) \cup B = X$,

54.▷ $(A - X) \cap (B - X) = A$, **55.**▷ $(A \cap X) \cup B = X$,

56.▷ $(A \cap B) \cup X = B \cup X$, **57.**▷ $A - X = X - A$.

58. Írjuk fel a $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

59.▷ Adjuk meg a $P(P(P(\emptyset)))$ halmaz elemeit!

Igazoljuk, hogy bármely A és B halmaz esetén

60.▷ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, **61.**▷ $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$,

62.▷ $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ akkor és csak akkor, ha $B \subseteq A$ vagy $A \subseteq B$.

Az alábbi feladatokban lévő halmazok mindegyikének véges sok eleme van. Jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát! Bizonyítsuk be az alábbi állítások helyességét:

63. $|A| \le |B|$, ha $A \subseteq B$, **64.** $|A \cup B| \le |A| + |B|$,

65. $|A \cap B| \le \min\{|A|, |B|\}$, **66.** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

67.• $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$,

68. $$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{i \ne j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \ne j \ne k \ne i} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

69. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelvet tudnak: 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául, 5 diák tud pontosan két nyelven és 2 diák tud mindhárom nyelven beszélni. Hányan nem tudnak egy idegen nyelvet sem, és hányan tudnak pontosan egy idegen nyelven beszélni?

70. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

71.* Hány eleme van egy n elemű A_n halmaz hatványhalmazának?

72.* Mutassuk meg, hogy nincs olyan A halmaz, amelyhez létezne A és $P(A)$ elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. (Útmutatás: tegyük fel, hogy van egy ilyen kölcsönösen egyértelmű $\varphi : A \to P(A)$ leképezés, és vizsgáljuk meg az $X := \{y \in A;\ y \notin \varphi(y)\}$ halmazt.)

73. Legyen $A = \{x \in \mathbf{R};\ 1 \leq x \leq 5\}$ és $B = \{y \in \mathbf{R};\ 3 \leq y \leq 4\}$. Az (x, y) számpárokat a sík pontjainak tekintve ábrázoljuk az $A \times B$ halmazt!

74. Legyen $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Soroljuk fel az $A \times B \times C$, az A^3 és a B^3 halmazok elemeit!

75. Az m elemű A halmaz és az n elemű B halmaz metszete egy k elemű halmaz. Hány eleme van az alábbi halmazoknak?
a) $A \times B$, b) $(A \cap B)^2$, c) $(A \cup B)^3$, d) $(A \setminus B)^2$, e) $(A \ominus B)^4$, f) $A \times B \times A$.

3. fejezet

Matematikai logika

Logikai műveletek, kvantorok

D 3.1 A P és Q elemi ítéletekre vonatkozó logikai alapműveleteket (**konjunkció** ($\wedge$), **diszjunkció** ($\vee$), **implikáció** ($\Rightarrow$), **ekvivalencia** ($\Leftrightarrow$), **negáció** ($\neg$)) táblázatos definíciói:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	P	$\neg P$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0		
0	0	0	0	1	1		

D 3.2 Két logikai kifejezést akkor és csak akkor tekintünk **azonosan egyenlőnek**, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele $\equiv$.

J 3.3 A $\forall x P(x)$ és a $\exists x P(x)$ jelölések kiejtése: „minden x-re (igaz, hogy) $P(x)$" és „van olyan x, hogy $P(x)$". A $\forall$ ill. a $\exists$ jel neve **univerzális** ill. **egzisztenciális kvantor**.

T 3.4 Azonosságok:

(1)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	asszociativitás
(2)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	kommutativitás
(3)	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$	idempotencia
(4)	$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	elnyelés
(5)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	disztributivitás
(6)	$P \wedge 1 \equiv P \quad P \wedge 0 \equiv 0$	$P \vee 1 \equiv 1 \quad P \vee 0 \equiv P$	
(7)	$P \wedge \neg P \equiv 0$	$P \vee \neg P \equiv 1 \qquad \neg(\neg P) \equiv P$	
(8)	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	De Morgan-azonosságok
(9)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$	
(10)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$		kontrapozíció
(11)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
(12)	$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$	$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$	kvantoros ítéletek tagadása

P 3.5 Bebizonyítjuk a $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ azonosságot (**T 3.4** (8)) a **D 3.1** segítségével. A táblázat kitöltésének lépéseit itt külön táblázatokban adjuk meg: 1) az értékpárok beírása, 2) a $\neg P$ értékének kiszámítása, 3) mindkét oldal kiszámítása.

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1		1			1		1
1		0			1		0
0		1			0		1
0		0			0		0

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1		1		0	1		1
1		0		0	1		0
0		1		1	0		1
0		0		1	0		0

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	**1**	1		0	1	**1**	1
1	**0**	0		0	1	**0**	0
0	**1**	1		1	0	**1**	1
0	**1**	0		1	0	**1**	0

Feladatok

Az alábbi feladatokban P igaz, Q hamis, R hamis és S igaz logikai értékű ítéletet jelöl. Határozzuk meg a következő összetett ítéletek logikai értékét:

1.▷ $(P \wedge Q) \wedge R$, **2.** $(P \wedge Q) \vee R$, **3.** $(P \vee Q) \vee R$,

4. $(Q \wedge P) \vee S$, **5.** $Q \wedge (P \vee S)$, **6.** $R \Rightarrow (Q \vee \neg P)$,

7. $P \Rightarrow (P \Rightarrow S)$, **8.** $P \Rightarrow (R \vee S)$,

9. $(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee S)$, **10.** $(R \wedge \neg S) \Leftrightarrow (Q \vee S)$,

11.▷ $S \Leftrightarrow (P \Rightarrow (\neg P \vee S))$, **12.** $(Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (R \vee \neg S))$.

13.• Az implikáció „Ha P, akkor Q" ($P \Rightarrow Q$) ítéletét írjuk le több módon, például az alábbi kifejezések felhasználásával: „implikálja", „maga után vonja", „szükséges feltétele", „elégséges feltétele", „csak akkor", ...

14. Ha egy n számú logikai változót tartalmazó kifejezés logikai értékét meg akarjuk határozni a változók minden lehetséges értéke mellett, akkor hány esetet kell megvizsgálni? Más szóval: a **P 3.5** példa szerint elkészített táblázatnak a vízszintes vonal alatt hány sora van, ha a logikai változók száma n?

15.▷ A p, q és r logikai változókból képezzük a következő két logikai kifejezést: $p \wedge (q \vee r)$ és $(p \wedge q) \vee r$. Azonosan egyenlők-e ezek a kifejezések?

Igazoljuk a következő azonosságokat táblázattal és/vagy a **T 3.4** tételbeli azonosságok felhasználásával:

16.• $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, (implikáció tagadása, **T 3.4** (8)),

17.▷ $p \wedge q$, **18.** $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$,

19.▷ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, **20.** $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$,

21. $(p \vee q) \equiv \neg p \Rightarrow q$, **22.** $\neg(p \wedge q) \equiv p \Rightarrow \neg q$,

23. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$, **24.** $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv 1$,

25. $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$, **26.** $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$,

27. $\neg\left[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)\right] \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,

28. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv [\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$,

29.▷ $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$,

30. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

31. $\neg(((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Állítsuk elő az alábbi ítéleteket a logikai műveletek és tovább már nem bontható elemi ítéletek segítségével, majd ahol lehet, azonosságok alkalmazásával hozzuk egyszerűbb alakra:

32. „Márta nem szőke."

33. „Nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz."

34.▷ „Esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár."

35. „Éva vagy Pista ott volt."

36. „Ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez."

37. „Elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj."

38. „Kizárt, hogy se matekból, se fizikából ne menjek át elsőre."

39. „Ha a szemtanú megbízható, és az ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor téved az írásszakértő."

40. „Szivárvány csak akkor van, ha esik az eső, a Nap is süt, de nincs dél."

A dőlt betűs mondatok mindegyike tekinthető két elemi ítélet logikai függvényének. Írjuk fel e függvények logikai értékeit táblázat segítségével! (Vigyázzunk, a 'vagy' szót a hétköznapi beszédben többféle értelemben is használjuk.)

41. *Az n egész szám vagy páros, vagy páratlan.*

42. – Megyünk ma kirándulni és strandolni?
– *Vagy kirándulni megyünk, vagy strandolni.*

43. – Melyik állomás következik?
– *Vagy Ecser, vagy Maglód.*

A következő feladatokban $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $H(x)$ jelentse a következő, x-től függő, $S(x,y)$ pedig az x, y változóktól függő ítéleteket, ahol x és y pozitív egész számok:

$T(x)$: x prímszám; $P(x)$: x páros szám; $S(x,y)$: x osztója y-nak.

Mi az alábbi ítéletek logikai értéke:

44. $T(7)$, 45. $T(2) \wedge P(2)$, 46. $\exists x T(x)$,

47. $\forall y \exists x\, S(x,y)$, 48. $\exists x T(x) \wedge P(x))$, 49. $\forall x T(x)$,

50. $\forall y (S(2,y)) \Rightarrow P(y))$, 51. $\exists x\, \exists y\, (S(x,y) \Rightarrow y < x)$,

52. $\forall x \forall y (S(x,y) \Rightarrow x \leq y)$, 53.* $\exists x\, (S(6,x) \Rightarrow T(x))$.

Jelöljön x egy tetszőleges négyszöget. Tekintsük a következő ítéleteket:
$p(x)$: az x négyszög húrnégyszög;
$q(x)$: az x négyszög téglalap;
$r(x)$: az x négyszög szemközti szögeinek összege 180°;
$s(x)$: az x négyszög átlói felezik egymást.

Fogalmazzuk meg a következő összetett ítéleteket, majd határozzuk meg azok logikai értékét:

54. $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$, 55. $\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$, 56. $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$,

57. $\forall x[p(x) \Leftrightarrow r(x)]$, 58. $\forall x[q(x) \Rightarrow s(x)]$, 59. $\forall x[\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)]$,

60. $\forall x[(p(x) \wedge \neg q(x)) \Rightarrow s(x)]$.

Írjuk fel logikai műveletek és kvantorok segítségével az alábbi ítéleteket, majd fogalmazzuk meg mindegyik tagadását a **T 3.4** (12) azonosság felhasználásával:

61.ᵖ „Minden ajtón van kilincs."

62.ᵖ „Nem mind molnár, ki szekercét fog hóna alá." (közmondás)

63. „Ki nem szólt, csak bégetett,/ az kapott dicséretet." (Weöres Sándor)

64.* „Minden pozitív ε számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy bármely x valós számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$."

65. „Mindig fázom, ha fúj a szél."

Logikai műveletek kapcsolata a halmazműveletekkel

M 3.6 Halmazokhoz természetes módon hozzárendelhetünk logikai ítéleteket. Legyen H az alaphalmaz, és legyen abban P egy halmaz. Valamely $x \in H$ elemre $p(x)$ logikai értéke legyen igaz, ha $x \in P$, és hamis, ha $x \notin P$, azaz $p(x)$ legyen maga az $x \in P$ ítélet.
A $\neg p(x)$ negáció halmazelméleti megfelelője a P halmaz H-ra vonatkozó komplementere.
Definíció szerint a $p(x)$ és $q(x)$ logikai értékekre a $p(x) \wedge q(x)$ **konjunkció** akkor és csak akkor igaz, ha $p(x)$ igaz, és $q(x)$ is igaz. Ugyanakkor, valamely x dologra $x \in P \cap Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in P$ és $x \in Q$. Ezek alapján mondhatjuk, hogy a $p(x) \wedge q(x)$ konjunkció halmazelméleti megfelelője a $P \cap Q$, és fordítva. Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy a **diszjunkció** halmazelméleti megfelelője a halmazok egyesítése. E megfeleltetéseket képletekkel is felírva:

$$(x \in \overline{P}) \equiv \neg(x \in P) \equiv \neg p(x),$$

$$(x \in P \cap Q) \equiv (x \in P) \wedge (x \in Q) \equiv p(x) \wedge q(x),$$

$$(x \in P \cup Q) \equiv (x \in P) \vee (x \in Q) \equiv p(x) \vee q(x).$$

Fordítva, egy $p(x)$ logikai ítélethez hozzárendelhetünk egy P halmazt a következő módon: legyen H azon x dolgok halmaza, amelyekre p igaz vagy hamis értéket vesz fel; és legyen P a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre $p(x)$ igaz. Ilyen módon minden logikai kifejezés átírható halmazelméleti formulára, és így ábrázolható Venn-diagrammal. Például, ha $p(n)$ az az ítélet, hogy „az n szám páros", akkor H-nak választhatjuk az egész számok halmazát, és ekkor a $p(n)$ ítéletnek megfelelő P halmaz a páros számok halmaza, vagyis a $p(n)$ ítélet megegyezik az $n \in P$ ítélettel. Az 1-gyel jelölt azonosan igaz ítélet halmazelméleti megfelelője a H alaphalmaz, a 0-val jelölt azonosan hamis ítéleté pedig az üres halmaz.

Feladatok

Írjuk fel és ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az alábbi logikai kifejezések halmazelméleti megfelelőit, ha a $p(x)$, $q(x)$ és $r(x)$ ítéleteknek a P, Q és R halmazok felelnek meg.

66.* $p(x) \Rightarrow q(x)$, **67.** $p(x) \Leftrightarrow q(x)$,

68. $p(x) \vee \neg(q(x) \wedge r(x)) \equiv p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x)$,

69. $p(x) \vee (q(x) \wedge r(x)) \equiv (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))$,

70. $p(x) \Rightarrow 0 \equiv \neg p(x)$,

71. $[(p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee \neg q(x))] \vee [(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(x))] \equiv 1$.

Ha a $p(x)$ és $q(x)$ $(x \in H)$ ítéleteknek a P és Q halmazok felelnek meg, akkor milyen halmazok közti összefüggések, illetve relációk felelnek meg az alábbi kvantoros kifejezéseknek:

72. $\forall x\, p(x)$, **73.** $\forall x\, \neg p(x)$, **74.** $\exists x\, p(x)$,

75. $\forall x\, (p(x) \Leftrightarrow q(x))$, **76.?** $\forall x\, (p(x) \Rightarrow q(x))$, **77.** $\neg \exists x\, (p(x) \wedge q(x))$.

Melyek azonosságok az alábbi egyenlőségek közül:

78. $\forall x\,(p(x) \wedge q(x)) = (\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x))$,

79. $\forall x\,(p(x) \vee q(x)) = (\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$.

A következő feladatokban megadott halmazelméleti azonosságokat logikai műveletek és azonosságok segítségével igazoljuk:

80.$^{\triangleright}$ $(P \cup Q) \cap (P \cup R) \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)$.

81. $P - (Q \cap R) \equiv (P - Q) \cup (P - R)$.

82. $(P \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) \cap (\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q}) \equiv \emptyset$.

83. $(P \cap \overline{Q}) \ominus (\overline{P} \cap Q) \equiv P \ominus Q$.

84. $P \cup Q \cup R \equiv (P - Q) \cup (Q - R) \cup (R - P) \cup (P \cap Q \cap R)$.

85.* Tudjuk, hogy $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$ (l. **25.** feladat). Hogyan lehet, hogy az alábbi állítás mégsem azonosan igaz: „ha esik az eső, akkor fúj a szél, vagy ha fúj a szél, akkor esik az eső."

86.$^{\triangleright}$ Kontrapozíció alkalmazásával igazoljuk, hogy ha n és m olyan pozitív egészek, hogy $n + m \geq 49$, akkor $n \geq 25$, vagy $m \geq 25$.

87. A hét mely napjain igaz és mely napjain hamis az alábbi két állítás:
(1) „Ha ma kedd van, akkor holnap szerda",
(2) „Ha ma kedd van, akkor holnap szombat"!

Az $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ állítást egymás megfordításainak nevezzük. Írjuk fel az alábbi matematikai állítások megfordítását, és döntsük el mindegyikről, igaz-e vagy nem:

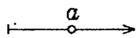
88. „Ha egy természetes szám osztható ab-vel, akkor osztható a-val is és b-vel is".

89. „Ha két négyszög egybevágó, akkor megfelelő oldalaik egyenlők egymással".

90. „Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik négyzetével".

Logikai áramkörök

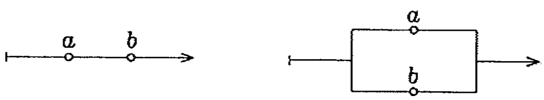
M 3.7 Az $A, B, C, \ldots$ betűk jelöljenek kétpólusú kapcsolókat. Legyenek $a, b, c, \ldots$ rendre az előbbi kapcsolókhoz rendelt logikai változók a következő megállapodással: az a logikai változó értéke igaz, ha az A kapcsoló be van kapcsolva, azaz képes az áram vezetésére, és hamis, ha nincs bekapcsolva, azaz nem képes az áram vezetésére. Az A kapcsolót a hozzá tartozó logikai értékkel a következő módon jelöljük:



Hasonlóan definiáljuk a $b, c, \ldots$ logikai változókat is. Az $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c, \ldots$ jelű kapcsolókból soros és párhuzamos kapcsolással összekapcsolt áramkört logikai, vagy kapcsoló áramkörnek nevezzük. Ha több kapcsoló is a jelű, akkor ezek mindig azonos állásúak, míg egy a és egy $\neg a$ jelű mindig ellenkező állású. Az $a, b, c, \ldots$ változókat tartalmazó ítélet akkor tartozik az $A, B, C, \ldots$ kapcsolókból álló áramkörhöz, ha az ítélet pontosan akkor igaz, amikor az áramkör vezeti az áramot.

Feladatok

91.* Milyen logikai ítélet felel meg az A és B kapcsolók soros illetve párhuzamos kapcsolásával kapott áramköröknek?



Az alábbi logikai kifejezésekhez milyen áramkörök tartoznak:

92. $a \Rightarrow b$,

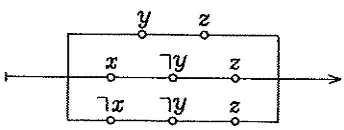
93. $a \Leftrightarrow b$,

94. $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b)$,

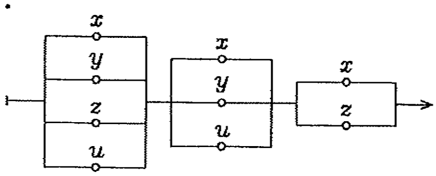
95. $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

Írjuk fel az alábbi két kapcsoló áramkörhöz tartozó logikai kifejezéseket, hozzuk egyszerűbb alakra, és ennek alapján rajzoljuk fel az eredetivel ekvivalens, de egyszerűbb kapcsoló áramkört:

96.



97.



98. Készítsünk kapcsoló áramkört egy négyszemélyes szavazógépre, mely a „többség dönt" elvét követi, — azaz vezeti az áramot, ha legalább három kapcsoló be van kapcsolva, — döntetlen esetén pedig egy kitüntetett (elnöki) kapcsoló állásának megfelelően működik.

4. fejezet

Vektoralgebra

Vektorok összeadása, kivonása és számmal szorzása

T 4.1 (**Háromszögegyenlőtlenség**) Minden a, b vektorpárra

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\,.$$

T 4.2 (**Paralelogrammaszabály**) Ha az a és b vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az a és b vektorral, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának az az átlóvektora, amely az összeadandók közös kezdőpontjából indul ki.

Feladatok

1. Adott az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorpár. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
   a) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; b) $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; c) $\mathbf{e} = \mathbf{a}\sqrt{2} - \mathbf{b}\sqrt{3}$; d) $\mathbf{f} = \mathbf{a}\sqrt{5} - 2\mathbf{b}$.
2. Legyen $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral a következő vektorokat:
   a) $3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$; b) $4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$; c) $2\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{n}$; d) $3\mathbf{m} + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{n}$.
3. Legyen $\mathbf{m} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ vektorral a következő vektorokat:
   a) $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$; b) $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; c) $-\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b}$; d) $2\mathbf{a} - \sqrt{3}\mathbf{b}$.
4. Legyen a szabályos $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög köré írt kör középpontja O. Fejezzük ki az $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $\overrightarrow{A_6A_1}$ oldalvektorokat az $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{b}$ vektorokkal, és számítsuk ki az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_6}$ összeget!
5. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert. Határozzuk meg a következő összegeket:
   a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.
6. Legyen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n számú (nem szükségképpen különböző) pont. Egyetlen vektorral adjuk meg az $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ összeget:
7.ᴾ Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor lehetnek egy (esetleg szakasszá, vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha vagy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, vagy ha valamelyikük előállítható a másik kettő összegeként!

8. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, melynek oldalvektorai: $\mathbf{a}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\frac{3}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$.
9. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan háromszög, amelynek oldalvektorai a $2\mathbf{a}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ vektorok!
10. Legyen $\mathbf{a}$ $(\neq \mathbf{0})$ tetszőleges vektor. Írjuk fel azokat az egységvektorokat, amelyek $\mathbf{a}$-val egyező állásúak!
11. Az $\mathbf{a}$ $(\neq \mathbf{0})$ és $\mathbf{b}$ $(\neq \mathbf{0})$ vektorok merőlegesek egymásra. Írjuk fel azt az egységvektort, amely komplanáris az adott vektorokkal, és felezi azok szögét!
12. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyállású vektorok, akkor a következő egyenlőségek közül legalább az egyik igaz: $|\mathbf{a}|\mathbf{b}+|\mathbf{b}|\mathbf{a}=\mathbf{0}$; $|\mathbf{a}|\mathbf{b}-|\mathbf{b}|\mathbf{a}=\mathbf{0}$.
13. Az alábbi feladatokban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak milyen feltételt kell kielégíteni, hogy teljesüljön a leírt kikötés?
a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, c) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$,
d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$, e) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$, f) $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ $(\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{b}\neq\mathbf{0})$,
g) Az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor felezze az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét.
14.ᐅ Az $A_1A_2A_3A_4A_5$ szabályos ötszög köré írt kör középpontja legyen az O pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\mathbf{0}$.
15. Az $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$ szabályos n-szög köré írt kör középpontja legyen az O pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$.
16.ᐅ Egy háromszög oldalainak felezőpontjai adva vannak. A felezőpontoknak a háromszög síkjában felvett valamely O pontra vonatkozó helyvektorai segítségével fejezzük ki a háromszög egyik csúcsának helyvektorát, és ezt az összefüggést felhasználva szerkesszük meg a háromszöget!
17.ᐅ Az előző feladatban leírt módon dolgozzunk ki eljárást síkszög szerkesztésére, ha ismerjük oldalainak felezőpontjait!
18. Egy páratlan oldalszámú síksokszögben ismerjük az oldalak felezőpontjait. A 16. feladatban leírt módon adjunk meg eljárást a sokszög megszerkesztésére!
19. Legyen az ABC háromszög két oldalvektora $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$. Fejezzük ki $\mathbf{b}$-vel és $\mathbf{c}$-vel a háromszög súlyvonalvektorait!

A továbbiakban kitűzött bizonyításokat vektoralgebrai módszerekkel végezzük el.

20. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög súlyvonalaival, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög!
21. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalaival szerkesztett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoznak meg!
22. Legyen $A_1A_2A_3A_4$ egy síknégyszög. Jelölje F_1 az A_1A_2, F_2 az A_2A_3, F_3 az A_3A_4 és F_4 az A_4A_1 oldal felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma!
23. Legyen A, B, C és D a tér négy pontja. Jelölje K az AD szakasz, L pedig a BC szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

24.* A P pont az AB szakaszt $\left|\overrightarrow{AP}\right| : \left|\overrightarrow{PB}\right| = m : n$ arányban osztja. Legyen O a tér tetszőleges pontja. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével!

25.* Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban, harmadolva metszik egymást!

26. Legyen O a tér tetszőleges pontja. Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontjába mutató $\overrightarrow{OS}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, és $\overrightarrow{OC}$ vektorokkal kifejezve!

27. Az ABC háromszög $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ oldalvektoraival fejezzük ki az S súlypontba mutató $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ és $\overrightarrow{CS}$ vektorokat, és számítsuk ki ezek összegét!

28.* Igazoljuk, hogy az S pont akkor és csak akkor súlypontja az ABC háromszögnek, ha $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$.

29.* Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ egy sík két háromszöge. Súlypontjaikat jelölje rendre S, illetve S_1. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{SS_1}$.

30.* Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy két (nem szükségképpen ugyanabban a síkban fekvő) háromszög súlypontja közös legyen!

31.* Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és negyedelve metszik egymást!

32.* Igazoljuk, hogy ha $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ két, tetszőleges térbeli helyzetű paralelogramma, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 szakaszok felezőpontjai szintén egy paralelogramma csúcsai!

33.* Adva van az $ABCD$ paralelogramma. A tér tetszőleges O pontjának a tükörképe az A pontra legyen O_1, ennek tükörképe a D-re pedig O_2. Tükrözzük az O pontot a B csúcsra is, majd ezt a tükörképet a C-re. Az így kapott tükörképek legyenek rendre O_3 és O_4. Bizonyítsuk be, hogy O_2 és O_4 egybeesik!

34.* Legyen A, B, C és D a tér négy pontja, és O egy tetszőleges pont. Tükrözzük az O pontot az A ponton, majd ezt az O_1 tükörképet a D-n. A másodszori tükörkép legyen O_2. Tükrözzük az O pontot a B ponton is, majd ezt a tükörképet a C-n. Az így kapott tükörképek legyenek rendre O_3 és O_4. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C és D pontok akkor és csak akkor csúcsai egy paralelogrammának, ha O_2 és O_4 egybeesik!

Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége; vektor koordinátái

D 4.3 Valamely $\mathbf{b}$ vektorról akkor mondjuk, hogy előállítható az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_r$ vektorok **lineáris kombináció**jaként, ha találhatók olyan k_1, k_2, …, k_r valós számok, hogy $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r$.

D 4.4 Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ vektorrendszert **lineárisan független**nek nevezzük, ha a $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ egyenlőség csak a $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ értékekkel teljesül.

T 4.5 Két vektor akkor és csak akkor egyező állású, ha legalább egyikük a másik számszorosa, mégpedig, ha **a** és **b** egyező állásúak és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor van olyan $k \in \mathbf{R}$, hogy $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$.

T 4.6 Ha két vektor nem kollineáris, akkor a velük komplanáris bármely vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű.

T 4.7 Három vektor akkor és csak akkor komplanáris, ha van közöttük olyan, amelyik a másik kettőnek lineáris kombinációja.

T 4.8 Három, nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora előállítható, és ez az előállítás egyértelmű.

T 4.9 Ha az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely

$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \ldots + p_r\mathbf{a}_r = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_r\mathbf{a}_r$$

egyenlőség csak úgy teljesülhet, hogy $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_r = q_r$.

T 4.10 Legalább két vektorból álló rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a rendszer egyetlen eleme sem állítható elő a többiek lineáris kombinációjaként.

D 4.11 Vegyük fel, közös kezdőponttal, a páronként egymásra merőleges, egységnyi hosszúságú **i**, **j**, **k** kötött vektorokat úgy, hogy ebben a sorrendben jobbrendszert alkossanak. A **T 4.8** tétel értelmében a tér bármely **v** vektorához megadható egyetlen olyan a, b, c valós számhármas, hogy $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Az a, b, c számokat a **v** vektor ($\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ alapvektor-rendszerre vonatkozó) **koordinátáinak** nevezzük. Azt, hogy a, b, c a **v** koordinátái, így jelöljük:

$$\mathbf{v} = [a, b, c] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

T 4.12 Ha $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ és k adott szám, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \quad \text{és} \quad k\mathbf{a} = [ka_1, ka_2, ka_3].$$

Az **a** és **b** vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.
Megjegyzés: A vektor koordinátái függnek az alapvektorok megválasztásától. Az előbbi (és a később felírandó) minden koordinátás egyenlőség természetesen úgy értendő, hogy az egyenlőségben szereplő vektorok koordinátái ugyanarra az alapvektor-rendszerre vonatkoznak.

Feladatok

35.$^{\triangleright}$ Tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Legyen

$$\mathbf{v} = p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} \quad \text{és} \quad \mathbf{w} = q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b} + q_3\mathbf{c}$$

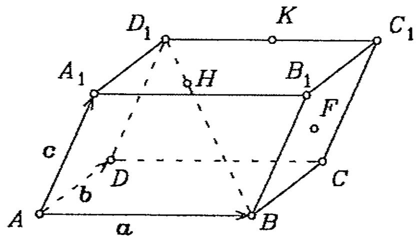
az **a**, **b**, **c** vektorok két olyan lineáris kombinációja, ahol $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy **v** és **w** akkor és csak akkor kollineáris (egyező állású), ha $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_3}{q_3}$.

36. Az alábbi feladatokban megadott **v** és **w** vektorok az α és β paraméterek mely értékeinél kollineárisak, ha az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független?

a) $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{w}=4\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$,
b) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, $\mathbf{w}=2\mathbf{a}+8\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$,
c) $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=4\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}+2\mathbf{c}$,
d) $\mathbf{v}=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$,
e) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=3\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
f) $\mathbf{v}=5\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+3c$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
g) $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
h) $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+4\alpha\mathbf{b}+2\mathbf{c}$,
i) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$,
j) $\mathbf{v}=3\mathbf{a}-3\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

37. Legyen az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független-e. Állításainkat igazoljuk!
a) $\mathbf{r}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=5\mathbf{a}-3\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{0}$,
b) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=-2\mathbf{a}-2\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
c) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$,
d) $\mathbf{r}=\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
e) $\mathbf{r}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}-3\mathbf{c}$,
f) $\mathbf{r}=\mathbf{a}$, $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
g) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=-\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
h) $\mathbf{r}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

38. Az ábrán egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedont adtunk meg. A F pont az BCC_1B_1 lap középpontját, a H a BD_1 testátló D_1-hez közelebbi negyedelő pontját és a K pont a C_1D_1 él felezőpontját jelöli. A koordinátáival adott $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}=[4,2,-3]$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}=[5,6,-2]$ és $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}=[1,4,-3]$ vektorok lineáris kombinációjaként adjuk meg, és ezt felhasználva koordinátáikkal is írjuk fel, a következő vektorokat: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HK}$.



39. Az $ABCD$ tetraéder A csúcsából kiinduló három élvektor $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}=[4,3,-2]$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}=[2,-1,5]$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}=[6,4,9]$. Állítsuk elő a B csúcsból kiinduló három élvektor lineáris kombinációjaként az ACD lap S_B súlypontjába, illetve a tetraéder S súlypontjába mutató $\overrightarrow{BS_B}$, illetve $\overrightarrow{BS}$ vektort. Írjuk fel ezeket a vektorokat koordinátás alakban is!

40. Legyen O a tér adott pontja. Vegyük fel az A, B és C pontokat úgy, hogy azok egy egyenesre illeszkedjenek, és az A ne essék egybe a B ponttal. A következő feladatokban, a koordinátáikkal adott $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ vektort a megadott feltétel mellett. Számítsuk ki a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáit is!

a) $\mathbf{a} = [3,4,2]$, $\mathbf{b} = [1,5,7]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 2$,
b) $\mathbf{a} = [4,3,-2]$, $\mathbf{b} = [2,2,4]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 2 : 1$,
c) $\mathbf{a} = [-3,2,5]$, $\mathbf{b} = [0,4,1]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 1$,
d) $\mathbf{a} = [a_1,a_2,a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1,b_2,b_3]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = m : n$.

41. Az ABC háromszögben az AB, a BC és a CA oldal felezőpontját jelöljük rendre D-vel, E-vel és F-fel. Legyen O a tér tetszőleges pontja és S a háromszög súlypontja. Adva vannak a $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = [4,3,-2]$, $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE} = [2,1,-3]$ és $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = [3,2,-7]$ vektorok. Állítsuk elő a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS}$ vektorokat! Számítsuk ki a koordinátákat is !

42. Az $ABCD$ tetraéderben az ABC, az ABD és az ACD lap súlypontját jelöljük rendre S_1-gyel, S_2-vel és S_3-mal. Az $\mathbf{s}_1 = \overrightarrow{AS_1} = [3,1,4]$, $\mathbf{s}_2 = \overrightarrow{AS_2} = [2,2,-2]$ és $\mathbf{s}_3 = \overrightarrow{AS_3} = [1,3,4]$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a tetraéder S súlypontjába mutató $\overrightarrow{AS}$, a BCD lap S_4 súlypontjába mutató $\overrightarrow{AS_4}$ vektort, valamint az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{CD}$ élvektorokat! Számítsuk ki a koordinátáikat is!

43. Az alábbi feladatokban szereplő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat (az $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ alapvektorrendszerre vonatkoztatott) koordinátáikkal adtuk meg. Fejezzük ki a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!
a) $\mathbf{a} = [1,1,0]$, $\mathbf{b} = [1,-1,0]$, $\mathbf{c} = [1,1,-1]$, $\mathbf{v} = [3,5,7]$,
b) $\mathbf{a} = [1,0,0]$, $\mathbf{b} = [0,1,0]$, $\mathbf{c} = [1,1,0]$, $\mathbf{v} = [2,1,3]$,
c) $\mathbf{a} = [1,0,0]$, $\mathbf{b} = [1,1,1]$, $\mathbf{c} = [0,0,1]$, $\mathbf{v} = [3,1,-2]$.

44.* Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ közös kezdőpontú komplanáris vektorok, de $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ne legyen kollineáris. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha a $\mathbf{c}$ vektornak $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ alakú előállításában az α és β konstansokra $\alpha + \beta = 1$ teljesül.

45. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok kezdőpontjai egybeesnek, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem komplanárisak. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy síkon, ha a $\mathbf{d}$ vektornak $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ alakú előállításában az α, β és γ konstansokra $\alpha + \beta + \gamma = 1$ teljesül.

46. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, közös kezdőpontú, nem kollineáris vektor. Milyen esetben felezi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral közös kezdőpontú $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét?

47.▷ Vektorok segítségével igazoljuk, hogy a háromszög bármelyik belső szögének felező egyenese a szöggel szemben fekvő oldalt a másik két oldal arányában osztja.

48.▷ Az ABC háromszög AC oldalát a B csúcsnál lévő belső szög felező egyenese a D pontban metszi. Állítsuk elő a $\overrightarrow{BD}$ szögfelező vektort a $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

49.$^{\triangleright}$ Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a C csúcsból kiinduló magasságvonal a D pontban metszi. A $\overrightarrow{CD}$ magasságvektort állítsuk elő a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CA}$ befogóvektorok lineáris kombinációjaként!

50.* Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja az E, a CD oldalé az F pont. Az AE és BF szakaszok metszéspontját jelöljük M-mel. Állítsuk elő az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

Vektorok skaláris szorzata

D 4.13 Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$-vel jelöljük, és azon a következő számot értjük: $\mathbf{ab} := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{ab})\angle$. Egy $\mathbf{a}$ vektor önmagával képezett skaláris szorzatát az $\mathbf{a}$ vektor négyzetének is nevezzük, és ennek megfelelően $\mathbf{a}^2$-tel is jelöljük.

T 4.14 Ha $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ és $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$, akkor $\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

T 4.15 Tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$. Ha $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, akkor $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

T 4.16 Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor zérus, ha a két vektor merőleges egymásra.

T 4.17 Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor az $\mathbf{ea}$ skaláris szorzat abszolút értéke egyenlő az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ irányába eső merőleges vetületének hosszával. Ha az $\mathbf{ea}$ szorzat nem zérus, akkor előjele aszerint pozitív, illetve negatív, hogy az előbbi vetületi vektor iránya megegyező, vagy ellentétes az $\mathbf{e}$ irányával.

Feladatok

51.$^{\triangleright}$ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük: $|\mathbf{a}| = 3$ és $|\mathbf{b}| = 4$. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatok értékét!
a) $\mathbf{ab}$. b) $\mathbf{a}^2$. c) $\mathbf{b}^2$. d) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$.
e) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$. f) $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$. g) $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})^2$.

52. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok abszolút értéke rendre 3, 5 és 8. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges egymásra, a $\mathbf{c}$ vektor pedig mindkettővel 120°-os szöget zár be. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatokat:
a) $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{b}+3\mathbf{c})$. b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$. c) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-3\mathbf{c})^2$.

53.$^{\triangleright}$ Tegyük fel, hogy az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ olyan egységvektorok, amelyekre $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ teljesül. Számítsuk ki az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ összeg értékét!

54. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok abszolút értékei: $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, továbbá $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Számítsuk ki az $\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{bc}$ összeg értékét!

55. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{c}$ vektorok páronkénti szöge 60°, abszolút értékeik: $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$ és $|\mathbf{c}| = 6$. Számítsuk ki az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektor abszolút értékét!

56. Bizonyítsuk be a következő azonosságot: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$. Mi ennek az azonosságnak a geometriai jelentése?

57. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra $-|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \le \mathbf{ab} \le |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$. Milyen esetekben teljesül az egyenlőség?

58. Az $\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}\ne 0$) vektorok az α paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra?

59.$^{\triangleright}$ Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{ab})/\mathbf{a}^2$ ($\mathbf{a}\ne 0$) vektor merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra!

60. Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ vektor merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra!

61.$^{\triangleright}$ Milyen feltételt kell az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak kielégíteni ahhoz, hogy az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

62.$^{\triangleright}$ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $30°$. Abszolút értékük: $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ és $|\mathbf{b}| = 1$. Számítsuk ki az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok szögét!

63. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, a zérusvektortól különböző vektor. Határozzuk meg a két vektor szögének koszinuszát, ha
a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$; b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

64.$^{\triangleright}$ Ha az $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ vektorra, akkor mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögének koszinusza?

65. Legyen $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ és a két vektor szöge $120°$. A t paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra a $t\mathbf{a}+17\mathbf{b}$ és a $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok?

66.$^{\triangleright}$ Mi jellemzi azokat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}\ne 0$, $\mathbf{b}\ne 0$) vektorpárokat, amelyekre teljesül az, hogy az $\mathbf{a}$-nak a $\mathbf{b}$ irányába eső merőleges vetülete ugyanolyan hosszú, mint a $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ irányába eső merőleges vetülete?

67.$^{\bullet}$ Legyen O a tér adott pontja, $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ egységvektor és k egy pozitív konstans. Hol helyezkednek el azok a X pontok, amelyekkel $\mathbf{e}\cdot\overrightarrow{OX} = k$?

68. Számítsuk ki a megadott vektorok hajlásszögének koszinuszát!
a) $[3,1,3]$, $[1,-2,2]$. b) $[2,3,-1]$, $[-1,1,6]$. c) $[4,2,-3]$, $[3,6,8]$.

69. Milyen z szám esetén merőleges a $\mathbf{b} = [6,-2,z]$ vektor az $\mathbf{a} = [2,-3,1]$ vektorra?

70. A következő feladatokban megadott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok valamelyik koordinátája egy t paraméterrel egyenlő. A két vektor szöge a t mely értékénél lesz az adott α szög?
a) $\mathbf{a} = [1,t,1]$, $\mathbf{b} = [-1,2,1]$, $\alpha = 60°$,
b) $\mathbf{a} = [1,t,1]$, $\mathbf{b} = [+1/2,1,+1]$, $\alpha = 45°$,
c) $\mathbf{a} = [t,1,2]$, $\mathbf{b} = [0,-1,1]$, $\alpha = 90°$.

71. Számítsuk ki annak az $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris az $\mathbf{a} = [2,1,-1]$ vektorral és kielégíti az $\mathbf{ax} = 3$ egyenletet!

72. Legyen $\mathbf{a} = [1,0,-1]$ és $\mathbf{b} = [1,1,-1]$. Határozzuk meg azokat az $\mathbf{e}$ egységvektorokat, amelyekre

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{e})_{\angle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \cos(\mathbf{b},\mathbf{e})_{\angle} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

73.$^{\bullet}$ Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a $\mathbf{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges $\mathbf{b}$-re! Számítsuk ki e két vektort, ha pl. $\mathbf{a} = [3,2,2]$ és $\mathbf{b} = [4,-2,2]$!

74. Adva vannak az $\mathbf{a} = [1,0,1]$, $\mathbf{b} = [1,2,2]$ és $\mathbf{c} = [-1,2,1]$ vektorok. Merőlegesen vetítsük a $\mathbf{c}$ vektort mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektor egyenesére. Határozzuk meg a két vetületvektor összegét!

75. Az alábbiakban megadott vektorpárok közül melyik lehet rombusznak és melyik lehet téglalapnak két szomszédos oldalvektora?
a) $\mathbf{a}=[3,5,-4]$, $\mathbf{b}=[2,-10,-11]$,
b) $\mathbf{a}=[1,-10,-7]$, $\mathbf{b}=[2,5,-11]$,
c) $\mathbf{a}=[3,1,-2]$, $\mathbf{b}=[2,1,1]$.

76. Számítsuk ki annak a 6 egységnyi hosszú $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris a $[2,-1,2]$ vektorral és tompaszöget zár be a $[0,0,1]$ vektorral!

77. Számítsuk ki annak az $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely eleget tesz a következő feltételeknek:
1.) $\mathbf{x}$ merőleges az $\mathbf{a} = [1,1,-1]$ és $\mathbf{i} = [1,0,0]$ vektorokra;
2.) $\mathbf{x}$ abszolút értéke 2;
3.) $\mathbf{x}$ hegyesszöget zár be a $\mathbf{j} = [0,1,1]$ vektorral.

78. Számítsuk ki az $\mathbf{x}$ vektor koordinátáit, ha $\mathbf{x}$ merőleges a $[2,3,-1]$ és $[1,-2,3]$ vektorokra és kielégíti az $\mathbf{x}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -6$ egyenletet!

79.$^\triangleright$ Adva vannak az $\mathbf{a} = [7,-1,0]$, $\mathbf{b} = [3,-4,5]$ és $\mathbf{c} = [4,3,5]$ vektorok. Számítsuk ki azon $\mathbf{x}$ egységvektorok koordinátáit, melyek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal egyenlő szöget zárnak be! Határozzuk meg e szögek koszinuszait is!

80.$^\triangleright$ A $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$ vektor merőleges vetületének hossza az $\mathbf{a} = [3,4]$ vektor egyenesén 1, a $\mathbf{b} = [1,1]$ vektorén $\sqrt{2}$. Számítsuk ki $\mathbf{v}$ koordinátáit!

81. A $\mathbf{v}$ vektor merőleges vetületének hossza az $[1,-1,1]$, $[2,0,1]$, $[1,1,2]$ vektorok egyenesein rendre $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. Határozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektort!

82. Az $\mathbf{e}$ egységvektor merőleges vetületének hossza mind az $[1,1,0]$, mind a $[0,1,1]$ vektor egyenesén $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Határozzuk meg az $\mathbf{e}$ vektort!

83. Az $\mathbf{m}$ vektor abszolút értéke $\sqrt{10}$ és $\mathbf{m}$ merőleges mind az $\mathbf{a} = [-1,3,1]$, mind a $\mathbf{k} = [0,0,1]$ vektorra. Határozzuk meg az $\mathbf{m}$ vektort!

84.$^\bullet$ Igazoljuk, hogy bármely $ABCD$ tetraéderre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

85. Az előző feladat állítására támaszkodva igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két kitérő élpárjának két-két egyenese merőleges egymásra, akkor a harmadik kitérő élpár egyenesei is merőlegesek egymásra.

86.$^\triangleright$ Vektoralgebrai módszerekkel bizonyítsuk be Thales tételét!

87.$^\triangleright$ Igazoljuk, hogy a paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege egyenlő az éleinek négyzetösszegével!

88. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}$ vektor merőleges a nem komplanáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok mindegyikére, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

89.* Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder magasságvonalai akkor és csak akkor tartalmaznak egy közös pontot (magasságpontot), ha a tetraéder szemközti élvektorai merőlegesek egymásra.

Vektorok vektori szorzása

D 4.18 A háromdimenziós a és b vektorok **vektori szorzatát** így jelöljük: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, és ezen azt a vektort értjük, amelynek
1.) abszolút értéke: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| := |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$,
2.) állása a-ra és b-re merőleges,
3.) iránya pedig olyan, hogy a, b és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ebben a sorrendben, jobbrendszert alkot.

T 4.19 Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által meghatározott paralelogramma területének mérőszámával egyenlő. Skaláris szorzatokkal kifejezve:
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2}$.

T 4.20 Két vektor vektori szorzata akkor és csak akkor zérusvektor, ha a két vektor egyező állású.

T 4.21 Az $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ és $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ vektorok vektori szorzata determinánsokkal

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

alakban írható fel.

T 4.22 **Kifejtési tétel**: Tetszőleges a, b, c vektorokra $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

T 4.23 Tetszőleges a, b, c vektorokra és k valós számra

$$\begin{aligned}
&(1) & \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\
&(2) & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \\
&(3) & (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \\
&(4) & k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Feladatok

90.* Készítsük el az 0, i, j és k vektorok vektori szorzatainak művelettábláját!

91. Végezzük el az alábbi feladatokban kijelölt vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott kifejezéseket!
a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$,
c) $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$, d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$,
e) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$,
f) $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (3\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 7\mathbf{c})$.

92. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:
a) $(\mathbf{i} \times \mathbf{j})^2$, b) $(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j})^2$, c) $[(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} \times 2\mathbf{j})]^2$.

93. Ha az a és b vektorok által meghatározott paralelogramma területe T, akkor mekkora a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma T' területe?

94.[▷] Az $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ egyenlőségből következik-e, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?

95.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

96.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorok, és $\mathbf{v}$ olyan vektor, amellyel $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ teljesül, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

97.[▷] Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem kollineáris vektorok és $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

98.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$, akkor $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ egyállású vektorok.

99.[▷] Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok kezdőpontja közös. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesre illeszkednek.

100.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorok kollineárisak, de egyikük sem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok komplanárisak.

101. Ha az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathbf{b}$ vektorra, akkor mivel egyenlő az $\mathbf{a} \times \{\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\}$ szorzat?

102. Igazoljuk a következő azonosságokat:
a) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.
b) $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{bd})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$.

103. Igazoljuk, hogy ha az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorra, de a nem merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor az $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok egyállású vektorok!

104.[▷] Lehet-e az $\mathbf{a} = [6, 2, -3]$ és a $\mathbf{b} = [-3, 6, -2]$ vektor egy kocka egyik csúcsából kiinduló két élvektor? Ha lehet, akkor határozzuk meg az ugyanebből a csúcsból kiinduló harmadik élvektort!

105. Az ABC háromszögben $|\overrightarrow{AB}| = 8$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$, $|\overrightarrow{CA}| = 6$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor abszolút értékét!

106. Az ABC háromszögben legyen $\overrightarrow{AB} = [2, -3, 1]$ és $\overrightarrow{AC} = [1, 4, 6]$. Számítsuk ki az A csúcshoz tartozó m_a magasság hosszúságát!

107.[•] Legyen $\mathbf{e}$ egységvektor, $\mathbf{a}$ egy tetszőleges vektor. Mi az $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}|$ szám és az $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$ vektor geometriai jelentése? Ennek ismeretében adjunk új megoldást a **73.** feladatra!

108.[▷] Adva van három, közös kezdőpontú $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 1, 1]$ és $\mathbf{c} = [1, 2, 2]$ vektor. Bontsuk fel a $\mathbf{c}$ vektort két olyan vektor összegére, melyek közül az egyik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában van, a másik e síkra merőleges!

109. Egy paralelogramma két, közös kezdőpontból kiinduló élvektora $\mathbf{a} = [3, -1, 1]$ és $\mathbf{b} = [t, 2, 1]$. Számítsuk ki a t paraméter értékét, ha a paralelogramma területe $3\sqrt{6}$ egység.

110. Adva van az $ABCD$ négyszög három oldalvektora: $\overrightarrow{AB} = [2, -3]$, $\overrightarrow{BC} = [6, 2]$ és $\overrightarrow{CD} = [1, 3]$. Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét!

111.[▷] Adva van három vektor: $\mathbf{a} = [2, -1]$, $\mathbf{b} = [1, 1]$ és $\mathbf{v} = [7, 1]$. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek egyik átlója a $\mathbf{v}$ vektor és oldalai $\mathbf{a}$-val, illetve $\mathbf{b}$-vel párhuzamosak!

112. Legyen $\overrightarrow{OA} = [0,1,1]$, $\overrightarrow{OB} = [-1,1,2]$ és $\overrightarrow{OC} = [1,0,1]$. Határozzuk meg az $ABCO$ tetraédernek az O csúcshoz tartozó magasságát!

113. Adott $\mathbf{a}\,(\neq \mathbf{0})$ vektor esetén melyek azok a $\mathbf{b}\,(\neq \mathbf{0})$ vektorok, amelyekre $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \mathbf{ab}$ teljesül?

Vektorok vegyes szorzata

D 4.24 Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok $\mathbf{abc}$-vel jelölt **vegyes szorzatán** az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ számot értjük.

T 4.25 Az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat abszolút értéke annak a paralelogramma alapú hasábnak a térfogatát adja, amelynek egy csúcsából kiinduló három élvektora éppen az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor. Az $\mathbf{abc}$ előjele aszerint pozitív ill. negatív, hogy a három vektor jobb- ill. balsodrású vektorhármas-e? Az $\mathbf{abc}$ értéke pontosan akkor 0, ha a három vektor komplanáris.

T 4.26 Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatára teljesülnek a következő összefüggések:
(1) $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}$,
(2) $\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

T 4.27 Az $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ és $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ vektorok vegyes szorzata a következő harmadrendű determinánssal egyenlő:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Feladatok

114. Fejezzük ki a következő vegyes szorzatokat az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzattal:
a) $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c})$, ahol λ és μ adott valós számok,
b) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$.

115. Komplanárisak-e a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $3\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $2\mathbf{a}+5\mathbf{c}$ vektorok, ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak?

116. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok kielégítik az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ feltételt, akkor komplanárisak.

117. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas esetén $|\mathbf{abc}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$. Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

118. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata V. Mennyi az $\mathbf{r} = 2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{t} = 2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V' térfogata?

119. Az $\mathbf{a} = [2,-1,2]$, $\mathbf{b} = [3,1,5]$ és $\mathbf{c} = [\alpha,2,-1]$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata α milyen értéke mellett lesz 10 egység?

120. A következő feladatokban megadott $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?
a) $\mathbf{a}=[0,2,3]$, $\mathbf{b}=[\alpha,-1,2]$, $\mathbf{c}=[1,2,1]$,
b) $\mathbf{a}=[2,\alpha,4]$, $\mathbf{b}=[0,0,0]$, $\mathbf{c}=[3,-1,2]$,
c) $\mathbf{a}=[\alpha,1,2]$, $\mathbf{b}=[3,-1,0]$, $\mathbf{c}=[2,1,0]$,
d) $\mathbf{a}=[\alpha,2,1]$, $\mathbf{b}=[0,\alpha,2]$, $\mathbf{c}=[1,-1,3]$,
e) $\mathbf{a}=[\alpha,5,1]$, $\mathbf{b}=[3,0,3]$, $\mathbf{c}=[1,0,1]$,
f) $\mathbf{a}=[3,\alpha,0]$, $\mathbf{b}=[0,3,\alpha]$, $\mathbf{c}=[1,0,-1]$.

121. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas oly jobbrendszert alkot, amelynek elemei páronként merőlegesek egymásra. Számítsuk ki az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat értékét, ha $|\mathbf{a}|=4$, $|\mathbf{b}|=2$ és $|\mathbf{c}|=3$.

122. Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $\overrightarrow{AB}=[2,-1,4]$, $\overrightarrow{BC}=[6,1,-4]$ és $\overrightarrow{CD}=[1,1,2]$?

123. A 8 egység térfogatú $ABCD$ tetraéder két élvektora: $\overrightarrow{AB}=[3,2,1]$ és $\overrightarrow{AC}=[1,0,1]$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ élvektort úgy, hogy az egyállású legyen a $\mathbf{d}=[-1,2,1]$ vektorral!

124. Legyenek a 4 egység térfogatú paralelepipedon, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ élvektorai $\overrightarrow{AB}=[3,1,0]$ és $\overrightarrow{AD}=[2,0,1]$ (l. a **38.** feladat melletti ábrát). Határozzuk meg az $\overrightarrow{AA_1}$ élvektort azzal a feltétellel, hogy az merőleges legyen az $\mathbf{r}=[2,-4,1]$ és $\mathbf{s}=[1,1,2]$ vektorokra! Számítsuk ki a paralelepipedonnak az $ABCD$ laphoz tartozó magasságát!

125.* Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ három adott vektor és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ három tetszőleges lineáris kombinációjuk, azaz

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{a}+u_2\mathbf{b}+u_3\mathbf{c},$$
$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{a}+v_2\mathbf{b}+v_3\mathbf{c},$$
$$\mathbf{w}=w_1\mathbf{a}+w_2\mathbf{b}+w_3\mathbf{c}$$

álljon fenn valamely u_i, v_i, w_i $(i=1,2,3)$ számokra. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{uvw}=\mathbf{abc}\cdot\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.$$

126.* Legyen $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ és $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ a tér két lineárisan független vektorrendszere. Ismeretes, hogy ekkor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ kifejezhetők

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=u_1\mathbf{a}+u_2\mathbf{b}+u_3\mathbf{c} & & \mathbf{a}=a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{v}+a_3\mathbf{w},\\ \mathbf{v}&=v_1\mathbf{a}+v_2\mathbf{b}+v_3\mathbf{c} & \text{illetve}\quad & \mathbf{b}=b_1\mathbf{u}+b_2\mathbf{v}+b_3\mathbf{w},\\ \mathbf{w}&=w_1\mathbf{a}+w_2\mathbf{b}+w_3\mathbf{c} & & \mathbf{c}=c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}\end{aligned}$$

alakban, ahol u_i, v_i, w_i, a_i, b_i, c_i $(i=1,2,3)$ alkalmasan választott valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=1.$$

5. fejezet

Analitikus térgeometria

Kezdő és végpontjuk koordinátáival adott vektorok

D 5.1 A koordináta-rendszer O kezdőpontjából a P pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ kötött vektort a P pont **helyvektorának** nevezzük.

T 5.2 A tér tetszőleges P pontjának derékszögű koordinátái az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor koordinátáival megegyeznek. Azaz, ha $P(x,y,z)$, akkor $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $(= [x,y,z])$.

T 5.3 Ha $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ koordinátáikkal adott pontok, akkor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Rövidebben írva: $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. A P_1 és P_2 pontok $d(P_1, P_2)$ távolsága pedig a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor hosszával egyenlő: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Feladatok

1. Számítsuk ki az $A(1,-2,-3)$ pontból a $B(2,-3,0)$, $C(3,1,-9)$, illetve $D(-1,1,-12)$ pontba mutató $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok koordinátáit!

2. Számítsuk ki az $A(4,-2,-4)$, $B(-4,12,6)$, $C(12,-4,3)$, $D(5,7,11)$ pontoknak az origótól mért távolságát!

3. Döntsük el, hogy az alábbiakban megadott ABC, DEF és GHK háromszögek között van-e egyenlő szárú: $A(5,1,0)$, $B(2,-1,3)$, $C(-2,3,1)$; $D(3,-1,2)$, $E(0,-4,2)$, $F(-3,2,1)$; $G(3,-3,5)$, $H(2,-2,5)$, $K(2,-3,6)$.

4.$^{\triangleright}$ Adjunk meg az x tengelyen olyan pontot, mely az $A(-3,4,8)$ ponttól 12 egység távolságra van!

5.$^{\triangleright}$ Adjunk meg a z tengelyen olyan pontot, mely egyenlő távolságra van az $A(1,-3,7)$ és $B(5,7,-5)$ pontoktól!

6. Lehet-e $A(3,-1,6)$, $B(-1,7,-2)$ és $C(3,1,8)$ egy téglalap három csúcsa?

7.$^{\triangleright}$ Van-e tompaszöge annak a háromszögnek, amelynek csúcsai: $A(4,-1,4)$, $B(0,7,-4)$, $C(3,1,-2)$?

8.▷ Számítsuk ki a következő feladatokban adott ABC háromszög területét, az AB oldalhoz tartozó magasságot és az A csúcsnál lévő szög tangensét!

a) $A(5,4,1)$, $B(1,6,2)$, $C(3,3,2)$.
b) $A(5,7,1)$, $B(3,6,-4)$, $C(2,8,-1)$.
c) $A(6,1,5)$, $B(4,1,4)$, $C(3,0,3)$.

9.▷ Az ABC háromszög csúcsai: $A(3,2,5)$, $B(3,2,-5)$, $C(-5,0,3)$. Számítsuk ki a háromszög súlyvonalainak hosszát!

10.• Határozzuk meg annak a P pontnak a koordinátáit, amely az $A(a_1,a_2,a_3)$ és $B(b_1,b_2,b_3)$ pontokat összekötő szakaszt $AP : PB = m : n$ arányban osztja!

11. Számítsuk ki az $A(4,-1,2)$ és $B(-2,2,5)$ pontok által meghatározott szakasz harmadoló pontjainak koordinátáit!

12. A következő feladatokban a megadott A pontot tükrözzük a B ponton. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!

a) $A(3,4,-1)$, $B(0,0,0)$. b) $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$.
c) $A(-1,-2,-5)$, $B(2,-1,3)$. d) $A(5,-1,2)$, $B(0,-1,2)$.

13.▷ Adva van az 5 egység területű ABC háromszög $A(2,-1,3)$ és $B(5,2,4)$ csúcspontja. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit, ha a C pont

a) az x tengelyen; b) a z tengelyen

fekszik.

14.▷ Adott az $A(3,-1,0)$ és a $B(2,2,1)$ pont. Ha a $C(0,y,0)$ pont végigfut az y tengelyen, akkor az ABC háromszög területe milyen értékek között változik?

15.▷ Egy paralelogramma három csúcsa: $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$ és $C(-1,1,2)$. Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit!

16.▷ A következő feladatokban adott négy-négy pont egy síkban van-e?

a) $A(2,-1,4)$, $B(-1,0,3)$, $C(3,-1,0)$, $D(1,1,2)$.
b) $A(1,2,3)$, $B(3,1,6)$, $C(0,3,4)$, $D(1,3,8)$.
c) $A(1,-9,-12)$, $B(2,-7,-13)$, $C(0,-11,-11)$, $D(3,-5,-14)$.

17.▷ Egy tetraéder csúcspontjai: $A(-2,0,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(1,2,-1)$, $D(2,1,-1)$. Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, felszínét és az ABC laphoz tartozó magasságát!

18.▷ Egy tetraéder csúcsai: $A(2,-4,3)$, $B(1,-4,4)$, $C(-3,2,0)$ és $D(2,0,u)$. Hogyan kell megválasztani a D pont u-val jelölt koordinátáját, hogy a tetraéder térfogata 4 egység legyen?

19.▷ Az $A(1,0,u)$, $B(2,-1,3)$, $C(2,0,v)$, $D(1,1,-1)$ pontnégyes milyen u és v értékekre lesz egysíkú?

20.▷ Az $ABCD$ tetraéder három csúcspontja: $A(3,1,0)$, $B(2,1,1)$ és $C(-1,-1,1)$. Melyek azok $D(x,y,z)$ pontok, amelyekkel a tetraéder térfogata 10 egység?

A sík egyenletei

D 5.4 Az adott P_0 ponton áthaladó S sík **normálvektorának** nevezünk minden olyan $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely merőleges az S síkra.

T 5.5 Ha egy sík átmegy a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton és merőleges a zérusvektortól különböző $\mathbf{n} = [A, B, C]$ vektorra, akkor egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

T 5.6 Minden sík egyenlete

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú, és minden ilyen egyenlet sík egyenlete, ha A, B és C közül legalább az egyik zérustól különböző.

Feladatok

21. A következő feladatokban adva van egy A pont és egy $\mathbf{n}$ vektor. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek egyik pontja az A pont és normálvektora az $\mathbf{n}$ vektor!

a) $A(2,1,4)$, $\mathbf{n} = [3,2,-4]$. b) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [1,2,4]$.
c) $A(7,2,-2)$, $\mathbf{n} = [2,0,3]$. d) $A(3,2,0)$, $\mathbf{n} = [0,-2,1]$.
e) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [1,0,0]$. f) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [0,1,0]$.
g) $A(0,0,0)$, $\mathbf{n} = [0,0,1]$. h) $A(-1,2,0)$, $\mathbf{n} = [0,3,0]$.

22.▷ Vizsgáljuk meg, hogy a három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, akkor írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!

a) $P(0,-1,2)$, $Q(2,-1,1)$, $R(4,3,-2)$.
b) $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,1)$.
c) $P(-3,0,4)$, $Q(4,1,2)$, $R(0,0,0)$.
d) $P(4,0,-1)$, $Q(5,0,2)$, $R(-2,0,0)$.
e) $P(-2,3,1)$, $Q(0,5,2)$, $R(-4,1,0)$.

23.• Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(1,5,2)$ ponton és párhuzamos a $7x - y + 3z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!

24. Határozzuk meg az $x + 2y - 3z + 6 = 0$ egyenletű síknak a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait!

25. Igazoljuk, hogy a $2x+y-z-2 = 0$, $x-3y+z+1 = 0$, $x+y+z-3 = 0$ egyenletű síkoknak egyetlen közös pontjuk van. Ezen a közös ponton át fektessünk olyan síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkkal!

26. Mutassuk ki, hogy az $x - y - z = 0$, $3x - y - z + 2 = 0$ és $4x - y - z + 4 = 0$ egyenletű síkoknak nincs közös pontjuk!

27.* Normálvektorok segítségével mutassuk ki, hogy az $x+y+z=6$, $2x-y+z=3$ és $x+2y-z=2$ egyenletű síkoknak pontosan egy közös pontjuk van.

28. Számítsuk ki a következő síkok által határolt tetraéder térfogatát:

$$x+y+z-1=0, \qquad x-y-1=0, \qquad x-z-1=0, \qquad z-2=0.$$

29. Mi az egyenlete annak a síknak, amely áthalad az $A(-2,3,1)$ és $B(4,2,-1)$ pontokon és merőleges a $3x-y+z-3=0$ egyenletű síkra?

30. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a $-x+2y+3z-2=0$ és $2x-y-z+1=0$ egyenletű síkokra és átmegy a $P(4,1,2)$ ponton!

31. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $A(1,-3,0)$ és $B(3,7,-4)$ pontokat összekötő szakaszt felezi és merőleges rá!

32.* Adott az $A(1,3,5)$, $B(2,5,3)$ és $C(4,7,5)$ pont. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az A ponton és merőleges az ABC háromszög A csúcsánál lévő a) belső szög; b) külső szög felező egyenesére!

33.* Egy háromszög három csúcsa: $A(1,1,1)$, $B(5,1,4)$ és $C(3,3,2)$. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az A ponton és merőleges az A csúcshoz tartozó magasságvonalra!

Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

D 5.7 Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes **irányvektorának** nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

T 5.8 Ha a P_0 pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = [a, b, c]$, akkor az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct\,, \end{aligned}$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

T 5.9 Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\mathbf{v} = [a, b, c]$ irányvektorú egyenes egyik tengelysíkkal sem párhuzamos ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$), akkor egyenletrendszere

(1) $$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Ha a, b, c közül az egyik (pl. c) 0, de a másik kettő nem, akkor az egyenes egyenletrendszere

(2) $$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \qquad z = z_0.$$

Ha a, b, c közül kettő 0 (pl. b és c) egy pedig nem, akkor az egyenes egyenletrendszere:

(3) $$y = y_0, \qquad z = z_0.$$

Az (1), (2), és (3) egyenletrendszereket az egyenes paramétermentes egyenletrendszereinek nevezzük. Megállapodunk abban, hogy az „egyenes egyenletrendszere” kifejezésen (jelző nélkül) mindig ezt a paramétermentes egyenletrendszert értjük.

Feladatok

34. A következő három egyenes közül kettő paraméteres, egy pedig paramétermentes egyenletrendszerrel van megadva:

$$e: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad f: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad g: \frac{2-x}{3} = y - 1 = \frac{5-z}{2}.$$

Határozzuk meg mindhárom egyenes irányvektorát és döntsük el, hogy az $A(2,1,5)$ és $B(-1,4,7)$ pontok közül melyik van rajta az egyes egyeneseken!

35. Írjuk fel a következő, paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenesek paramétermentes egyenletrendszerét:

$$e: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad f: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad g: \begin{cases} x = t - 5 \\ y = 3 \\ z = 4\,. \end{cases}$$

36. Írjuk fel a következő, paramétermentes egyenletrendszerrel megadott egyeneseknek azt a paraméteres egyenletrendszerét, amelynél a $t = 0$ paraméterértékhez a megadott x_0, illetve y_0 koordinátájú P_0 pont tartozik!

a) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z}{4}$; $x_0 = 16$. b) $x = 3$, $\dfrac{y-1}{2} = z$; $y_0 = 5$.

c) $y = 4$, $z = -3$; $x_0 = 7$.

37. A következő feladatokban egy-egy egyenest különböző meghatározó adataival adtunk meg. Írjuk fel az egyenesek paraméteres és paramétermentes egyenletrendszereit!

a) Átmegy az $A(-2,5,1)$ ponton, és párhuzamos az $\mathbf{a} = [-1,2,3]$ vektorral.

b) Átmegy a $P(3,1,2)$ és a $Q(-1,1,3)$ ponton.

c) Párhuzamos a $\mathbf{k} = [0,0,1]$ vektorral, és átmegy az $A(5,1,4)$ ponton.

d) Merőleges az $\mathbf{a} = [-2,3,1]$ és a $\mathbf{b} = [2,0,1]$ vektorra, és átmegy az $A(6,-3,4)$ ponton.

e) Párhuzamos a $3x + y - z + 1 = 0$ és az $x + y + z = 0$ egyenletű síkkal, és metszi az yz tengelysíkot a $P(0,4,1)$ pontban.

38. A következő feladatokban szereplő egyenesek, illetve síkok az α paraméter mely értékénél (értékeinél) elégítik ki a leírt követelményt?

a) Az $\dfrac{x+2}{2} = -\dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ és az $\dfrac{x-3}{\alpha} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ egyenletrendszerű egyenesek merőlegesek egymásra.

b) Az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{\alpha}$ egyenletrendszerű egyenes és az $x + 3y - 2\alpha z = 0$ egyenletű sík párhuzamos egymással.

c) Az $x = 1 + \alpha t$, $y = -2t$, $z = 1$ egyenletrendszerű egyenes metszi a $2x + \alpha y + z + 1 = 0$ egyenletű síkot.

d) Az $A(2,4,-1)$ és a $B(\alpha, \alpha+6, 3)$ ponton átmenő egyenes merőleges a $3x + 5y + \frac{\alpha}{4}z = 0$ egyenletű síkra.

39. Határozzuk meg a $P(-2,1,0)$ pontra és az $e:\ x = t+2,\ y = 3t,\ z = 2$ egyenletrendszerű egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

40. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3,0,1)$ ponton és párhuzamos az alábbi egyenesekkel:

$$e: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: \frac{x+2}{2} = y = -z.$$

41. Írjuk fel az $x - 3y + z + 2 = 0$ és $2x - 5y - z + 4 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét, az x, y, z koordináták valamelyikét választva paraméterként. Ennek alapján írjuk fel a metszésvonal paramétermentes egyenletrendszerét is!

42. A következő feladatokban egy-egy sík és egy-egy egyenes van megadva. Határozzuk meg az egyenes és a sík közös pontját, illetve pontjait (ha van ilyen)!

a) $-2x + y + 3z - 3 = 0, \quad \begin{cases} x = 3-t \\ y = 2-t \\ z = 3-t. \end{cases}$

b) $3x - y - 2z - 2 = 0, \quad \dfrac{x-1}{2} = 2y + 3 = z - 3.$

c) $x + 2y - z + 2 = 0, \quad x + 2 = y - 3 = \frac{z+1}{3}.$

d) $5x - y + 3z - 3 = 0, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5+3t \\ z = 1+t. \end{cases}$

43. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az

$$x - y - 4z - 5 = 0 \quad \text{és az} \quad 2x + y - 2z - 4 = 0$$

egyenletű síkok metszésvonalával és átmegy az origón!

44. Egy háromszög csúcsai: $A(3,6,-7)$, $B(-5,2,3)$ és $C(4,-7,-2)$. Adjuk meg a C csúcson átmenő súlyvonal egyenletrendszerét!

45. Egy háromszög csúcsai: $A(3,-1,-1)$, $B(1,2,-7)$ és $C(-2,8,-5)$. Írjuk fel a B csúcshoz tartozó (belső) szög szögfelezőjének egyenletrendszerét!

46. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az

$$\frac{x-5}{3} = y - 1 = z$$

egyenletrendszerű egyenest és merőleges a $2x - y + z = 0$ egyenletű síkra!

47.* Állapítsuk meg az alábbi hat egyenesből alkotható egyenespárok kölcsönös helyzetét! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat! (Első lépésként vizsgáljuk meg az irányvektoraikat!)

$$e: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \qquad g: \begin{cases} y = -1 \\ \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{z-6}{3} \end{cases}$$

$$h: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -1 \\ z = 3t + 9 \end{cases} \qquad k: \frac{8-x}{3} = y + 2 = \frac{z+3}{2} \qquad l: \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-4}.$$

Határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi két egyenes messe egymást:

48.[▷] $e: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -3t \\ z = 4t + 1 \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x = u + 3 \\ y = 4u + 1 \\ z = 2u + \lambda \end{cases},$

49. $e: \frac{x-1}{5} = \frac{1-2y}{3} = -z, \quad f: \frac{x+3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1 + z,$

50. $e: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+\lambda}{3}, \qquad f:$ az x, y vagy a z tengely valamelyike.

51. $e: \begin{cases} 2x + 3y - z + \lambda = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \qquad f:$ az x, y vagy a z tengely valamelyike.

52. Tükrözzük az $A(4, -3, 5)$ pontot az $x - y + z - 9 = 0$ egyenletű síkon! Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!

53. Tükrözzük az $A(2, -1, 3)$ pontot az $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$ egyenletrendszerű e egyenesen!

54. Tükrözzük az $x = 1 - 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = -4 - 9t$ egyenletrendszerű e egyenest a $3x + y - 2z = 0$ egyenletű síkon!

55. Jelölje e az $x + y - z + 1 = 0$ és $2x - y + z - 1 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalát, f pedig az e-nek az $x + 2y - z = 0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét. Írjuk fel az f egyenes paraméteres egyenletrendszerét, az x-et választva paraméterként!

56.[▷] Mi az egyenlete annak a síknak, amely párhuzamos az $x = 2y = 3z$ egyenletrendszerű egyenessel, és áthalad az $x + y + z = 0$ és a $2x - y + 3z = 0$ egyenletű síkok metszésvonalán?

57. Egy síkról tudjuk, hogy átmegy a $3x - y + 2z + 9 = 0$ és az $x + z + 3 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalán. Adjuk meg e sík egyenletét, ha
a) átmegy az $A(4, -2, -3)$ ponton is; b) párhuzamos az x tengellyel;
c) párhuzamos az y tengellyel; d) párhuzamos a z tengellyel;
e) párhuzamos az $\mathbf{a} = [2, -1, 2]$ vektorral.

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely illeszkedik a P pontra és metszi az e és f egyeneseket:

58.[▷] $P(0, 0, 0)$, $\quad e: x - 4 = -\frac{y+7}{3} = \frac{z-2}{2}, \quad f: \frac{5-x}{3} = \frac{9-y}{5} = z + 9,$

59. $P(-4, -5, 3)$, $\quad e: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t. \end{cases}, \quad f: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{1-z}{5},$

60. $P(1,1,4)$ $\quad e: \dfrac{x-1}{3} = -y = \dfrac{z-1}{3}, \quad f: \begin{cases} x = -2+5t \\ y = 1-3t \\ z = -2+t \end{cases},$

61. $P(3,-2,1)$ $\quad e: \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}, \quad f: x-5 = 4-4y = 4z-8.$

62.$^{\triangleright}$ Az S : $x+y+z=1$ egyenletű sík és az e : $y=1$, $z=-1$ egyenletrendszerű egyenes K közös pontján át vegyünk fel olyan f egyenest, amely az S síkban fekszik és merőleges az e egyenesre. Írjuk fel az f paraméteres egyenletrendszerét!

63. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-1,2,-3)$ ponton, merőleges az $\mathbf{a} = [6,-2,-3]$ vektorra, és metszi az

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{5}$$

egyenletrendszerű egyenest!

64.$^{\triangleright}$ Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely merőleges a $2x+4y-z+5=0$ egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyeneseket:

$$e: \frac{x}{2} = -y = z, \quad f: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}.$$

65.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy az $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$, $4x-y-2z+\lambda=0$ egyenletű síkok páronként metszik egymást és a metszésvonalak egyező állásúak! Ezt követően határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy a három síknak a) legyen közös pontja; b) ne legyen közös pontja.

Egyenesekre és síkokra vonatozó távolság- és szögfeladatok

D 5.10 Az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű sík **normálegyenletén** az

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

egyenletet értjük.

T 5.11 A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont távolsága az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű S síktól:

$$d(P_0,S) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

T 5.12 A P pont távolsága az e egyenestől:

$$d(P,e) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|},$$

ahol Q és R az e egyenes két tetszőleges különböző pontját jelöli.

T 5.13 Legyen az a egyenes egy irányvektora az $\mathbf{a}$, a b egyenesé pedig a $\mathbf{b}$ vektor. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyező állásúak, és $\mathbf{c}$ olyan vektor, amely a két egyenes egy-egy pontját köti össze, akkor a két egyenes távolsága:

$$d(a,b) = \frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}|}{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}.$$

T 5.14 Ha az a egyenes egy irányvektora az $\mathbf{a}$, a b egyenesé pedig a $\mathbf{b}$ vektor, akkor hajlásszögük a következő képlet segítségével számítható ki:

$$\cos(a,b)\angle = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

T 5.15 A $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes és az $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík szögét a következő képlet alapján számíthatjuk ki:

$$\sin(e,S)\angle = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}.$$

Feladatok

66. Igazoljuk, hogy a következő két egyenes egymással párhuzamos:

$$e: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+t \\ z = 2+t \end{cases}, \quad f: \ x-5 = 4y-16 = 4z-28.$$

Írjuk fel annak a g egyenesnek az egyenletrendszerét, amely az e és f egyenesek síkjában van, azok között halad, mindkettővel párhuzamos és mindkettőtől egyenlő távolságra van!

67? Adjuk meg azokat a pontokat, amelyek rajta vannak az

$$e: \ \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+3}{3}$$

egyenesen és 2 egység távolságra vannak az $x+2y+2z+11=0$ egyenletű síktól!

68. Igazoljuk, hogy a $2x-4y+2z-1=0$, és az $x-2y+z-1=0$ egyenletű síkok egymással párhuzamosak. Határozzuk meg a két sík távolságát!

69. Mutassuk meg, hogy az

$$e: \ \frac{x-1}{3} = y-2 = \frac{z}{5}, \qquad f: \begin{cases} x = 4-t \\ y = 3+3t \\ z = 5+5t \end{cases} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = 3+u \\ y = 6-3u \\ z = 5u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek egy közös K pontban metszik egymást, és határozzuk meg a K pont koordinátáit! Továbbá számítsuk ki

a) az e, f és g egyenesek páronkénti szögének koszinuszát;

b) az e és f egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_1$, az e és g egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_2$, valamint az f és g egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_3$ sík egy-egy normálvektorát;

c) az $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)_\angle$, az $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_3)_\angle$ és az $(\mathcal{S}_2,\mathcal{S}_3)_\angle$ tangensét;

d) az $(e,\mathcal{S}_3)_\angle$, az $(f,\mathcal{S}_2)_\angle$ és az $(g,\mathcal{S}_1)_\angle$ szögek szinuszát!

70.▷ Van-e a t paraméternek olyan értéke, hogy az $\mathcal{S}: x+ty+z-1=0$ egyenletű sík 60°-os szöget zár be

a) az x tengellyel; b) az y tengellyel; c) a z tengellyel?

Ha van, akkor adjuk meg az összes ilyen valós t értéket!

71.▷ Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek átmennek az $x+y=2$ egyenletű sík $P(1,1,\sqrt{2})$ és $Q(0,2,\sqrt{2})$ pontján, és az adott síkkal 45°-os szöget zárnak be.

72.▷ Az e egyenesről tudjuk, hogy benne van az $x-2y+1=0$ egyenletű síkban, áthalad a $P(2,1,4)$ ponton és az xy tengelysíkkal 60°-os szöget zár be. Írjuk fel az e egyenes egyenletrendszerét!

73.▷ Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletrendszereit, amelyek átmennek az origón, továbbá az x tengellyel és az y tengellyel 60°-os szöget zárnak be!

74.▷ Vannak-e olyan egyenesek, melyek az

$$e:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \\ z=3+t \end{cases} \quad \text{és} \quad f:\ -x=\frac{z+5}{2},\ y=3$$

egyenletrendszerű egyenesek mindegyikével

a) 60°-os, b) 45°-os, c) 30°-os

szöget zárnak be? Ha vannak, akkor ezek közül adjuk meg mindazokat, amelyek átmennek a $P_0(3,4,-1)$ ponton.

75. Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek átmennek a $P(1,1,1)$ ponton, párhuzamosak az $x+2y-z-1=0$, $2x-y+z-1=0$ síkok metszésvonalával, és mindkét síkkal ugyanakkora szöget zárnak be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!

76.▷ Számítsuk ki minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely áthalad az origón és a három koordinátatengellyel egyenlő szöget zár be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!

77.▷ Tekintsük a következő három egyenest:

$$e:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{3}=z,\quad f:\begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-2t, \\ z=-t \end{cases} \quad \text{és} \quad g:\begin{cases} x=2-u \\ y=-1+3u \\ z=-3+2u. \end{cases}$$

Írjuk fel minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(1,2,-1)$ ponton és egyenlő szöget zár be az adott egyenesekkel! Számítsuk ki a szög koszinuszát is!

78. Határozzuk meg az $x-3y+2z-2=0$ és a $2x+y+3z-5=0$ egyenletű síkok szögfelező síkjainak egyenleteit!

79. Az e egyenes egyenletrendszere: $x = -2+2t$, $y = 3+2t$, $z = 1+t$. Az egyenes $A(-2,3,1)$ pontjából mérjünk fel egy 6 egységnyi szakaszt az egyenesre. Számítsuk ki a szakasz másik végpontjának koordinátáit!

80. Határozzuk meg a z tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a $12x+9y-20z+19=0$ és $16x-12y+15z-9=0$ egyenletű síkoktól!

81. Adjunk meg a z tengelyen olyan pontot, amelynek az $M(1,-2,0)$ ponttól mért távolsága egyenlő a $3x-2y+6z-9=0$ egyenletű síktól mért távolságával!

82. Határozzuk meg az $x+y+z-2=0$ és az $x+2y-z-1=0$ egyenletű síkok metszésvonalán azt a pontot, amely egyenlő távol van az $x+2y+z+1=0$ és az $x+2y+z-3=0$ egyenletű síkoktól!

83. Határozzuk meg az alábbiakban adott P pont távolságát az e egyenestől!

a) $P(-2,3,7)$; e: $\dfrac{x-1}{3} = 2-y\,,\ z=2\,,$

b) $P(-1,2,1)$; e: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 12-t \\ z = 3+3t\,, \end{cases}$

c) $P(2,2,1)$; e: $\dfrac{9-x}{4} = \dfrac{y+2}{2} = z+5\,,$

d) $P(3,1,2)$; e: az $A(0,2,1)$ és $B(1,-1,3)$ ponton áthaladó egyenes,

e) $P(-2,4,1)$; e: az $A(-1,4,1)$ ponton és az origón áthaladó egyenes.

84. Igazoljuk, hogy a következő feladatokban adott két-két egyenes kitérő, és számítsuk ki távolságukat!

a) $e:\ x+4 = 8-2y = -z-1\,,\quad f:\ \begin{cases} x = 4t-5 \\ y = -3t+5 \\ z = -5t+5\,, \end{cases}$

b) $e:\ \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{3-y}{3} = \dfrac{5z-6}{4}\,,\quad f:\ x=y=z\,,$

c) $e:\ \begin{cases} x = 5+3t \\ y = t \\ z = 4t+9 \end{cases},\quad f:\ \begin{cases} x = 4-u \\ y = -3+u \\ z = 4-4u\,. \end{cases}$

85. Határozzuk meg az alábbi kitérő egyenespárok távolságát és normáltranszverzálisuk egyenletrendszerét!

a) $e:\ x = 1-3t,\ y = -4+4t,\ z = 1+t\quad f:\ x-4 = -y-2 = -z+2\,.$

b) $e:\ x = t+3,\ y = 3t+2,\ z = 3\,,\quad f:\ x+3 = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{4-z}{2}\,.$

c) $e:\ \begin{cases} x = -3+t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases},\quad f:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z-6}{2}\,.$

d) $e:\ \dfrac{x-1}{5} = 2-y = z-1\,,\quad f:\ 2-x = y-5 = z+1\,.$

86. Legyen $\mathcal{H}$ azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól: $P_1(2,2,1)$, $P_2(8,6,2)$, $P_3(6,3,5)$. Írjuk fel a $\mathcal{H}$ geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét!

87.$^{\triangleright}$ Vannak-e olyan síkok, amelyek az $x = 1$, $y = 3+3t$, $z = 4+4t$ egyenletrendszerű e egyenesre illeszkednek és egységnyi távolságra vannak a $P(2,1,3)$ ponttól? Ha vannak, akkor adjuk meg egyenleteiket, és számítsuk ki hajlásszögük koszinuszát!

88.$^{\triangleright}$ Egy háromszög csúcsai: $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,2,2)$, $P_3(-1,2,0)$. Határozzuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely a következő két feltételt teljesíti:

1) S illeszkedik az x tengelyre;

2) A háromszög S-re eső merőleges vetületének területe az $P_1P_2P_3$ háromszög területének fele!

Számítsuk ki továbbá a háromszög P_1 és P_2 csúcsainak S-től mért távolságait!

89. Állapítsuk meg, hogy a t paraméter mely értékeinél nem lesz kollineáris az $A(1,2,3)$, $B(4,5,6)$, $C(7,8,t)$ ponthármas, és minden ilyen t-re adjuk meg az $x+y+z-7=0$, $2x-3y-z+3=0$ és $x-y+z-5=0$ egyenletű síkok közös K pontjának az ABC síktól mért távolságát (a t paraméter függvényében)!

90.$^{\triangleright}$ Vannak-e olyan egyenesek, amelyek átmennek a $P(-1,0,2)$ ponton, merőlegesek az $x = 10+3t$, $y = -1-6t$, $z = 7+2t$ egyenletrendszerű egyenesre és attól 7 egység távolságra vannak? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg egyenletrendszereiket!

Vegyes feladatok

91. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(2,1,2)$ ponton, párhuzamos az $x+z=5$ egyenletű síkkal és metszi az $x = 2-t$, $y = 2t$, $z = 3$ egyenletrendszerű egyenest.

92. Az $ABCD$ tetréder térfogata $\frac{3}{2}$ egység. Három csúcsa: $A(1,2,1)$, $B(4,3,-3)$, $C(-1,2,-4)$. A D csúcs az $x = y = 2-2z$ egyenletrendszerű egyenesen van. Számítsuk ki az ABC lap B csúcsánál lévő szög koszinuszát, valamint a D csúcs koordinátáit!

93. Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az $A(1,1,1)$ pont. A B és a C csúcsa az $x+y+z=1$ és $2x-y-z=0$ egyenletű síkok metszésvonalán van. Határozzuk meg a B és a C csúcs koordinátáit!

94. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder C és D csúcsainak koordinátáit, ha a következő feltételek mindegyike teljesül:

a) az ABC lap az xy tengelysíkon fekvő szabályos háromszög,

b) $A(1,3\sqrt{3},0)$, $B(5,\sqrt{3},0)$,

c) a tetraéder térfogata $28/\sqrt{3}$ egység,

d) a D csúcs az $x = 2$, $y = t$, $z = 6-2t$ egyenletrendszerű egyenesen van.

Hány ilyen tetraéder van?

95. Adva van az $e: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{r}$ egyenes és az S: $x + 3y - 2rz = 0$ sík, ahol r paraméter.

a) Állapítsuk meg az r értékét úgy, hogy az e egyenes párhuzamos legyen az S síkkal, és ehhez az r-hez számítsuk ki az e és S távolságát!

b) Állapítsuk meg az r értékét úgy, hogy e merőleges legyen S-re!

96. Tükrözzük az $P(1,-1,3)$ pontot a $Q(-1,3,2)$ ponton, az $x = -\frac{y+1}{2} = -z$ egyenesen és a $2x - y + 3z - 2 = 0$ egyenletű síkon. Számítsuk ki a P pont és a három tükörkép által meghatározott sík távolságát!

97. Vegyük fel az $e: x = 2t + 1,\ y = 2t,\ z = t$ egyenletrendszerű egyenesen azt az A, az $f: \frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$ egyenesen pedig azt a C pontot, amelynek z-koordinátája 2. Az e egyenesre az A pontból mérjünk fel egy 3 egység hosszúságú AB, az f egyenesre pedig a C pontból egy 7 egység hosszúságú CD szakaszt. Számítsuk ki az így kapott négy tetraéder térfogatát!

98.* Létezik-e olyan szakasz, amelynek merőleges vetülete

az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = -\dfrac{z}{6}$ egyenletrendszerű egyenesen 2 egység,

az $x = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{1-z}{8}$ egyenletrendszerű egyenesen 3 egység,

az $\dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+1}{4}$ egyenletrendszerű egyenesen pedig 1 egység?

Ha létezik, akkor határozuk meg a hosszát!

99. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az

$$\frac{1-x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{5-z}{4}$$

egyenletrendszerű egyenesre, és a $P(3,-1,1)$ ponttól olyan távolságra van, mint amennyi az adott egyenes és a P pont távolsága!

100. Tekintsük a következő két egyenespárt:

$$e: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, \quad f: x - 3 = -y - 2 = z - 3;$$

$$g: x - 2 = y - 2 = \frac{z+5}{2}, \quad h: \frac{x-1}{3} = y - 1 = \frac{z}{3}.$$

Mutassuk ki, hogy mind a két egyenespár kitérő! Messe az e, illetve f egyenest a normáltranszverzálisuk a E, illetve a F pontban. Hasonlóan, legyen G, illetve H a g, illetve a h egyenesek és normáltranszverzálisuk metszéspontja. Számítsuk ki az E, F, G és H pontok koordinátáit és a két normáltranszverzális szögének koszinuszát!

101. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = [10, 6, -8]$ vektort az

$$e: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \end{cases}, \quad f: 2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = -\dfrac{3+3u}{2} \\ y = -5 + 4u \\ z = -u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesekkel párhuzamos összetevőkre, ha lehetséges.

102.[▷] Adjuk meg azoknak a síkoknak az egyenleteit (ha léteznek ilyen síkok), amelyek tartalmazzák a $P(3,-2,-2)$ és $Q(-2,3,-2)$ pontokat, továbbá az $x=0$, $y=0$ és az $x+y-1=0$ egyenletű síkok által határolt hasábot egyenlő oldalú háromszögben metszik!

103.[▷] Igazoljuk, hogy az $x+y-2z-4=0$, $3x-y-2z-8=0$, $x-3y+2z+8=0$ egyenletű síkok páronkénti metszésvonalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a három sík által meghatározott hasábból a $P(1,1,1)$ ponton áthaladó és az $\mathbf{a}=[1,-1,0]$ vektorral párhuzamos síkok mindegyike egyenlőszárú háromszöget metsz ki! Vannak-e ezen síkok között olyanok, amelyek derékszögű háromszöget metszenek ki? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit; ha nincsenek, akkor ezt mutassuk ki!

104. Léteznek-e olyan síkok, amelyek tartalmazzák a $P(2,1,2)$ és $Q(1,-1,0)$ pontot, továbbá az $x+y=0$, $y=1$ és az $x-2y=0$ síkok által határolt hasábot derékszögű háromszögben metszik? Ha léteznek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit, ha nem, akkor ezt mutassuk ki!

105.[▷] Egy tetraéder csúcsai: $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,-1,1)$ és $D(1,1,-1)$. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a BCD síkkal és a tetraédert egyenlő térfogatú részekre osztja!

106. Bizonyítsuk be, hogy az

$$e:\begin{cases} x=x_1+a_1t\\ y=y_1+b_1t\\ z=z_1+c_1t\end{cases}\quad \text{és}\quad f:\begin{cases} x=x_2+a_2u\\ y=y_2+b_2u\\ z=z_2+c_2u\end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek akkor és csak akkor egysíkúak, ha

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=0.$$

107. Legyen az $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$ egyenletrendszerű e egyenes olyan, amely nem merőleges az $S:\ Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű síkra. Igazoljuk, hogy az e-t tartalmazó és az S-re merőleges sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a & b & c\\ A & B & C\end{vmatrix}=0.$$

108.[▷] Igazoljuk, hogy a tetraéder élfelező merőleges síkjai egy ponton mennek át!

109.[▷] Két kitérő egyenesen mozogjon egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy a két szakasz tetszőleges helyzeténél a négy végpont által meghatározott tetraéder térfogata konstans!

6. fejezet

Komplex számok

A komplex szám algebrai alakja

D 6.1 **Komplex számnak** nevezünk minden olyan $a+bi$ alakú kifejezést, amelyben a és b valós szám, i pedig az összes valós számtól különböző — **képzetes egységnek** nevezett — szimbólum. Az a illetve b valós számot a $z=a+bi$ komplex szám **valós részének** illetve **képzetes részének** hívjuk. Jelölésük: $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$. Az $a+bi$ alakú kifejezés a komplex szám **algebrai alakja**.

D 6.2 Algebrai alakban adott komplex számok **összeadását** és **szorzását** a többtagú algebrai kifejezések összeadási, ill. szorzási szabálya szerint végezzük, hozzátéve, hogy $i^2 := -1$.

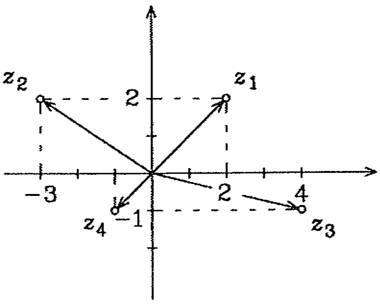
D 6.3 Az $z=a+bi$ komplex szám **konjugáltján** az $a-bi$ komplex számot értjük. Jele: $\bar{z}$.

T 6.4 Tetszoleges z_1, z_2 komplex számokra $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

D 6.5 A $z=a+bi$ komplex szám **abszolút értékén** a $|z|=|a+bi|:=\sqrt{a^2+b^2}$ nemnegatív valós számot értjük.

T 6.6 Bármely z, z_1 és z_2 komplex számra érvényesek a következő egyenlőségek: $z\bar{z}=|z|^2$, $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$, és a háromszögegyenlőtlenség: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Feladatok



1.▷ Ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon az alábbi komplex számokat és helyvektorukat:
$z_1=3-i,\quad z_2=1+4i,$
$z_3=-2+3i,\quad z_4=-2-3i.$

2.▷ Írjuk fel a mellékelt ábrán helyvektoraikkal feltüntetett komplex számokat algebrai alakban:

3. Írjuk fel az alábbi komplex számok konjugáltját: $z_1=2+7i$, $z_2=-3-5i$, $z_3=5i$, $z_4=-i$, $z_5=-9$, $z_6=0$.

Legyen $n>2$ természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

4. $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_n$,

5. $\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \dots \overline{z}_n$, 6. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám összegét és különbségét:

7. $2+5i,\ 4-3i$, 8. $3-4i,\ -5+2i$, 9. $4-3i,\ -2-i$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

10. $3-5i,\ -4+i$, 11. $1-3i,\ -i$, 12. $2+5i,\ 4-3i$.

Számítsuk ki az alábbi komplex számok hányadosát:

13.ᵖ $3+2i,\ 1-i$, 14. $5-i,\ 1-2i$, 15.• $-5-2i,\ -3i$.

Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

16.ᵖ $\dfrac{2}{(1-i)(3+i)}$, 17. $\dfrac{1}{(3+4i)^2}$, 18. $\dfrac{2+i}{i(-3+4i)}$,

19. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$, 20. $\dfrac{1}{i(3-2i)(1+i)}$, 21. $\dfrac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$.

22. Legyen $z_1 = 1-5i$ és $z_2 = 3+4i$. Számítsuk ki a következőket:

$$\frac{z_1}{z_2},\quad \frac{\overline{z}_1}{z_2},\quad \frac{z_1}{\overline{z}_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)},\quad \frac{z_1}{|z_2|},\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|.$$

23. Legyen $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-2i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

$$z_1 - \frac{z_1}{z_2},\quad \frac{z_1 - 1}{z_2},\quad z_1^2 - \frac{iz_1}{z_2},\quad \frac{z_1}{iz_2}.$$

Legyen $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$ és $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Számítsuk ki a következőket:

24. $|3z_1 - 4z_2| + z_3\overline{z}_3$, 25. $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$, 26. $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|$.

Számítsuk ki az alábbi komplex számok abszolút értékét:

27. $\dfrac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$, 28. $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x-y) + 2i\sqrt{xy}}$, $x, y \in \mathbf{R}^+$.

29.• Határozzuk meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre fennáll az alábbi egyenlőség: $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

Adjuk meg a következő, xy-síkbeli görbék komplex változós egyenletét:

30.• $(-2;1)$ középpontú 4 sugarú kör, 31.• $y = mx + b$ egyenletű egyenes,

32. $(-3;0)$ és $(3;0)$ fókuszpontú ellipszis, nagytengelyének hossza 10.

Adjuk meg a Gauss-féle számsíkon az alábbi feltételeket kielégítő pontok halmazát:

33. $1 < |z| < 2$, 34. $|z| = 2$, 35.• $|z-i| = |z+i|$,

36. $|z+i| \le 1$, 37.ᵖ $|2z-4i| < 1$, 38.ᵖ $|z| \le |z+i|$,

39. $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

40.* Bizonyítsuk be, hogy bármely kör vagy egyenes egyenlete a Gauss-féle számsíkon felírható $az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$ alakban, ahol $a, c \in \mathbf{R}$ és $b \in \mathbf{C}$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

41. $x^2 + 2 = 0$, 42.* $x^2 - 2x + 2 = 0$, 43. $x^2 - 6x + 13 = 0$,

44. $x^2 + 8x + 17 = 0$, 45. $x^4 - x^2 - 6 = 0$, 46. $x^2 + 5 + \frac{6}{x^2} = 0$.

47.* Oldjuk meg a $|z| + z = 2 + i$ egyenletet!

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok halmazán:

48. $iz_1 - iz_2 = -2$
$2z_1 + z_2 = i$,

49. $z_1 + z_2 = 2$
$z_1 - z_2 = 2i$,

50. $z_1 + 2z_2 = 1 + i$
$3z_1 + iz_2 = 2 - 3i$,

51. $(1+i)z_1 - (1-i)z_2 = 0$
$(2+i)z_1 - (1-2i)z_2 = 0$,

52. $(1+2i)z_1 + z_2 = 1 - 2i$
$-iz_1 - iz_2 = -2 + 3i$,

53. $2z_1 - iz_2 = -3 + 4i$
$iz_1 + 3z_2 = -7 - 4i$,

54. $iz_1 + 2z_2 = 1 - 2i$
$4z_1 - iz_2 = -1 + 3i$,

55. $(1+2i)z_1 - (2+i)z_2 = -6 - 2i$
$-z_1 + (2-i)z_2 = 4 - 4i$.

56.* Tegyük fel, hogy a z komplex számra $z^2 + z + 1 = 0$ teljesül. Számítsuk ki a $z^{65} + z^{-65}$ kifejezés értékét!

Binomiális együtthatók, binomiális tétel

D 6.7 Legyen k és n két nemnegatív egész szám, melyekre $k \le n$. Az $\binom{n}{k}$ kifejezést az $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ egyenlőséggel definiáljuk és **binomiális együtthatónak** nevezzük.

T 6.8 Minden nemnegatív egész n-re és $k = 0, 1, \ldots, n$-re érvényes az $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ **szimmetriatulajdonság**, és $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$-re az $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ **additív tulajdonság**.

T 6.9 **(Binomiális tétel)** Egységelemes kommutatív gyűrű tetszőleges (u, v) elempárjára és tetszőleges nemnegatív egész n számra

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k.$$

Feladatok

Az alábbiakban a hatványok binomiális tétel szerinti kifejtésében k-**adik tagon** ($k = 0, 1, \ldots, n$) azt a tagot értjük, amelynek együtthatója $\binom{n}{k}$. Továbbá, ha n páros, akkor az (előbbi értelemben vett) $n/2$-edik tagot a kifejezés **középső tagjának** mondjuk:

57.* Határozzuk meg az $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$ hatvány kifejtésének középső tagját.

58. Írjuk fel a $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány kifejtésének negyedik tagját!

59. A $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az a kitevője 7?

60. A $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{18}$ hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az a és a b kitevője egyenlő egymással?

61. Írjuk fel a $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$ kifejtésének 12. tagját, ha a második tag binomiális együtthatója 105.

62. Az $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^m$ kifejtésében a harmadik és a tizenkettedik tag binomiális együtthatója azonos. Írjuk fel azt a tagot, amelyben x nem szerepel.

63. Az $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^m$ kifejtésében az együtthatók összege 128. Írjuk fel a kifejtésnek azt a tagját, amelyben x az ötödik hatványon szerepel.

64. Határozzuk meg az n kitevőnek azt az értékét, amelyre az $(a+b)^n$ kifejtésében a második, harmadik és negyedik tag együtthatója egy számtani sorozat egymást követő elemei.

65. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$ hatvány kifejtésében a második tag értéke 10^6 legyen.

66. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy a $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x + 1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$ kifejtésben a harmadik tag 200 legyen.

Igazoljuk az alábbi összefüggéseket, amelyekben n tetszőleges pozitív egész, k pedig olyan egész szám, amelyre $k \le n$:

67.* $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n,$

68.* $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0,$

69.$^{\triangleright}$ $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + 99\cdot 99! = 100! - 1$,

70.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$,

71.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2)\cdot 2^{n-1}$,

72.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n} = (n-2)\cdot 2^{n-1} + 1$,

73.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \cdots + 1 = \binom{n+1}{k}$,

74.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$,

75. $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

76. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$, ha $m \in \mathbb{N}^+$

77.* $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$,

78. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$,

79.* $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$,

80.* $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$

81.* $1 - \binom{8n}{2} + \binom{8n}{4} - \binom{8n}{6} + \cdots + \binom{8n}{8n} = 16^n$.

A binomiális tétel alkalmazásával végezzük el a következő hatványozásokat:

82.$^{\bullet}$ $\left(-3 + \sqrt{3}i\right)^4$,

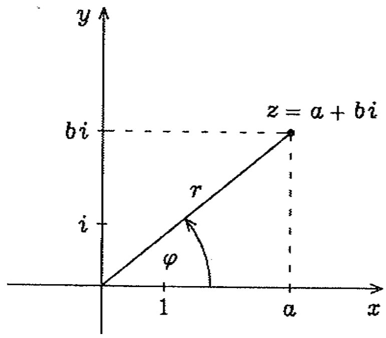
83. $(2+2i)^5$,

84. $(-1+i)^7$,

85. $\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

A komplex szám trigonometriai alakja

D 6.10 Vegyünk fel a síkban egy O kezdőpontú p félegyenest, és a sík minden egyes O-tól különböző P pontjához rendeljük hozzá az (r, φ) számpárt, ahol $r = |\overrightarrow{OP}|$ **(pólustávolság)** és $\varphi = (p, \overrightarrow{OP})\angle$ **(irányszög)**. Az O pontra $r = 0$, φ tetszőleges. Az így definiált koordináta rendszert **síkbeli polárkoordináta rendszernek** nevezzük.



T 6.11 Derékszögű koordináta-rendszerben adott (x, y) pont (r, φ) polárkoordinátáit az

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

egyenletek felhasználásával, a polárkoordináta-rendszerben adott (r, φ) pont (x, y) derékszögű koordinátáit az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

egyenletek felhasználásával számítjuk ki. (Az $r = r(\varphi)$ egyenletű geometriai alakzat egyenletében az irányszöget mindig radiánban mérjük.)

D 6.12 Ha a $z = x + yi$ komplex számban x-et és y-t az előző egyenletek szerint helyettesítjük, akkor a komplex szám $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **trigonometriai alakját** kapjuk.

T 6.13 Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

T 6.14 Tetszőleges komplex számra és tetszőleges egész n-re

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

D 6.15 A z komplex szám **komplex n-edik gyökein** az $u^n = z$ $\quad (u, z \in \mathbf{C}; n \in \mathbf{N}^+)$ egyenlet összes komplex u megoldását értjük.

T 6.16 Bármely, zérustól különböző komplex számnak n darab különböző komplex n-edik gyöke van, ha n pozitív egész, és a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\quad (r \geq 0)$ komplex szám összes különböző komplex n-edik gyökét megadja a következő képlet:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

ahol $\sqrt[n]{r}$ a valós r szám valós n-edik gyökét jelenti. A 0 komplex szám egyetlen n-edik gyöke 0.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi z komplex számok valós részét ($\operatorname{Re} z$), képzetes részét ($\operatorname{Im} z$), abszolút értékét (r), és radiánban mért legkisebb nemnegatív argumentumát (φ_0):

86. $z = 3$, **87.** $z = -8$, **88.** $z = -2i$,

89. $z = 1 + i$, **90.** $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **91.**• $z = 2 - 2\sqrt{3}i$,

92. $z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Állapítsuk meg, hogy a Gauss-féle számsík mely pontjai tesznek eleget az alábbi egyenleteknek, ill. egyenlőtlenségeknek ($\arg z$ a z egyik argumentumát jelenti):

93.▹ $\operatorname{Im}(z + i) > 2$, **94.** $\operatorname{Im}(iz) \geq 1$, **95.** $\operatorname{Re} z = 1$,

96. $\operatorname{Re}(2z) < 4$, **97.** $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$, **98.**▹ $0 < \arg[(1+i)z] < \pi$.

Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometriai alakba:

99. $3i$, **100.** $\sqrt{3} - 3i$, **101.**• -4,

102. $5 + 5i$, **103.** $-6 + 6\sqrt{3}i$, **104.** $-3 - 3i$,

105.• $-i$, **106.**• $2\sqrt{3} - 2i$.

Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat:

107.• $5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, **108.** $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

109. $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, **110.** $3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

111. $2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, **112.** $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Írjuk át az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék egyenletét derékszögű koordinátás alakba. Állapítsuk meg a görbe típusát és meghatározó adatait. A feladatokban a és b pozitív konstansok.

113.• $r = a$, **114.**• $r = 2a\sin\varphi$, $0 \leq \varphi < \pi$,

115.• $r = 2a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, **116.**▹ $r = \frac{2}{\cos\varphi}$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$,

117. $r = \frac{a}{\sin\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, **118.**▹ $r = \frac{1}{1 + \cos\varphi}$,

119. $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, **120.** $r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$,

121. $r = \frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, **122.** $r = \frac{1}{1 - \sin\varphi}$, **123.** $r = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$,

124. $r = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$, **125.**▹ $r = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$, **126.**▹ $r = \sqrt{a^2\cos 2\varphi}$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

127.• $3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ), \quad 2(\cos 305^\circ + i \sin 305^\circ),$

128. $2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ), \quad 3(\cos 175^\circ + i \sin 175^\circ),$

129.• $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ), \quad i,$

130. $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), \quad 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right).$

Írjuk fel a következő számok trigonometriai alakját:

131.• $\cos\varphi - i\sin\varphi,$ **132.**▷ $-\cos\varphi + i\sin\varphi,$ **133.** $-\cos\varphi - i\sin\varphi.$

Az alábbi sokszögeknek komplex számokkal megadjuk néhány csúcsát. Határozzuk meg a sokszögek hiányzó csúcsait:

134.• $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 5 + i$ csúcspontú szabályos háromszög,

135.▷ $z_1 = -4 + i$ és $z_2 = 3 - 3i$ csúcspontú négyzet,

136. $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - 2i$ és $z_3 = 2 + 3i$ csúcspontú paralelogramma,

137. 0 középpontú és $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}$ csúcspontú szabályos hatszög,

138. i középpontú és $z_1 = 3 - 4i$ csúcspontú szabályos ötszög.

Számítsuk ki az alábbi z_1, z_2 komplex számok $\frac{z_1}{z_2}$ hányadosát:

139.• $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ), \quad z_2 = 3(\cos 122^\circ + i \sin 122^\circ),$

140. $z_1 = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ), \quad z_2 = 4(\cos 13^\circ + i \sin 13^\circ),$

141.• $z_1 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), \quad z_2 = 3 - i\sqrt{3},$

142. $z_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ, \quad z_2 = -4 + i\sqrt{3}.$

Írjuk fel algebrai alakban az alábbi hatványokat:

143.• $(1+i)^{12}$, **144.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$, **145.** $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$,

146. $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-10}$, **147.** $(1-i)^{-3}$, **148.**• $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{-9}$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket trigonometriai alakkal és binomiális tétellel számolva:

149.• $\left(1+\sqrt{3}i\right)^4$, **150.** $(1+i)^4\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$, **151.** $\left(\sqrt{3}+i\right)^5$,

Határozzuk meg az alábbi z komplex számok összes komplex n-edik gyökét:

152. $z = 1, \quad n = 3,$ **153.** $z = -1, \quad n = 3,$ **154.** $z = 1, \quad n = 4,$

155.• $z = 1, \quad n = 6,$ **156.** $z = -8i, \quad n = 3,$ **157.** $z = i, \quad n = 2,$

158. $z = -243i, \quad n = 5,$ **159.** $z = -1, \quad n = 7,$ **160.**• $z = -2+2i, \quad n = 3,$

161.• $z = 3 + 4i, \quad n = 2,$ **162.** $z = -7+24i, \quad n = 2.$

163.▷ Mutassuk meg, hogy ha c, z tetszőleges komplex számok, akkor $\sqrt[n]{c^n z} = c\sqrt[n]{z}$, ahol a gyökvonás a komplex gyökvonást jelenti. Speciálisan $\sqrt{c^2 z} = c\sqrt{z}$.

164.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet gyökeit megkaphatjuk a

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formulával, ha a gyökvonás a komplex négyzetgyökvonást jelenti.

Határozzuk meg az alábbi egyenlet gyökeit a komplex számok halmazában. Ha a diszkrimináns nem valós, akkor használjuk az előző feladat eredményét:

165.$^\bullet$ $z^2 - 2iz - 5 = 0$, **166.** $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$,

167. $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$, **168.** $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$.

Vegyes feladatok

Bizonyítsuk be a $(\cos x + i \sin x)^5$ kifejezés kétféle kiszámításával következő azonosságokat:

169.$^\triangleright$ $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$,

170. $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} = 16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

171.$^\triangleright$ Számítsuk ki $-15 - 8i$ négyzetgyökeinek pontos értékét!

172.* Szerkesszük meg a Gauss-féle számsíkon a z_1, z_2 és az 1 komplex számokhoz tartozó helyvektorok segítségével a z_1z_2 komplex számhoz tartozó helyvektort!

173.* Oldjuk meg a $\overline{z} = z^n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$ egyenletet!

174.* Számítsuk ki az $e_0^j + e_1^j + \cdots + e_n^j \quad (j \in \mathbf{Z})$ összeget, ahol $e_0, e_1, \dots e_n$ az $(n+1)$-edik egységgyökök.

175.* Számítsuk ki az $1 + 2e + 3e^2 + \cdots + (n+1)e^n$ összeget, ahol e tetszőleges $(n+1)$-edik egységgyök.

176.* Bizonyítsuk be, hogy ha a z komplex számra $|z| < \frac{1}{2}$ teljesül, akkor $|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

Mutassuk meg, hogy minden n egész számra érvényesek az alábbi egyenlőségek:

177. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$, **178.** $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + \sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Határozzuk meg az alábbi összegeket:

179.* $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$, **180.*** $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$.

Mutassuk meg, hogy:

181.* $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$,

182.* $\cos\dfrac{2\pi}{11} + \cos\dfrac{4\pi}{11} + \cos\dfrac{6\pi}{11} + \cos\dfrac{8\pi}{11} + \cos\dfrac{10\pi}{11} = -\dfrac{1}{2}$,

183.* $\cos\dfrac{\pi}{13} + \cos\dfrac{3\pi}{13} + \cos\dfrac{5\pi}{13} + \cos\dfrac{7\pi}{13} + \cos\dfrac{9\pi}{13} + \cos\dfrac{11\pi}{13} = \dfrac{1}{2}$.

7. fejezet

Sorozatok

A sorozat fogalma

D 7.1 **Sorozaton** olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok halmaza vagy annak valamely valódi végtelen részhalmaza. Az n nemnegatív számhoz rendelt elemet a sorozat **n-edik elemének** nevezzük.
Ebben a fejezetben értelmezési tartományként legtöbbször a pozitív egész számok halmazát ($\mathbf{N}^+$) tekintjük, azaz általában $[a_n]$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot jelöli. (Ezért a feladatoknál csak akkor adjuk meg az értelmezési tartományt, ha ettől eltérünk.)

D 7.2 Ha megadjuk a sorozat első néhány elemét s azt a szabályt, ahogyan az n-edik elemet az előzőekből megkaphatjuk, akkor azt mondjuk, hogy a sorozatot **rekurzív definícióval** adjuk meg. Szokás ebben az esetben **rekurzív sorozatról** beszélni.

D 7.3 Ha $[a_n] \subseteq \mathbf{R}$, akkor **valós számsorozatról**, ha pedig $[a_n] \subseteq \mathbf{C}$, akkor **komplex számsorozatról** beszélünk. Ha minden egyes n nemnegatív (illetve pozitív) egész számhoz a síknak vagy a térnek egy-egy P_n pontját rendeljük, akkor **pontsorozatot** ($[P_n]$) kapunk. Hasonlóan beszélhetünk **vektorsorozatról** vagy **függvénysorozatról** is. Ebben a fejezetben i mindig a képzetes egységet jelenti.

Feladatok

Írjuk fel a következő sorozatok első öt elemét:

1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$,

2. $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$,

3. $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}$,

4. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$,

5. $a_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$,

6. $a_n = n + (n+1) + \cdots + 2n$,

7. $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2k$,

8. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k-1)!}$,

9.$^\triangleright$ $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} j \right)$,

10.$^\bullet$ $a_n = \left(\dfrac{i-1}{i+1} \right)^n \quad n \in \mathbf{N}$,

11. $a_n = \dfrac{(i-1)^{3n}}{2^n} \quad n \in \mathbf{N}$.

Adjunk meg egy képletet vagy utasítást, amelynek segítségével képzett sorozat kezdő elemei megegyeznek a következő feladatokban felírt elemekkel:

12. $2, 4, 6, \ldots,$

13. $-13, -18, -23, -28, \ldots,$

14. $0,3;\ 0,33;\ 0,333; \ldots,$

15. $-0,1;\ 0,01;\ -0,001; \ldots,$

16.* $0,235;\ 0,235235; \ldots,$

17. $2;\ 1,5;\ 1,25;\ 1,125; \ldots,$

18. $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots,$

19.* $-1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots,$

20. $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23} \ldots,$

21.* $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots,$

22.* $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots,$

23. $i, -i, i, -i, \ldots,$

24.* $1, \frac{\sqrt{3}i-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}i+1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}i-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}i+1}{2}, \ldots,$

25.* $1, i-1, -2i, 2(i+1), -4, -4(i-1), 8i, -8(i+1), \ldots.$

Írjuk fel az alábbi, rekurzív képlettel megadott sorozatok első öt elemét:

26. $a_1 = -1$ és $a_n = -4 - 3a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$

27.* $a_1 = 2$ és $a_n = 3 - \dfrac{3}{a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$

28. $a_1 = 1, \quad a_2 = 2$ és $a_n = \dfrac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots,$

29. $a_0 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}, \quad n \in \mathbf{N}^+,$

30. $z_0 = -1$ és $z_n = z_{n-1}^2 + i, \quad n \in \mathbf{N}^+,$

31. $z_0 = (1+i)^2$ és $z_n = z_{n-1}^2 + 1 + i, \quad n \in \mathbf{N}^+,$

32.* $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{r}_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$

33. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_n = (\mathbf{r}_{n-3}\mathbf{r}_{n-2})\mathbf{r}_{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots.$

Metrikus tér

D 7.4 Ha az $M \neq \emptyset$ halmazhoz hozzárendelünk egy, az M^2 halmazon értelmezett valós értékű d függvényt, amely minden $a, b, c \in M$ elemre teljesíti a

$$d(a,b) \geq 0, \quad \text{és} \quad d(a,b) = 0 \iff a = b,$$

$$d(a,b) = d(b,a) \quad \textbf{(szimmetria tulajdonság)},$$

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) \quad \textbf{(háromszög-egyenlőtlenség)}$$

feltételeket, akkor azt mondjuk, hogy az M halmaz a d **távolságfüggvénnyel (metrikával) metrikus teret** alkot.

T 7.5 A valós számokból álló n elemű sorozatok (pontok) $\mathbf{R}^n$ halmaza a

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

$(A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), B = (b_1, b_2, \ldots, b_n))$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot, ahol $d(A,B)$-t az A és B pontok távolságának szokás nevezni.

D 7.6 Legyen M metrikus tér a d távolságfüggvénnyel. Az M valamely nemüres H részhalmazát **korlátosnak** mondjuk, ha van olyan $O \in M$ és van olyan $v \in \mathbf{R}$, hogy a $d(O,P) \leq v$ egyenlőtlenség a H minden P elemére teljesül. v-t a H halmaz egy **korlátjának** nevezzük.

D 7.7 A H valós számhalmazt **felülről (alulról) korlátosnak** nevezzük, ha van olyan v valós szám, hogy a H minden x elemére $x \leq v (x \geq v)$ teljesül, és bármely ilyen tulajdonságú v számot a H **felső (alsó) korlátjának** nevezünk.

T 7.8 Felülről korlátos H halmaznak van legkisebb felső korlátja (**szuprémuma**), alulról korlátos H halmaznak van legnagyobb alsó korlátja (**infimuma**). (Jelölés: $\sup H, \inf H$.)

T 7.9 Valós számhalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

T 7.10 Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér valamely ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a halmaz elemeinek koordinátáiból alkotott számhalmaz korlátos.

D 7.11 Az M metrikus tér A pontjának δ sugarú **környezetén (ill. teljes környezetén)** azoknak az M-beli X pontoknak a halmazát értjük, amelyek eleget tesznek a $0 < d(X,A) < \delta$ (ill. $d(X,A) < \delta$) egyenlőtlenségnek, amelyben δ adott pozitív valós szám.

D 7.12 Legyen H az M metrikus tér tetszőleges részhalmaza. Ha az M-beli P pontnak van olyan teljes környezete, amelynek minden pontja H-hoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy P a H **belső pontja**. Ha P-nek van olyan teljes környezete, amelynek metszete H-val üres, akkor P-t H **külső pontjának** nevezzük. Végül, ha P bármely teljes környezete tartalmaz H-beli pontot is, de H-n kívüli pontot is, akkor azt mondjuk, hogy P a H **határpontja**. A H halmazt **zártnak** hívjuk, ha minden határpontját tartalmazza, és **nyíltnak**, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza. Például minden $[a,b]$ zárt ((a,b) nyílt) intervallum az $\mathbf{R}$ metrikus tér zárt (nyílt) részhalmaza, ha $a, b \in \mathbf{R}$. (A $(-\infty, \infty)$ intervallumnak és az üres halmaznak nincs határpontja, így ezek zártnak és nyíltnak is tekinthetők.)

Feladatok

34.• Mutassuk meg, hogy a komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza a $d(u,v) = |u-v|$ $(u, v \in \mathbf{C})$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.

35.▷ Legyen $M = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ és $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M)$. Bizonyítsuk be, hogy M a d távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.

36.▷ Mutassuk meg, hogy a közönséges háromdimenziós tér valamely H ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a H minden pontja egy O (origó) középpontú gömb belsejébe esik. A komplex számok $\mathbf{C}$ metrikus terének valamely H részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan v valós szám, hogy a H minden z elemére $|z| \leq v$.

37.* Mutassuk meg, hogy komplanáris egységvektorok halmaza a vektori szorzat abszolút értékével metrikus teret alkot, ha a kollineáris vektorokat egyenlőknek tekintjük.

38.• Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^2$ halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2))$$

metrikával. Ábrázoljuk az $(1,0)$ pont 1 sugarú (teljes) környezetét.

39. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^2$ halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A,B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \quad (A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2))$$

metrikával. Adjuk meg az $(1, -1)$ ponttól 1 távolságra lévő pontok halmazát.

40.$^{\triangleright}$ Legyen A a valós számok egy alulról korlátos nemüres halmaza. Igazoljuk, hogy ha $B = \{-x;\ \ x \in A\}$, akkor $\inf A = -\sup B$.

41.* Felhasználva a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget (l. **1.85** feladatot), bizonyítsuk be a **T 7.5** tételt.

42.$^{\triangleright}$ Legyen X tetszőleges végtelen halmaz. Bármely $p(\in X)$ és $q(\in X)$ esetén legyen

$$d(p,q) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \neq q; \\ 0, & \text{ha } p = q. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy X a d metrikával metrikus teret alkot.

43.$^{\triangleright}$ Adjuk meg az előző feladatbeli metrikus tér nyílt és zárt részhalmazait.

Döntsük el, hogy a következő d függvények metrikák-e $\mathbf{R}$-en:

44.$^{\bullet}$ $d(x,y) = (x-y)^2$,

45.$^{\triangleright}$ $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$,

46. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$,

47. $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság szempontjából:

48.$^{\bullet}$ $P_n(\dfrac{n+1}{n}, n)$,

49.$^{\triangleright}$ $P_n(\dfrac{3n+1}{2n}, \dfrac{n-1}{n})$,

50. $P_n(\dfrac{n^2}{n^2+1}, \dfrac{n-1}{n})$,

51. $P_n(\sin n, \cos n, \dfrac{1}{n})$,

52.$^{\triangleright}$ $z_n = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$,

53.$^{\triangleright}$ $z_0 = 1, z_n = (1+i)z_{n-1}$,

54. $\mathbf{v}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathbf{i} + \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\mathbf{j}$,

55.$^{\bullet}$ $\mathbf{v}_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \dfrac{\sin n}{n}\mathbf{k}$.

Sorozat határértéke; konvergencia és divergencia

D 7.13 Metrikus térbeli pontsorozat **határértékének** a tér olyan pontját nevezzük, amelynek bármely teljes környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok eleme van. (Jelölés: $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ vagy $A_n \longrightarrow A$.) Ez azt jelenti, hogy az M metrikus tér $[A_n]$ pontsorozatának határértéke az M-beli A pont, ha bármely ε pozitív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $d(A_n, A) < \varepsilon$. Az ilyen n_0-t az ε-hoz tartozó **küszöbszámnak** nevezzük.

Speciálisan az a számot az $[a_n]$ számsorozat határértékének mondjuk, ha bármely ε pozitív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. A vektorsorozat határértéke hasonlóan definiálható.

Egy sorozatot **konvergensnek** mondunk, ha van határértéke, s **divergensnek**, ha nincs.

D 7.14 Sorozat **részsorozatain** azokat a sorozatokat értjük, amelyek a sorozatból véges vagy végtelen sok elem elhagyásával állíthatók elő és a megtartott elemeket eredeti sorrendjükben vesszük figyelembe.

T 7.15 Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, s határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozaté.

D 7.16 Legyen $[A_n]$ az M metrikus tér egy pontsorozata. Az $[A_n]$ sorozat **torlódási helyének (torlódási pontjának)** nevezzük az M minden olyan pontját, amely az $[A_n]$ valamely részsorozatának határértéke. (Ez azt jelenti, hogy konvergens sorozatnak egyetlen torlódási helye van, s ez a sorozat határértéke. Megjegyezzük, hogy az állítás megfordítása nem igaz.)

T 7.17 (**Bolzano-Weierstrass-tétel**) Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér minden korlátos sorozatának van konvergens részsorozata. (Minden korlátos számsorozatnak illetve vektorsorozatnak van konvergens részsorozata.)

T 7.18 (**Cauchy-féle konvergenciakritérium**) Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér $[A_n]$ pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely ε pozitív valós számhoz megadható olyan n_0 valós szám, hogy ha $m, n > n_0$, akkor $d(A_m, A_n) < \varepsilon$.
Feladatok megoldásában sokszor jobban alkalmazható a következő ekvivalens megfogalmazás: Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér $[A_n]$ pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely ε pozitív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $d(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$ minden p pozitív egész számra teljesül.

D 7.19 A valós $[a_n]$ számsorozatról akkor mondjuk, hogy **végtelenhez divergál**, ha bármely k pozitív valós számhoz megadható olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $a_n > k$; s akkor mondjuk, hogy **mínusz végtelenhez divergál**, ha bármely k negatív valós számhoz van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $a_n < k$. (Jelölések: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ vagy $a_n \longrightarrow \infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ vagy $a_n \longrightarrow -\infty$.)

T 7.20 Végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata végtelenhez divergál; mínusz végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata mínusz végtelenhez divergál.

Feladatok

A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban megadott $[a_n]$ sorozat a-hoz konvergál, azaz minden pozitív ε-hoz adjunk meg egy n_0 küszöbszámot. Hányadik elemtől (n_1) kezdve esnek a sorozat elemei az a szám r sugarú teljes környezetébe?

56.* $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$, $a = 1$, $r = 10^{-2}$, **57.** $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $a = 0$, $r = 10^{-6}$,

58.ᐅ $a_n = \dfrac{n+2}{3n-8}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{900}$, **59.*** $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$, $a = 1$, $r = \sqrt[99]{3} - 1$,

60.ᐅ $a_n = \dfrac{4^n}{3 \cdot 4^n + 1}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{3}$, **61.**ᐅ $a_n = \lg\dfrac{n+1}{n+2}$, $a = 0$, $r = \lg 1{,}002$,

62. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+4}{n}}$, $a = 1$, $r = 0{,}1$, **63.** $a_n = 1 + (-1)^n\dfrac{2}{3^n}$, $a = 1$, $r = \dfrac{2}{3^{100}}$, 64.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{(-1)^n + 4n}{5n + (-1)^{n-1}}$, $a = \dfrac{4}{5}$, $r = 10^{-2}$,

65.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{n}{n^3 + 1}$, $a = 0$, $r = 10^{-3}$.

66.* Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{R}^m$ $(m \in \mathbf{N}^+)$ metrikus tér valamely korlátos sorozatának egy torlódási helye van, akkor a sorozat konvergens.

67.* A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (T 7.18) felhasználva mutassuk meg, hogy az $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ sorozat divergens.

68.$^\bullet$ Konvergens-e az $[a_n]$ sorozat, ha teljesíti a következő feltételt: Minden pozitív ε valós szám esetén van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok végtelenhez divergálnak. Milyen n_1 indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak az adott k pozitív számnál? (Lehetőleg a legkisebb ilyen n_1-t adjuk meg.)

69. $a_n = \lg(n+1)$, $k = 10$,

70.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1}$, $k = 999$,

71.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $k = 20$.

Monoton és korlátos sorozatok, műveletek sorozatokkal

D 7.21 Az $[a_n]$ valós számsorozatról azt mondjuk, hogy **monoton növekvő (csökkenő)**, ha:

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \le a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \ge a_{n_2});$$

szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha:

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} < a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \ge a_{n_2}).$$

T 7.22 Monoton növekvő felülről korlátos sorozat konvergens, mégpedig legkisebb felső korlátjához konvergál. Monoton csökkenő alulról korlátos sorozat szintén konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart.

D 7.23 Két számsorozat (vektorsorozat) **összegén**, **különbségén**, **szorzatán**, **hányadosán** azt a sorozatot értjük, amelynek n-edik eleme a két sorozat n-edik elemének összege, különbsége, szorzata, hányadosa. (Megjegyezzük, hogy a hányadossorozat n-edik elemének akkor van értelme, ha a nevező nem 0.)

T 7.24 Korlátos számsorozatok összege, különbsége és szorzata szintén korlátos.

D 7.25 Egy számsorozatot (ill. vektorsorozatot) **nullasorozatnak** nevezünk, ha határértéke 0 (ill. $\mathbf{0}$).

T 7.26 Egy számsorozat akkor és csak akkor korlátos, ha bármely nullasorozattal képezett szorzata szintén nullasorozat.

T 7.27 Ha a valós $[a_n]$ számsorozatra $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$. Ha pedig $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és van olyan m valós szám, hogy $n > m$ esetén $a_n > 0$, akkor

$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \infty$; míg ha van olyan m valós szám, hogy $n > m$ esetén $a_n < 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = -\infty$.

T 7.28 Bármely $[a_n + ib_n]$ komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ valós számsorozatok konvergensek.

T 7.29 Ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ (komplex vagy valós) számsorozatok konvergensek, akkor:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k \ (k \in \mathbf{N}^+);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \text{ha} \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}, \text{ha} a_n \geq 0.$$

T 7.30 (**"Rendőr-elv"**) Ha $[a_n], [b_n], [c_n]$ olyan valós számsorozatok, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = h,$$

és van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, akkor a $[b_n]$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = h$.

T 7.31 Ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatok konvergensek, és van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

T 7.32 Végtelenhez divergáló sorozatok összege és szorzata szintén végtelenhez divergál.

T 7.33 Végtelenhez divergáló $[a_n]$ sorozat és tetszőleges alulról korlátos $[b_n]$ sorozat összege végtelenhez divergál. Ha van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ eseten $a_n > 0$ akkor a sorozatok szorzata is a végtelenhez divergál.

T 7.34 (**Bernoulli-egyenlőtlenség**) Ha $h > -1$, akkor az $(1+h)^n \geq 1 + nh$ egyenlőtlenség minden n nemnegatív egész számra teljesül.

T 7.35 Ha $q \in \mathbf{C}$ és $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

T 7.36 Bármely pozitív q számra: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

T 7.37 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

T 7.38 Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér $P_n(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$ pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha az elemek koordinátáiból álló $[x_{1n}], [x_{2n}], \ldots, [x_{kn}]$ számsorozatok külön-külön konvergensek; mégpedig $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} x_{jn} = x_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Feladatok

72.▷ Legyen $[a_n]$ valós nullasorozat, n_0 egy rögzített pozitív egész szám, $[b_n]$ pedig olyan valós vagy komplex számsorozat, amelyre $|b_n| \leq a_n$, ha $n \geq n_0$. Bizonyítsuk be,hogy $[b_n]$ is nullasorozat.

73.• Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra: $\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$.

74.• Bizonyítsuk be, hogy bármely nemnegatív egész k-ra és 1-nél nagyobb a-ra: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

75.• Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív egész k-ra: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$.

76.▷ Bizonyítsuk be, ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$.

77. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

78.▷ Legyen $z \in \mathbf{C}$ és $|z| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a $[z^n]$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $z = 1$.

Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorozatoknak van-e határértékük vagy torlódási helyeik. Mely sorozatok divergálnak végtelenhez illetve mínusz végtelenhez?

79.• $a_n = \dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}$,

80.▷ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$,

81.• $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n$,

82.• $a_n = \dfrac{n+2}{2n} + \dfrac{2}{(-1)^n}$,

83.▷ $0, 1, \frac{1}{2}, 4, \frac{2}{3}, 9, \frac{3}{4}, 16, \ldots$,

84.• $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}}$,

85. $a_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n}$,

86. $a_n = -\dfrac{n^3+1}{n^2+1}$,

87. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 3k; \\ \frac{n^2-n}{n^2}, & \text{ha } n = 2k+1; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n = 2k+2 \quad (k \in \mathbf{N}^+), \end{cases}$

88.▷ $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n \leq 10^5; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n > 10^5 \end{cases}$,

89.• $a_n = \dfrac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_{q-1} n + b_q}$, $a_j, b_k \in \mathbf{R}$,
$j = 0, 1, \ldots, p$; $k = 0, 1, \ldots, q$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

90.• Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából a **48.** — **55.** feladatokban megadott sorozatokat.

Konvergensek-e az alábbi komplex számsorozatok? Ha konvergensek, akkor számítsuk ki a határértéküket. (A gyökvonás mindenütt valós gyökvonást jelent.)

91.• $z_n = \dfrac{n^2 - i(n^2-1)}{n^2 - i}$,

92.• $z_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n} + in}{n+1}$,

93.• $z_n = \sqrt{n+1} - i\sqrt{n}$,

94.• $z_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i$,

95.▷ $z_n = \dfrac{i^n}{3^n + i^n}$,

96.▷ $z_n = (\sqrt{1-n^2} - in)n \quad (n \in \mathbf{N})$,

97.▷ $z_n = (1-i)^n$,

98.• $z_n = \left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^n$,

99. $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} i^k$,

100.▷ $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(1+i)^k}$,

101. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^k$,

102. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1-3i}{1+2i}\right)^k$.

Vizsgáljuk meg az alábbi valós számsorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. Adjuk meg – ha léteznek – a sorozatok határértékét, infimumát és szuprémumát.

103.• $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$,

104.• $a_n = \dfrac{5n-2}{5-10n}$,

105.• $a_n = \dfrac{n^2+1}{n(n+1)}$,

106. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+n+1}$,

107. $a_n = \dfrac{1-5^{n+2}}{5^n}$,

108.• $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}}$,

109.▷ $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$,

110. $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k; \\ \frac{n-1}{n}, & \text{ha } n = 2k-1, \end{cases}$

111.▷ $a_n = \dfrac{k^n}{n!} \quad (k \in \mathbf{N}^+)$,

112.∗ $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$,

113.▷ $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+10)}$,

114.▷ $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{3\sqrt[3]{n}+1}$,

115.▷ $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{5^k}$,

116. $a_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} \quad (n \geq 3)$,

117. $a_n = \dfrac{n^2 - 8\cdot 4^n}{n^2 + 6\cdot 4^n}$,

118.• $a_n = \sqrt[4]{\dfrac{2^n+1}{n+2^n}}$,

119.▷ $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}\sin\dfrac{1}{n}$,

120.• $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1} - n)}$.

Döntsük el, hogy az alábbi valós számsorozatok konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek, akkor határozzuk meg a határértéküket; ha divergensek, akkor nézzük meg, divergálnak-e végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez.

121.• $a_n = \dfrac{1000n^3 + 20n^2}{0,001n^4 + 100n^2}$,

122. $a_n = \dfrac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$,

123.• $a_n = \dfrac{5}{1+(-1)^n 5n^2} - \dfrac{n+2}{n+3}$,

124.• $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^5$,

125.▷ $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$, **126.** $a_n = \dfrac{n!}{n! + (n+1)!}$,

127.• $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n+1}$, **128.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{2}}$,

129. $a_n = \dfrac{n - \sqrt[3]{n^2}}{n + \sqrt{n^2+1}}$, **130.**• $a_n = \dfrac{2n^3}{2n^2+3} + \dfrac{1 - 5n^2}{5n+1}$,

131.• $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3 + 3n^2} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{5n^6+2} + \sqrt[5]{n^7 + 3n^3}}$, **132.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n^6+1} - \sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n^4 - 3} + \sqrt{n+1}}$,

133. $a_n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$, **134.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$,

135.• $a_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(5n-1)^5}$,

136.▷ $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$, **137.**▷ $a_n = \dfrac{1 - 2 + \cdots + (2n-1) - 2n}{\sqrt{n^2+1}}$,

138.▷ $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$, **139.** $a_n = \dfrac{1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$,

140.* $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \dfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a + \dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$, $a \in \mathbf{R}$,

141.▷ $a_n = \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}$, $|a|, |b| < 1$,

142.• $a_n = \dfrac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$, **143.**• $a_n = \dfrac{1}{1{\cdot}2} + \dfrac{1}{2{\cdot}3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$,

144.* $a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$,

145.* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$,

146.• $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$, **147.**• $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,

148.▷ $a_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$, **149.** $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,

150.• $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

151.• $a_n = \dfrac{(1 - 4 - 9 - \cdots - (5n-6))(\sqrt{n^4 - n^3} - \sqrt{n^4 + n^3})}{n^3}$,

152.▷ $a_n = \dfrac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}\,\dfrac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}\sin n!$,

153.* $a_n = \dfrac{2n + \sqrt{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^4+n^3-1}}{\sqrt{n^5+n^4+2n} - \sqrt{n^5-n^4+2}}$,

154.▷ $a_n = \dfrac{n}{3^n}$, **155.**• $a_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{n}}$,

156.• $a_n = \sqrt[3n^2]{n^2 + 2n + 4}$, **157.**▷ $\sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21}$, $n \geq 2$,

158. $a_n = \sqrt[2n]{\dfrac{2n-1}{2n+1}}$, **159.**▷ $a_n = \sqrt[n^2]{n}$, $n \geq 2$,

160.• $\sqrt[n]{\dfrac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_{q-1} n + b_q}}$; $a_j, b_k \in \mathbf{R}$

$j = 0, 1, \ldots, p$; $k = 0, 1, \ldots, q$; $\dfrac{a_0}{b_0} > 0$.

Valós számsorozatok hatványa, logaritmusa

D 7.39 Az $[a_n]$valós számsorozat $[b_n]$ valós kitevőjű **hatványának** nevezzük az $[a_n^{b_n}]$ sorozatot, ha $a_n^{b_n}$ legfeljebb véges sok elem kivételével értelmezve van a valós számok körében. Ha a_n legfeljebb véges sok elem kivételével pozitív, akkor az $[\ln a_n]$ sorozatot az $[a_n]$ sorozat természetes alapú **logaritmusának** nevezzük. (Természetesen más alapú logaritmusok is értelmezhetők.)

T 7.40 Az $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozat konvergens (a határértéket e-vel jelöljük), azaz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590045\ldots.$$

T 7.41 Bármely $[a_n]$ valós számsorozat esetén $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a$ $(a \in \mathbf{R})$. Bármely $[a_n]$ pozitív elemű sorozatra és a pozitív valós számra $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$.

T 7.42 Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Ha $0 < a < \infty$, $-\infty < b < \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. Ha $0 < a < 1$, $b = \infty$ vagy $1 < a \leq \infty$, $b = -\infty$ vagy $a = \infty$, $-\infty \leq b < 0$ vagy $a = 0$, $0 < b \leq \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$. Abban az esetben, ha $0 < a < 1$, $b = -\infty$ vagy $1 < a \leq \infty$, $b = \infty$ vagy $a = \infty$, $0 < b \leq \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.
(Megjegyezzük, hogy az $a = \infty$, $b = 0$ valamint az $a = 1$, $b = \pm\infty$ és az $a = 0$, $b = 0$ esetekben további vizsgálatok szükségesek. $a < 0$ esetben általában nem értelmezhetők a hatványok a valós számok körében.)

Feladatok

161.▷ Bizonyítsuk be, hogy bármely k egész számra $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$.

162.• Bizonyítsuk be, hogy ha $[a_n]$ $(a_n \in \mathbf{N}^+)$ olyan sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

163.▷ Bizonyítsuk be, hogy bármely $p \in \mathbf{Z}$ és $q \in \mathbf{N}^+$ (azaz bármely $\frac{p}{q}$ racionális szám) esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}$.

164.▷ Legyen $[a_n]$ végtelenhez és $[b_n]$ mínusz végtelenhez tartó számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = e^r$ $(r \in \mathbf{R})$ (A **161.** — **163.** feladatok általánosítása.)

165.• Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$ $(r \in \mathbf{R})$.

166.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < \lim_{n\to\infty} a_n = a < \infty$ és $-\infty < \lim_{n\to\infty} b_n = b < \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ és

167.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = r$ $(r \in \mathbf{R})$,

168.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,

169.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$,

170.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$,

171.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ és

172.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$,

173.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, amelyekre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $(a_n > 0)$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ és

174.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r$ $(r \geq 0)$,

175.▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

176.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

A **T 7.41** tétel és a **161.** — **166.** feladatok alkalmazásával számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

177.• $a_n = \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n}$, **178.**• $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$, **179.**▷ $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$,

180.▷ $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$, **181.**▷ $a_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n+1}$, **182.**• $a_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)^n$,

183. $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, **184.** $a_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$, **185.** $a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$,

186. $a_n = \left(\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n}\right)\left(\frac{-3n+1}{3n+4}\right)^{4n-2}$,

187.• $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4}\right)^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6} - \sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$,

188.• $a_n = n^2\left(\sqrt{n^6-n+2} - \sqrt{n^6+4n-4}\right)\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2}$.

Rekurzív sorozatok

A **189. — 202.** feladatokban a sorozatokat rekurzív képlettel adtuk meg. Számítsuk ki a határértéküket, ha létezik.

189.[▷] $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{a_n}$.

190.[•] Legyen a adott pozitív szám. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a_1 pozitív számot választva az

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

sorozat $\sqrt{a}$-hoz konvergál. (Pozitív szám négyzetgyöke kiszámítható a fenti sorozattal.)

191.[*] Az előző feladat általánosításaként mutassuk meg, hogy bármely a pozitív számra az

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right)$$

rekurziós képlettel megadott sorozat határértéke $\sqrt[k]{a}$, ahol $k \geq 2$ egész szám.

192.[▷] $a_1 = a \quad (\in \mathbf{R}),\quad a_{n+1} = 2a_n^2 + a_n$, **193.**[•] $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3 + 1}$,

194.[▷] $a_1 = \sqrt{a}, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n},\ (a > 0)$, **195.**[▷] $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$.

Legyenek $0 < b \leq a$ tetszőleges rögzített valós számok. A következő rekurzív definícióval egyszerre adunk meg két sorozatot:

$$a_1 = a,\quad b_1 = b,\quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\quad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}.$$

Igazoljuk, hogy

196. $[a_n]$ monoton csökkenő, $[b_n]$ monoton növekvő sorozat,

197. Az a_n és a b_n számok mértani közepe minden n-re ugyanaz,

198. $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$, **199.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$.

Tekintsük az úgynevezett Fibonacci-sorozatot: $a_1 = a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Mutassuk meg:

200.[*] $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, **201.**[*] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

202. Ha C az AB szakasz belső pontja és $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$, akkor ez az arány $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (az aranymetszés arányszáma).

Vegyes feladatok

203.▷ Igazoljuk, hogy ha $|\lim_{n\to\infty} a_n| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$.

204.▷ Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = \infty$.

205.* Bizonyítsuk be, hogy minden $m(\in \mathbf{N}^+)$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \cdots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{1+m}.$$

206.• Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

207. A **206.** feladat alapján határozzuk meg az $\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right]$ sorozat határértékét.

208. a **206.** feladat alkalmazásával határozzuk meg az $\left[\left(1-\frac{1}{n^k}\right)^n\right]$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ sorozat határértékét.

209. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $b_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = b < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

210.▷ Legyen $a_n \geq -1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $k \in N^+ - \{1\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+a_n} = 1$.

211.* Mutassuk meg, hogy az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{3^k}$ sorozat konvergens.

212.* Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$, akkor az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k+1}$ sorozat konvergens.

213.* Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $[\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}]$ sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét.

214. Egy egységnyi oldalú négyzetet 9 egybevágó négyzetre bontunk, ezek közül a középsőt beszínezzük. A második lépésben a megmaradó nyolc kis négyzet mindegyikét 9 egybevágó négyzetre bontjuk, majd mindegyikben a középsőt ismét beszínezzük. Az eljárást folytatjuk. Mekkora lesz az n-edik lépés után beszínezett részek területének összege? Jelöljük s_n-nel az n-edik lépés után fehéren maradó rész területét. Határozzuk meg $\lim_{n\to\infty} s_n$ értékét!

215.* Bizonyítsuk be, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata.

216.* Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$.

217.▷ Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} n \ln(1+\frac{1}{n}) = 1$.

218.▷ Számítsuk ki az $a_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ sorozat határértékét.

8. fejezet

Függvényhatárérték és folytonosság

Valós függvények és szemléltetésük

D 8.1 n-**változós valós függvényen** ($n \in \mathbf{N}^+$) olyan f függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya ($\mathrm{Dom}\, f$) az $\mathbf{R}^n$ halmaznak, értékkészlete ($\mathrm{Ran}\, f$) pedig az $\mathbf{R}$-nek valamely részhalmaza. Ha az n-et nem akarjuk hangsúlyozni, akkor röviden **valós függvényről**, speciálisan, ha $n = 1$, akkor **egyváltozós valós függvényről** beszélünk.

D 8.2 Az egyváltozós valós $x \mapsto f(x)$ $\quad (x \in \mathrm{Dom}\, f)$ függvényt síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $(x, f(x))$ koordinátájú pontok halmazával (az $y = f(x)$ egyenletű geometriai alakzattal) ábrázoljuk, ezt az alakzatot a **függvény grafikonjának** nevezzük.
A kétváltozós $(x, y) \mapsto f(x, y)$ $\quad ((x, y) \in \mathrm{Dom}\, f)$ valós függvény grafikonjának egyenlete: $z = f(x, y)$, amely térbeli derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolható. A grafikonnak az $x = a$ síkkal való metszete az $x = a, \quad z = f(a, y)$ egyenletrendszerű alakzat; x-**nívóvonal**. Ezt az x-nívóvonalat merőlegesen levetítve az yz-síkra, az $x = 0, \quad z = f(a, y)$ egyenletrendszerű görbét kapjuk. Hasonlóan származtathatók az y- és z-nívóvonalak, s ezek merőleges vetületei az xz- illetve xy-síkra.

D 8.3 Az egyetlen egyenlettel meghatározott függvényt **explicit alakban megadottnak**, röviden **explicitnek** nevezzük, ha a kiszámítandó függvényérték az egyenlet egyik oldalán magában áll, azaz n-változós függvény esetén $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad (x_k \in \mathbf{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n)$ alakú. Minden más esetben a függvényt **implicit alakban megadottnak**, röviden **implicitnek** mondjuk.

Feladatok

1. Határozzuk meg az $f(-1), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right), f(4), f(6)$ helyettesítési értékeket, ha

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & \text{ha } -1 \le x < 0; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \le x < \pi; \\ \frac{x}{x^2 - 2}, & \text{ha } \pi \le x \le 6. \end{cases}$$

2. Határozzuk meg az $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{8}), f(\sqrt{\log_2 1024})$ helyettesítési értékeket, ha

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & \text{ha } x \le 2; \\ \frac{1}{x-2}, & \text{ha } 2 < x \le 3; \\ 2x - 5, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$$

3. A 2 oldalú $ABCD$ négyzetet messük el az AC átlóra merőleges e egyenessel. Legyen az A csúcs és az e egyenes távolsága x. Írjuk fel az A csúcsot is tartalmazó lemetszett síkidom területét x függvényeként. Határozzuk meg a területet, ha $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ illetve $x = 2$.

4. Mivel egyenlő $f(2), f(-1), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f(2x), 2f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}, f(x^2), (f(x))^2$, ha $f(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$?

Az 5. — 9. feladatokban adjuk meg azt az f függvényt, amely teljesíti a felírt egyenletet:

5. $f(x-2) = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1,$

6. $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1, \quad x \neq 0,$

7.▹ $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x, \quad x \neq -1,$

8.▹ $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4+1}{x^2}, \quad x \neq 0,$

9.▹ $f(x^2) = 1 - |x|^3.$

10. Adott az $f(x) = \log_c \frac{1-x}{1+x}$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in (-1, 1)$, akkor $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

11.▹ Határozzuk meg az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ racionális egész függvény (polinom) együtthatóit, ha $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$.

12.* Határozzuk meg az $f(x) = a + bc^x \quad (c > 0)$ függvényben az a, b, c paraméterek értékeit, ha $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$.

13.• Milyen a érték mellett lesz az $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 2x}{2x-1}$ függvény az $x = \frac{1}{2}$ hely kivételével egyenlő egy másodfokú függvénnyel?

14. Milyen a és b értékeknél lesz az $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + 2b}{x^2 + x + 1}$ függvény elsőfokú?

Határozzuk meg az alábbi valós függvények értelmezési tartományát:

15. $\frac{x^2}{1+x}$,

16. $\sqrt{5-2x}$,

17.• $\sqrt[3]{\frac{2x}{x^2-2x+2}}$,

18.• $\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$,

19. $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$,

20. $\frac{|x|+10}{|x|-10}$,

21. $\lg(3x-4)$,

22. $\log_a(x^2-4)$,

23. $\log_2 \log_3 \log_4 x$,

24. $\log_a(x+2) + \log_a(x-2)$,

25.• $\lg \cos x$,

26. $\lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$,

27.• $\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$,

28.• $\lg \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(3x-8)}$,

29. $\lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 16))$,

30. $\frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3 - x)$,

31. $\ln(\sin(\ln x))$,

32. $\ln \dfrac{1}{\ln(1-x)+1}$.

Határozzuk meg az f és $\dfrac{1}{f}$ valós függvények értelmezési tartományát, ha:

33. $f(x) = x^2 - x + 1$,
34. $f(x) = x + \sqrt{x+2}$,
35. $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$,
36. $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$,
37. $f(x) = 3 - 2\cos x$,
38. $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$.

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

39.• $f(x) = \dfrac{1}{2-\cos 3x}$,
40.• $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,
41.• $f(x) = \lg(1 - 2\cos x)$,
42.• $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Mi az értelmezési tartománya a következő függvényeknek, ha az f függvény értelmezési tartománya a $[0;1]$ intervallum?

43.• $f(x-5)$,
44. $f(4x)$,
45. $f(-x)$,
46. $f(2x+1)$,
47.▷ $f(3x^2)$,
48.• $f(\operatorname{tg} x)$.

Határozzuk meg az alábbi többváltozós valós f függvények értelmezési tartományát, valamint azt a geometriai alakzatot, amely az értelmezési tartományt a síkbeli, illetve térbeli derékszögű koordináta rendszerben ábrázolja:

49.• $\sqrt{1-x^2-y^2}$,
50.▷ $\sqrt{x-\sqrt{y}}$,
51. $\ln(xy)$,
52. $\sqrt{x \sin y}$,
53.▷ $\sqrt{\ln(\sin x \cos y)}$,
54. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$,
55.• $\ln(1-x^2-y^2-z^2)$,
56. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$,
57.• $\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$,
58. $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,
59.▷ $\dfrac{1}{\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-|x+y|}}$,
60. $\sqrt{\ln \cos \dfrac{2\pi x}{y}}$,
61.▷ $\sqrt{\sin \pi x \sin \pi y}$,
62.• $\sqrt{z-x^2-y^2} + \sqrt{4-z-x^2-y^2}$,
63.▷ $\ln(x \ln(y-x))$,
64. $\ln(1 - \operatorname{sgn}^2 xy)$,
65.▷ $\sqrt{-\sin^2 \pi x} + \sqrt{-\sin^2 \pi y}$,
66.▷ $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2+c}{x^2-2x+y^2+c}}$, $c \in \mathbf{R}$,
67. $\sqrt{r^2-x^2-y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-s^2}}$, $r > s > 0$.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

68.• $f(x) = \sqrt{\sin x}$,
69.▷ $f(x) = x^{\frac{1}{\lg x}}$,

70.• $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{ha } -\pi\le x\le 0;\\ 2, & \text{ha } 0<x\le 1;\\ \frac{1}{x-1}, & \text{ha } 1<x\le 4,\end{cases}$

71. $f(x)=\begin{cases}-x^3, & \text{ha } x<0;\\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x=0;\\ -2, & \text{ha } 0<x,\end{cases}$

72.* $\cos 3x\,\operatorname{sgn}\sin 2x$,

73.▷ $f(x)=x+\sqrt{x^2}$,

74. $f(x)=\cos x+|\cos x|$,

75. $f(x)=|x+2|x$,

76. $f(x)=2|x-2|-|x+1|+x$.

77.• Milyen geometriai transzformációkkal származtathatók az $f(x)$ függvény grafikonjából az $f(x+a), f(x)+b, f(kx), lf(x), |f(x)|, f(|x|)$ $(a,b,k,l\in\mathbf{R}-\{0\})$ függvények grafikonjai, ha értelmezve vannak?

78.• Milyen geometriai transzformációkkal származtatható az $f(x)$ függvény grafikonjából az $lf(k(x+a))+b$ függvény grafikonja, ha értelmezve van? Ezek segítségével ábrázoljuk a $\sqrt{x}$ függvényből kiindulva a $\frac{3}{2}\sqrt{-2x-4}-1$ függvényt.

79.• Ábrázoljuk transzformációval az $\frac{1}{x}$ függvényből kiindulva a $\frac{2x+5}{x+1}$ függvényt.

80.* Ábrázoljuk transzformációval a $\cos x$ függvényből kiindulva a $3\cos x-\sqrt{3}\sin x$ függvényt.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

81.• $|x^2-2x-3|$,

82.• $||x|-1|$,

83.• $\log_2|x+2|$.

Nívóvonalakkal (vagy a függvény grafikonjára jellemző más síkmetszetekkel) szemléltessük az alábbi egyenletekkel megadott $(x,y)\mapsto z$ függvényeket:

84.• $z=x^2+y^2$,

85.▷ $z^2=x^2+y^2$,

86.▷ $z=y^2-x^2$,

87. $z=(x+y)^2$,

88.▷ $z=x^2+y$,

89.▷ $z^2=x^2+y^2-1$,

90.▷ $z^2=x^2+y^2+1$.

Az alábbi $x\mapsto y$ egyváltozós valós függvényeket paraméteres egyenletrendszerrel adtuk meg. Küszöböljük ki a t paramétert!

91. $x=3t,\quad y=6t-t^2$,

92.▷ $x=t^2-2t+3,\quad y=t^2-2t+1$,

93. $x=\cos t,\quad y=\sin 2t,\quad t\in[0,\pi]$,

94.• $x=a\cos t, y=b\sin t\quad (a,b>0)$,

95. $x=a\sin^3 t, y=a\cos^3 t, t\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

96.• $x=\operatorname{tg} t,\quad y=\sin 2t+2\cos 2t$,

97. $x=t^3+1,\quad y=t^2$,

98. $x=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$,

99.* $x=a^t+a^{-t},\quad y=a^t-a^{-t}\quad (a>0)$.

Függvény határértéke

D 8.4 (**Heine**) Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** az x_0 helyen l, ha f értelmezve van x_0 valamely E környezetében, és minden olyan E-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
Az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, ha f értelmezve van x_0 valamely E környezetében, és minden olyan E-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty)$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$.
Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** a végtelenben l, ha f értelmezve van a ∞ valamely E környezetében, és végtelenhez divergáló minden E-beli $[x_n]$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} f(x) = l$.
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

D 8.5 (**Cauchy**) Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** az x_0 helyen l, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha x benne van x_0-nak δ sugarú környezetében, azaz ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor az f függvény értelmezve van az x helyen és $f(x)$ benne van az l szám ε sugarú teljes környezetében, azaz $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, ha bármely pozitív (negatív) k számhoz van olyan pozitív δ, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x)$ értelmezve van és $f(x) > k$ $(f(x) < k)$.
Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** a végtelenben l, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív k szám, hogy ha $x > k$, akkor $f(x)$ értelmezve van és $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

T 8.6 A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója ekvivalens.

T 8.7

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad (\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0),$$

ha az egyenlőségek jobb oldalán álló határértékek léteznek.

Feladatok

A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója (**D 8.4** és **D 8.5**) alapján bizonyítsuk be a következő állításokat:

100.* $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x+1}{5x+4} = \dfrac{1}{2}$, **101.*** $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$,

102. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{3x+9}=\dfrac{5}{3}$, **103.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=\infty$,

104. $\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty (0<a<1)$, **105.*** $\lim\limits_{n\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ nem létezik.

106.* Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_{p-1}x+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_{q-1}x+b_q}=\begin{cases}0, & \text{ha } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p=q;\\ \infty, & \text{ha } p>q \text{ és } \frac{a_0}{b_0}>0;\\ -\infty, & \text{ha } p>q \text{ és } \frac{a_0}{b_0}<0;\end{cases}$$

ahol $p,q\in\mathbf{N}; a_i,b_j\in\mathbf{R}\quad (i=0,1,\ldots,p;\quad j=0,1,\ldots,q)$ és $a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

107.* Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}=\begin{cases}0, & \text{ha } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p=q;\\ \infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+2, \frac{a_0}{b_0}>0;\\ \infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+1, \frac{a_0}{b_0}<0;\\ -\infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+2, \frac{a_0}{b_0}<0;\\ -\infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+1, \frac{a_0}{b_0}>0;\end{cases}$$

ahol $k,p,q\in\mathbf{N}; a_i,b_j\in\mathbf{R}\quad (i=0,1,\ldots,p;\quad j=0,1,\ldots,q)$ és $a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

Az x megfelelő hatványával egyszerűsítve határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket:

108.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-2}$, **109.*** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$,

110.* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+x^2-1}{x^2+x-1}$, **111.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$,

112.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$, **113.*** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$,

114.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$, **115.*** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+2)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket (ha szükséges, akkor az $x-x_0$ tényezővel való egyszerűsítés útján):

116.* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$, **117.*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$,

118.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$, **119.**$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3}$,

120.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$, **121.*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}\quad (p,q\in\mathbf{N}^+)$,

122. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$, **123.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$.

Számítsuk ki az alábbi, végtelenbeli függvényhatárértékeket az x alkalmas hatványával való egyszerűsítése útján:

124.▷ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$, **125.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$,

126.• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, **127.•** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

Vegyes feladatok

128.* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. **129.▷** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket a $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$, illetve a $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\dfrac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ azonosságok alapján:

130.▷ $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$, **131.▷** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$,

132.▷ $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$, **133.▷** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

134.• $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$, **135.*** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

136.• $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, **137.•** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$,

138.* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$, **139.*** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$,

140.• $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$, **141.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+c)(x+d)}-x\right)$,

142.• $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}$, **143.▷** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

Az alábbi feladatokban szereplő kifejezéseket ismert trigonometriai azonosságok alkalmazásával olyan alakra hozhatjuk, hogy a felírt függvényhatárértéket közvetlenül leolvashatjuk. Végezzük el a átalakítást, és írjuk fel a határértéket!

144.• $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$, **145.•** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$,

146.▷ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$, **147.▷** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}\right|$,

148.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$, **149.**▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}$,

150.▷ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$, **151.**▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.

Felhasználva a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen, számítsuk ki azokat!

152.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$, **153.**• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$,

154.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}\quad (\beta\neq 0)$, **155.**▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$,

156.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$, **157.**▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$,

158.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, **159.*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{\sin^2 x}$,

160.• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$, **161.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

162.▷ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$, **163.**▷ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$,

164.▷ $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$, **165.**▷ $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (a **7.164** — **7.166** feladatok és a függvényhatárérték Heine-féle definíciója (**D 8.4**) alapján):

166.• $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$, **167.**• $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$,

168.• $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$, **169.*** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}$,

170. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$, **171.**▷ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}$,

172.▷ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$.

173.• Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=a>0$ és $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$. (Megjegyezzük, hogy az x_0 a ∞-t vagy $-\infty$-t is jelentheti.)

174.• Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty \quad \text{és} \lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)=b,$$

akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^b$. (Az előző feladathoz hasonlóan az x_0 itt ∞ vagy $-\infty$ is lehet.)

A **173.** és a **174.** feladatok alapján számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

175.* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$,

176. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}}$,

177.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$,

178.* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

179. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$,

180.* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

181.* $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$,

182.* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

183.* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$,

184.* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$,

185.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$,

186.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$,

187.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$,

188.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}$,

189.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos^3 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$,

190.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(a\neq k\pi, k\in \mathbf{Z})$,

191. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{k(x)}\neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)},$$

$(\alpha\in\mathbf{R})$ (ahol x_0 jelentheti a ∞-t vagy a $-\infty$-t is).

Egyoldali függvényhatárérték

D 8.8 A v valós szám δ hosszúságú **bal oldali környezetén** a $(v-\delta; v)$, δ hosszúságú **jobb oldali környezetén** a $(v; v+\delta)$ intervallumot értjük.

D 8.9 Az egyváltozós valós f függvény **bal oldali határértéke** az x_0 helyen b, ha f értelmezve van x_0 valamely B bal oldali környezetében és minden olyan B-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$; vagy, ami ezzel ekvivalens, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha x benne van x_0-nak δ hosszúságú bal oldali környezetében, azaz,ha $x_0-\delta<x<x_0$, akkor f értelmezve van az x helyen, és $f(x)$ benne van b-nek ε sugarú teljes környezetében, azaz $|f(x)-b|<\varepsilon$. (Jelölés: $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b$; ha $x_0=0$, akkor egyszerűen $\lim_{x\to -0} f(x)=b$.) Hasonlóan definiálható az x_0 helyen a **jobb oldali határérték** ($\lim_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim_{x\to +0} f(x)$), a **balról (jobbról) végtelenhez divergálás**.

T 8.10 Egyváltozós valós függvénynek valamely helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha ezen a helyen bal oldali és jobb oldali határértéke is létezik, és a két egyoldali határérték egyenlő; ebben az esetben a határérték az egyoldali határértékekkel egyenlő.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyváltozós valós függvények bal- és jobb oldali határértékét a megadott x_0 helyen:

192. $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{ha } x \le 1; \\ 3x-5, & \text{ha } 1 < x; \end{cases} \quad x_0 = 1,$

193.* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}; \quad x_0 = 1,$

194.* $f(x) = 3 + \dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}; \quad x_0 = 1,$

195.* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}; \quad x_0 = 0,$

196.* $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}; \quad x_0 = 0,$

197. $f(x) = \dfrac{5}{(x-2)^3}; \quad x_0 = 2,$

198. $f(x) = \dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}; x_0 = 1.$

Függvények folytonossága

D 8.11 Az egyváltozós valós f függvényt **folytonosnak** nevezzük az x_0 helyen (pontban), ha f értelmezve van az x_0 helyen, van határértéke az x_0 helyen és $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Hasonlóan értelmezhető az f függvény bal oldali, illetve jobb oldali folytonossága. (A definícióban határérték helyett bal oldali, illetve jobb oldali határértéket veszünk.)

T 8.12 Adott pontban folytonos függvények összege, különbsége és szorzata is folytonos ebben a pontban; két ilyen függvény hányadosa is folytonos, ha az osztó nem zérus az adott pontban.

D 8.13 Ha az f függvény az x_0 helyen (pontban) folytonos, akkor azt is szokás mondani, hogy x_0 az f **folytonossági helye**. Ha viszont az f függvény az x_0 helyen nem folytonos, de az x_0 valamely környezetének minden pontjában folytonos, akkor az x_0-t f **szakadási helyének** nevezzük.
A szakadási helyek típusai:
x_0 **hézagpont**, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ létezik, de az x_0 helyen a függvény nincs értelmezve;
az x_0 pontban **megszüntethető szakadása** van f-nek, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ létezik, $f(x_0)$ is létezik, de $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$;
az x_0 pontban **lényeges szingularitása** van, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nem létezik. A lényeges szingularitás fontos speciális esete a pólus: Akkor mondjuk, hogy az x_0 helyen **pólusa** van a függvénynek, ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$.

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények. Ha a függvényeknek szakadási helyeik vannak, akkor állapítsuk meg azok típusát:

199.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$,

200. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$,

201. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+7}$,

202. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$,

203.$^\bullet$ $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$,

204. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$,

205.$^\bullet$ $f(x) = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$,

206. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \le 1; \\ \frac{2}{x-1}, & \text{ha } 1 < x, \end{cases}$

207.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{5x^2-3x}{2x}$,

208. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

209.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$,

210.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$,

211.$^\triangleright$ $f(x) = \operatorname{Ent} 2x - 2x + 2$,

212.$^\bullet$ $\operatorname{sgn} |x^4 + x^2|$,

213.$^\triangleright$ $\operatorname{sgn} |\sin x|$,

214. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } x \le 0; \\ (1-x)^2, & \text{ha } 0 < x \le 2; \\ 3-x, & \text{ha } 2 < 2, \end{cases}$

215.$^\triangleright$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{ha } x \ne 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

216.* $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}; \\ 4-2x, & \text{ha } x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}, \end{cases}$

217.$^\triangleright$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{ha } x \ne 2k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z}).$

Határozzuk meg — ha lehetséges — az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek:

218.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \ne 0; \\ a, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

219. $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{ha } x \ne -1; \\ a, & \text{ha } x = -1, \end{cases}$

220.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & \text{ha } 0 < x; \\ -x, & \text{ha } x \le 0, \end{cases}$

221. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \le 0; \\ a(x-1), & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$

222.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{ha } x \le 0; \\ ax+b, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \le x, \end{cases}$

223. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \le 1; \\ x^2+ax+b, & \text{ha } 1 < |x|, \end{cases}$

224.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{ha } |x| \ne 1; \\ a, & \text{ha } x = -1; \\ b, & \text{ha } x = 1, \end{cases}$

225.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], x \ne 0, x \ne \pi; \\ a, & \text{ha } x = 0; \\ b, & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyeiken folytonosak-e balról vagy jobbról:

226.* $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ha } |x|\le 1;\\ 0, & \text{ha } |x|>1,\end{cases}$ **227.*** $f(x)=\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x-1}, & \text{ha } x\ne 1;\\ a(\in \mathbf{R}), & \text{ha } x=1,\end{cases}$

228. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|}+x, & \text{ha } x\ne 0;\\ 1, & \text{ha } x=0,\end{cases}$ **229.*** $(-1)^{\mathrm{Ent}(x^2-1)}$,

230.* $f(x)=\ln x-\mathrm{Ent}(\ln x)$,

231.* $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{ha } x\le 0;\\ 2-\frac{2}{2x-1}-\mathrm{Ent}\left(2-\frac{2}{2x-1}\right), & \text{ha } 0<x.\end{cases}$

Függvénygörbe aszimptotája

D 8.14 Az e egyenest a végtelenbe nyúló g görbe **aszimptotájának** nevezzük, ha a g görbén végtelenbe távolodó pontnak az e egyenestől való távolsága 0-hoz konvergál. Az f egyváltozós valós függvény görbéjének (grafikonjának) aszimptotáját szokás egyszerűen az f **függvény aszimptotájának** nevezni.

T 8.15 Az $y=f(x)$ egyenletű görbének az y tengellyel párhuzamos aszimptotája, azaz **függőleges aszimptotája** csak olyan x_0 helyen lehet, ahol az f függvény legalább egy oldalról végtelenhez vagy mínusz végtelenhez divergál, és ez esetben az $x=x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

T 8.16 Az $y=f(x)$ egyenletű görbének akkor és csak akkor van az y tengellyel nem párhuzamos, azaz **ferde aszimptotája**, ha az $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ és $c=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$ vagy pedig $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ és $c=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$ határértékek léteznek. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az $y=mx+c$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota ∞-ben, illetve $-\infty$-ben. (Speciálisan, ha $m=0$, akkor **vízszintes aszimptotáról** beszélünk.)

Feladatok

Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Vizsgáljuk meg folytonosságukat, és határozzuk meg aszimptotáik egyenletét:

232.* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, **233.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$,

234.* $f(x)=\sqrt{x^4-1}$, **235.*** $f(x)=\dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$,

236.* $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, **237.*** $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$,

238.▷ $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$, **239.*** $f(x)=3\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-1}$,

240. $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)^2}$, **241.** $f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}$,

242.* $f(x) = \dfrac{x^4 - 2a^2x^2 + a^4}{x^3 - 3bx^2 + 2b^2x} \quad (a, b \neq 0)$,

243.* $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

244.* $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{Ent} x}{\operatorname{Ent} x}; x_0 = n (n \in \mathbf{Z})$,

245.* $f(x) = \dfrac{\operatorname{Ent} x^3}{x^2 + 1}$,

246.* Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \cdots + a_{p-1}x + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + b_2x^{q-2} + \cdots + b_{q-1}x + b_q}$$

($a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}^+$) függvénynek a $p \leq q+1$ feltétel mellett van ferde aszimptotája, s ebben az esetben a ferde aszimptota egyenlete:

$$y = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}x + \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0^2}, & \text{ha } p = q + 1; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ 0, & \text{ha } p < q. \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi implicit alakban megadott $x \mapsto y = y(x)$ függvények ferde aszimptotáinak egyenletét:

247.* $(2x + y)^2(x + y) = x$,

248.* $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$,

249.* $(x^2 - y^2)^2 = 2x \quad (x \geq 0)$,

250.* $x^3 + y^3 = 3x^2$,

251.* $x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1)$,

252.* $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$.

Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvények

D 8.17 A valós (komplex) értékű f függvényt **korlátos**nak nevezzük, ha van olyan v valós szám, hogy $|f(P)| \leq v$ a $\operatorname{Dom} f$ minden P elemére érvényes. Ha ez a feltétel csak az értelmezési tartomány valamely H részhalmazának P pontjaira teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f a H **halmazon korlátos**. Megfelelő módon definiálható valós függvény alulról illetve felülről korlátossága.

D 8.18 Az M_1 metrikus térből az M_2 metrikus térbe vivő függvényt a $H(\subseteq M_1)$ **halmazon folytonos**nak nevezzük, ha f a H minden belső pontjában folytonos, továbbá a H-nak minden olyan P határpontjára, amely H-hoz tartozik, teljesül az, hogy ha $[P_n]$ olyan H-beli sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P)$.
Ez azt jelenti, hogy egyváltozós valós függvény valamely $[a, b]$ zárt intervallumon akkor és csak akkor folytonos, ha az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában folytonos, a-ban jobb oldalról, b-ben pedig bal oldalról folytonos.

T 8.19 Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvény korlátos is ezen a halmazon.

T 8.20 Legyen H az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér korlátos zárt részhalmaza. Ha f a H halmazon folytonos valós függvény akkor vannak olyan $P_1, P_2 \in H$, hogy $f(P_1) = \inf\{f(P); P \in H\}$, $f(P_2) = \sup\{f(P_0); P \in H\}$, azaz az f a H-n felvett értékei halmazának infimumát és szuprémumát is felveszi a H bizonyos pontjaiban.

T 8.21 Legyen az egyváltozós valós f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon. Legyenek továbbá $x_1, x_2 \in [a, b]$ tetszőleges olyan pontok, amelyekre $f(x_1) \le f(x_2)$. Ha $f(x_1) \le c \le f(x_2)$ $(c \in \mathbf{R})$, akkor van olyan $x_0 \in [x_1, x_2]$ (vagy $x_0 \in [x_2, x_1]$), hogy $f(x_0) = c$.

T 8.22 (**Bolzano**) Ha az egyváltozós valós f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos és az intervallum két végpontjában ellentétes előjelű, akkor az intervallum belsejében van zérushelye.

Feladatok

253.$^\bullet$ Van-e valós megoldása a $\sin x - x + 1 = 0$ egyenletnek?

254.$^\triangleright$ Van-e megoldása az $x^5 - 18x + 2 = 0$ egyenletnek a $[-1, 1]$ intervallumban?

255.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy az $a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$ $(a_i \in \mathbf{R},\ i = 0, 1, \dots, 2n+1,\ a_0 \ne 0)$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

256.$^\bullet$ Felveszi-e az $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $\frac{7}{3}$ értéket a $[-2, 2]$ intervallumban?

257.$^\triangleright$ Legyen f a $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos függvény és $\operatorname{Ran} f \subseteq [0, 1]$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [0, 1]$, hogy $f(c) = c$.

258.* Feszítsünk ki egy rugalmas szalagot a $[0; 1]$ zárt intervallumon úgy, hogy a szalag kezdőpontja 0, a végpontja 1 legyen. Mozgassuk a szalag két végét egyszerre úgy, hogy egy adott időpillanatban a kezdőpontja a, a végpontja pedig b legyen $(0 \le a < b \le 1)$. Mutassuk meg, hogy van a szalagnak olyan pontja, amely helyben marad.

259.* Legyen f a $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos függvény, és legyen $f(0) = f(1) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $d \in (0, 1]$ valós számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely d hosszúságú.

260.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy egy elhanyagolható vastagságú, körgyűrű alakú elektromos vezetőn van két olyan pont, amely ugyanolyan hőmérsékletű.

9. fejezet

Differenciálhányados, derivált

A differenciálhányados definíciója

D 9.1 Az egyváltozós valós f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányadosának** nevezzük a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határértéket, ha ez létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy f az x_0 **pontban differenciálható**. E határértéket szokás

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

alakban is írni, ahol $x=x_0+h$. E definícióval ekvivalens az alábbi:

D 9.2 Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 **pontban differenciálható**, ha megadható olyan valós szám — amelyet $f'(x_0)$-lal jelölünk — és x_0-nak olyan E teljes környezete, hogy ha $x\in E$, akkor f értelmezve van az x helyen, és

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0),$$

ahol $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

D 9.3 Az f függvény differenciálható a $H\subseteq \operatorname{Dom} f$ halmazon, ha annak minden pontjában differenciálható.

D 9.4 Az f függvény **deriváltjának** vagy differenciálhányados-függvényének nevezzük, és f'-vel jelöljük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes olyan x_0 pontok halmaza, ahol f differenciálható, értéke pedig minden ilyen pontban az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosa. Szokásos jelölések $f'(x_0)$-ra:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0},\quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\quad Df(x_0),\quad \frac{d}{dx}f(x_0),\quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

T 9.5 Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonos is x_0-ban.

D 9.6 Ha a többváltozós valós f függvény mindegyik változóját rögzítjük, kivéve az i-ediket, akkor az így kapott egyváltozós valós függvény differenciálhányadosát az f függvény i-edik változója szerinti **parciális differenciálhányadosának** nevezzük. Például a kétváltozós f függvény (x_0,y_0) pontbeli x szerinti parciális differenciálhányadosán a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

határértéket értjük, melynek szokásos jelölései:

$$f'_x(x_0,y_0),\ f_x(x_0,y_0),\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\left(\substack{x=x_0\\ y=y_0}\right)},\ D_x f(x_0,y_0),\ \frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0).$$

Az $(x,y)\to f(x,y)$ függvény x szerinti **parciális deriváltján** azt a kétváltozós függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya az összes olyan (x_0,y_0) pontokból áll, ahol az f függvény x szerinti parciális differenciálhányadosa létezik, értéke pedig minden ilyen pontban ezzel a parciális differenciálhányadossal egyenlő.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az $x_0=2$ pontban a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

határérték segítségével:

1.$^\triangleright$ $f(x)=4$,
2.$^\triangleright$ $f(x)=4x+2$,
3. $f(x)=2x^3-1$,
4. $f(x)=\sqrt{x-1}$,
5. $f(x)=x^{-2}$,
6.$^\bullet$ $f(x)=\sin x$.

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az x_0 pontban a

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

határérték segítségével:

7.$^\triangleright$ $f(x)=x^3$,
8.$^\triangleright$ $f(x)=\sqrt{x}$,
9.$^\bullet$ $f(x)=\sin x$,
10. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$,
11. $f(x)=\cos x$,
12. $f(x)=\operatorname{tg} x$.

Bizonyítsuk be, hogy

13.$^\triangleright$ $(x^n)'=nx^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}^+$,
14.$^\triangleright$ $(x^{\frac{1}{m}})'=\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$, $x>0$, $m\in\mathbf{N}^+$.

Határozzuk meg az alábbi f függvények x_0 pontbeli differenciálhányadosát a törtmentes alak (**D 9.2**) segítségével:

$$\Delta f=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(x)\Delta x,$$

ahol $\Delta f=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x=x-x_0$, $\varepsilon(x)\to 0$ ha $x\to x_0$. (Ellenőrizzük, hogy $\varepsilon(x)\to 0$ valóban fennáll!)

15.$^\triangleright$ $f(x)=3x^2-2x+1$,
16. $f(x)=x^3+x$,
17.$^\bullet$ $f(x)=\sin x$, $[f'(x_0)=\cos x_0]$,
18. $f(x)=\cos x$, $[f'(x_0)=-\sin x_0]$.

19.$^\triangleright$ Legyen $h(x)$ folytonos az x_0 helyen. Határozzuk meg $f'(x_0)$ értékét, ha

$$f(x)=(x-x_0)h(x),$$

és mutassuk meg, hogy a $g(x) = |x - x_0|h(x)$ függvény csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $h(x_0) = 0$.

20.$^{\triangleright}$ A **D 9.1** definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy ha $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$ és $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x) = f(-x)$, akkor $f'(x) = -f'(-x)$, ha pedig $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x) = -f(-x)$, akkor $f'(x) = f'(-x)$. (Páros függvény deriváltja páratlan, páratlané páros.)

21. Tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban. Fejezzük ki a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

kifejezést $f'(a)$ segítségével.

22.$^{\bullet}$ Tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban, és

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy g folytonos a-ban.

Adjunk példát olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre, mely mindenütt értelmezve van és amely kielégíti az alábbi feltételt:

23. f mindenütt folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható;

24. f mindenütt differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos;

25. f mindenütt differenciálható, és deriváltja mindenütt folytonos;

26. f mindenütt differenciálható, de deriváltja az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

A **D 9.6** definíció alapján határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait és azok értékét a megadott P pontban:

27.$^{\triangleright}$ $f : (x, y) \mapsto xy$, $P(1, 2)$, **28.** $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $P(0, 0)$,

29. $f(x, y) = 4x + 2y - 1$, $P(1, 1)$, **30.**$^{\triangleright}$ $f(x, y, z) = xyz$, $P(1, 2, 3)$,

31. $f : (x, y, z) \mapsto 3x - 4y + 2z - 6$, $P(0, 0, 0)$,

32. $f : (x, y, z) \mapsto 0$, $P(1, 1, 1)$.

33.$^{\triangleright}$ Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy f mindkét parciális differenciálhányadosa létezzék a $(0, 0)$ pontban, és számítsuk ki ezeket a parciális differenciálhányadosokat.

Differenciálási szabályok

T 9.7 Konstans függvény deriváltja az azonosan 0 függvény. Két differenciálható függvény összege, különbsége, szorzata ugyancsak differenciálható, két differenciálható függvény hányadosa, ill. differenciálható függvény reciproka minden olyan helyen differenciálható, ahol a nevező nem 0. Ha f és g két differenciálható függvény és $c \in \mathbf{R}$, akkor

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}, \quad (f^n)' = nf^{n-1}f' \ (n \in \mathbf{Z}).$$

T 9.8 $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

T 9.9 $(x^q)' = qx^{q-1}$, ha q racionális szám, $x > 0$. (l. **34.** feladat).

D 9.10 Az f külső és g belső függvényből összetett $f \circ g$ függvényen azt a függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya g értelmezési tartományának azon x_0 pontjaiból áll, melyekre $g(x_0)$ benne van f értelmezési tartományában, azaz

$$\operatorname{Dom} f \circ g = \{x_0 \in \operatorname{Dom} g; g(x_0) \in \operatorname{Dom} f\},$$

és amelyre $x_0 \in \operatorname{Dom} f \circ g$ esetén $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0))$.

T 9.11 Ha g folytonos x_0-ban, f folytonos a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0-ban.

T 9.12 Ha a $g : x \mapsto g(x)$ függvény differenciálható x_0-ban, az $f : u \mapsto f(u)$ függvény pedig az $u_0 = g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható x_0-ban, és

$$\left(\frac{d(f \circ g)}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df}{du}\right)_{u=g(x_0)} \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Tehát minden ilyen x_0 pontban: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Feladatok

34.^{P} Bizonyítsuk be a **T 9.9** tételt a **T 9.7**-beli szabályok és a **14.** feladat eredményének felhasználásával.

35.$^{\bullet}$ Számítsuk ki az $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ függvény deriváltját, ha $m, n \in \mathbf{N}^+$, m páratlan és $x \in \mathbf{R}$.

Deriváljuk az alábbi függvényeket a **T 9.7-9**-beli szabályok felhasználásával.

36. $x^2 - 2x + 3$,	**37.** $7 - x - x^3$,	**38.** $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}$,
39. $2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2x}$,	**40.** $\frac{1}{x} + \sqrt{x^5}$,	**41.** $(x+2)\sqrt{x^3}$,
42. $x \sin x$,	**43.** $(x^3 + 1)\cos x$,	**44.** $\frac{\sin x}{x}$,

45. $\operatorname{tg} x$, **46.** $\operatorname{ctg} x$, **47.** $\dfrac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$,

48. $\dfrac{x-1}{x^2}$, **49.** $\dfrac{x^3+4}{1+2x}$, **50.** $(x+3)^4$,

51. $(1-x)^{20}$, **52.** $(x^2+1)^4$, **53.** $(1-x^2)^{10}$,

54. $(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$, **55.** $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, **56.** $\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^5$,

57. $(\sin x + 1)^{20}$, **58.** $(\sin^{20} x + 1)^{20}$, **59.** $\operatorname{tg}^n x$, $n \in \mathbf{N}^+$,

60. $\operatorname{ctg}^5 x$.

Legyen f differenciálható függvény. Írjuk fel f'-vel kifejezve az alábbi függvények deriváltját:

61. $f(-x)$, **62.** $f(x^2)$, **63.** $f(ax)$,

64. $f(1/x)$, **65.** $f(\sin^2 x)$, **66.** $f(\sqrt{1-x^2})$.

Határozzuk meg az alábbi függvény deriváltját:

67. $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$, **68.** $F(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

69. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Állapítsuk meg, hogy mely függvények összetételéből származnak az alábbi függvények, majd számítsuk ki a deriváltjukat:

70. $f(x) = \sin^3 x$, **71.** $f(x) = \sin x^3$, **72.** $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$,

73. $f(x) = \sin^2(\operatorname{tg} x)$, **74.** $f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x)$, **75.** $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x^2)$.

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjának értelmezési tartományát! Vegyük észre, hogy ez egyik esetben sem egyezik meg a függvény értelmezési tartományával!

76. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, **77.** $f(t) = \sqrt{1-a^2t^2}$, $a \neq 0$,

78. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, **79.** $f(v) = (3v + 18v^2)^{\frac{1}{3}}$,

80. $f(x) = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{2}{3}}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, és $ac \neq 0$,

81. $g(t) = \sqrt{1 + \sin t}$.

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait.

82. $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^3$, **83.** $g(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$,

84. $\rho(\varphi, \psi) = \sin\varphi \cos\psi$, **85.** $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$,

86. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, **87.** $f(x,y,z) = x\sin(xyz)$,

88. $g(x,y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$,

89. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

90. $h(x,y) = f^2(x)g(y)$,

91. $h(x,y,z) = f^2(x,y)g^3(y,z)$,

92. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$,

93. $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1x_2\dots x_n$,

94. $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, $(a_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\dots,n)$.

Határozzuk meg $f_x(0,0)$ és $f_y(0,0)$ értékét, ha

95. $f(x,y) = \sqrt[3]{(x+1)(y-1)}$,

96.* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,

97. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$,

98. $f(x,y) = \sqrt{|x|}$.

99.* Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható minden $x \in \mathbf{R}$ pontban, de a derivált nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

100. Mutassuk meg, hogy az $x_0 = 0$ pont tetszőleges környezetében található olyan hely, ahol az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin\frac{1}{x}|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható, de a 0-ban mégis differenciálható.

A mértani sorozat összegképletéből, azaz az

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

képletből vezessünk le formulát az alábbi két összegre:

101.* $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$,

102.* $1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$.

103.* A $2\sin x \cos kx = \sin(k+1)x - \sin(k-1)x$ azonosság felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x} \quad (x \neq k\pi),$$

és ennek segítségével számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\sin x + 3\sin 3x + \dots + (2n-1)\sin(2n-1)x.$$

Számítsuk ki az alábbi magasabb rendű deriváltakat:

104. $(\sin(3x+1))^{(4)}$,

105. $(\cos(4-2x))^{(7)}$,

106. $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(5)}$,

107. $\left(\sqrt{x}\right)^{(10)}$

Számítsuk ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait:

108. $f(x,y) = x^4 + xy^3$,

109. $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$,

110. $f(x,y)=\sin x^2 y$, **111.** $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2}{y}$,

112. $f(x,y,z)=(x+y^2+z^3)^2$.

Számítsuk ki az alábbi függvények megadott magasabbrendű parciális deriváltjait:

113. $g(x,y)=x^3\sin y+y^3\sin x$, $\dfrac{\partial^6 g}{\partial x^3\partial y^3}$,

114. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$,

115. $f(x,y)=(x-x_0)^n(y-y_0)^m$, $\dfrac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}$ $(m,n\in\mathbf{N})$,

116.* $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}$ $(m,n\in\mathbf{N},\ m+n>0)$.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $c,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{R}$ konstansok esetén az alábbi függvények kielégítik a megadott egyenleteket:

117.ᐅ $y(x)=cx^2$, $y'(x)x-2y(x)=0$ $(x\in\mathbf{R})$,

118. $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$, $y''+y=0$ $(x\in\mathbf{R})$,

119. $y(x)=c_1x+\dfrac{c_2}{x}$, $x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=0$ $(x\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$,

120. $f(x,y)=x^3-3xy^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (**Laplace egyenlet**),

121. $f(x,t)=(c_1x+c_2)(c_3t+c_4)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (**hullámegyenlet**),

122. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$.

Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket $(m,n\in\mathbf{N},\ a\in\mathbf{R})$!

123.ᐅ $(x^m)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ $(m\ge n)$,

124. $(x^n)^{(n)}=n!$, **125.**ᐅ $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$,

126.ᐅ $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$, **127.** $(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos(ax+\dfrac{n\pi}{2})$.

Alkalmas átalakítás után, az előző feladatok eredményeit felhasználva számítsuk ki az alábbi függvények n-edik deriváltját:

128.• $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$, **129.** $\sin x\cos x$,

130.* $\sin 3x\cos 2x$, **131.*** $\cos ax\cos bx$,

132. $\dfrac{x}{x^2-1}$, $|x|\ne 1$, **133.** $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$, $x\ne -2$, $x\ne 1$.

134. Határozzuk meg az $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ függvény n-edik deriváltját! Ehhez bizonyítsuk be és használjuk fel, hogy $c\ne 0$ esetén $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}(cx+d)^{-1}$.

135.$^\triangleright$ **Leibniz formula:** Ha f és g n-szer differenciálható függvények, akkor fg is:
$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Az előző feladatbeli Leibniz-formulát felhasználva határozzuk meg az alábbi deriváltakat:

136.$^\triangleright$ $(x^2 \sin x)''$,

137. $(x \sin x)^{(25)}$,

138. $(x^2 \sin x)^{(25)}$,

139. $(\sin 2x \cos(x+1))'''$.

Számítsuk ki az alábbi f függvények összes magasabb rendű deriváltját, és azok értékét az $x = 0$ pontban:

140. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$,

141.$^\bullet$ $f(x) = x|x|$,

142. $f(x) = \sin x$,

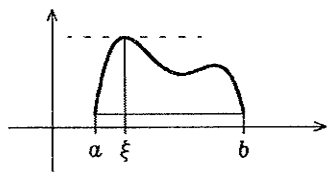
143. $f(x) = \cos x$.

144.$^\triangleright$ Mutassuk meg, hogy az $f_1(x) = x^{\frac{4}{3}}$ függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem, az $f_2(x) = x^{\frac{7}{3}}$ függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Keressünk olyan k számot, hogy az $f_3(x) = x^k$ függvény $(n-1)$-szer legyen differenciálható 0-ban, de ne legyen differenciálható n-szer.

A differenciálszámítás középértéktételei

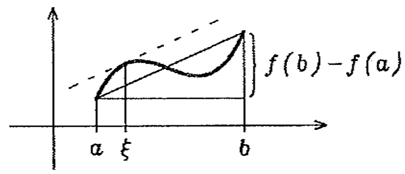
T 9.13 (**Rolle**-féle középértéktétel)
Ha az egyváltozós valós f függvény
1. folytonos az $[a, b]$ intervallumon,
2. differenciálható az (a, b) intervallumon,
3. $f(a) = f(b)$,

akkor van legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, ahol
$$f'(c) = 0.$$



T 9.14 (**Lagrange**-féle középértéktétel)
Ha az egyváltozós valós f függvény
1. folytonos az $[a, b]$ intervallumon,
2. differenciálható az (a, b) intervallumon,

akkor van legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, ahol
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



T 9.15 (**Cauchy**-féle középértéktétel)
Ha az egyváltozós valós f és g függvények
1. folytonosak az $[a, b]$ intervallumon,
2. differenciálhatóak az (a, b) intervallumon,
3. és $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$,

akkor van legalább egy olyan $c \in (a, b)$ hely, ahol $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Feladatok

Eleget tesznek-e az alábbi függvények a Rolle-tétel feltételeinek az adott intervallumon? Ha igen, adjunk meg egy c értéket, ahol $f'(c) = 0$.

145. $f(x) = 1 - |x|, \quad [-1, 1]$, **146.** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \quad [-1, 1]$,

147. $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$, **148.** $f(x) = |\sin x|, \quad [0, 2\pi]$.

Ellenőrizzük a Lagrange-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

149.▷ $f(x) = 3x^2 - 5, \; [-2, 0]$, **150.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \; [-1, 1]$,

151.* $f(x) = \sqrt[3]{x}, \; [-1, 8]$, **152.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \; [-1, 8]$.

Ellenőrizzük a Cauchy-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

153.▷ $f(x) = x^2 - 2x + 3, \; g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5, \; [1, 4]$,

154. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \; g(x) = x, \; [-1, 8]$, **155.** $f(x) = x^2, \; g(x) = x^3, \; [-1, 1]$.

A Rolle-tétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

156.▷ a $3x^5 + 15x - 2 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van;

157.▷ az

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény deriváltjának végtelen sok zérushelye van a $(0, 1)$ intervallumban;

158.▷ a $c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1} = 0$, $(c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$ egyenletnek van gyöke a $(0, 1)$ intervallumban, ha $c_1 + \dfrac{c_2}{2} + \cdots + \dfrac{c_n}{n} = 0$.

A Lagrange-féle középértéktétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

159.▷ $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

160.▷ $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \geq |x + y|, \quad x, y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$,

161.▷ $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}, \quad x, y > 0, \; x \neq y$.

162.* Tegyük fel, hogy f értelmezve van és differenciálható minden $x > 0$ esetén, és hogy $f'(x) \to 0$, ha $x \to \infty$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x+1) - f(x) \to 0$, ha $x \to \infty$.

Differenciálható függvények monotonitása

T 9.16 Legyen f differenciálható az (a,b) intervallumon. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő [csökkenő] az (a,b) intervallumon, ha $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] az (a,b) minden x pontjában.

T 9.17 Ha az (a,b) intervallumon f differenciálható, és minden $x \in (a,b)$ esetén $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], akkor f szigorúan monoton növekszik [csökken] az (a,b) intervallumon.

T 9.18 Ha az f függvény deriváltja az (a,b) intervallum minden pontjában 0, akkor f konstans az (a,b) intervallumon.

Feladatok

A deriváltak segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely részhalmazán (szigorúan) monoton növekvőek és melyeken (szigorúan) monoton csökkenőek:

163. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1,$ **164.** $f(x) = (x+2)^3,$

165. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4},$ **166.** $f(x) = \sin^2 2x,\ 0 < x < \pi,$

167. $f(x) = \sqrt[3]{x+2},$ **168.** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4).$

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

169. $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, ha $x > 0$, **170.** $x + \dfrac{x^3}{3} > \operatorname{tg} x$, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,

171. $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$, ha $\alpha > 1,\ x > 1$.

172.* Bizonyítsuk be, hogy a

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (n \geq 1,\ a_0 \neq 0)$$

polinomfüggvény szigorúan monoton a $(-\infty, -b)$ és a (b, ∞) intervallumokon, ha b elegendően nagy pozitív szám.

Implicit és inverz függvény differenciálása

P 9.19 Ha egy $F(x,y) = 0$ egyenlettel implicit módon megadott $x \mapsto y(x)$ függvény az egyenletből kifejezhető egy I intervallum fölött, akkor ott az $y'(x)$ derivált a már ismert módon számítható. Például:

$$xy - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Az $y'(x)$ függvény úgy is kiszámítható, hogy $F(x, y(x))$-et összetett függvényként x szerint differenciáljuk. Például:

$$(xy(x) - 1)' = y(x) + xy'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

Ez megegyezik az előző eredménnyel, hisz $y(x) = 1/x$ behelyettesítése után $y'(x) = -1/x^2$ adódik. Azzal a kérdéssel, hogy egy $F(x, y) = 0$ alakú egyenlet mikor ír le függvénykapcsolatot és hogy $y(x)$ mikor fejezhető ki ebből az egyenletből, nem foglalkozunk.

D 9.20 Az f függvény az értelmezési tartományának egy H részhalmazán **invertálható**, ha tetszőleges két $x_1, x_2 \in H$ elem esetén

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

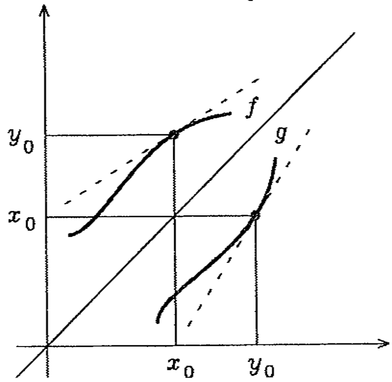
Ha f invertálható a H halmazon, akkor a $f|_H$ (azaz a H-ra korlátozott f) függvény **inverzén** azt a φ függvényt értjük, melyre

1. $\operatorname{Dom}\varphi = \{f(x); x \in H\}$,
2. $y_0 \in \operatorname{Dom}\varphi$ esetén $\varphi(y_0) = x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x_0) = y_0$.

Az f függvény inverzére az f^{-1} jelölés használatos. Ez összetéveszthető a reciprok jelölésével, ezért példatárunk e pontját kivéve e jelölést külön említés nélkül nem használjuk.

T 9.21 Az egyváltozós valós f függvény legyen invertálható az x_0 pontot tartalmazó valamely $H \subseteq \operatorname{Dom} f$ halmazon, és legyen g az $f|_H$ függvény inverze. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pont valamely teljes környezetében, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor g differenciálható az $y_0 = f(x_0)$ pontban, és

$$\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=y_0} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}}.$$



Feladatok

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvények deriváltját:

173. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$, **174.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$,

175.* $3xy = (x^3 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, **176.*** $\sin(x^2y^2) = x$.

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvények második deriváltját:

177.* $2xy - y^2 = 3$, **178.** $x \cos y = y$.

Határozzuk meg az alábbi $f(x)$ függvények $f^{-1}(x)$ inverzét:

179. $f(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$, **180.*** $f(x) = x^2 - 6x + 8,\ x \geq 3$,

181.* $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc \neq 0)$.

Az eredeti és az inverz függvény közötti kapcsolat segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre:

182.▸ $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, $(a,b,c \in \mathbf{R})$, **183.** $f(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$.

184. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}$$

függvény invertálható, de nem monoton $\mathbf{R}$-en.

185. Mutassuk meg, hogy ha f nem monoton, akkor van három olyan x_1, x_2, x_3 pont, hogy $x_2 \in (x_1, x_3)$, de $f(x_2) \notin (f(x_1), f(x_3))$.

186. Mutassuk meg, hogy egy intervallumon értelmezett folytonos f függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton.

Határozzuk meg az alábbi függvények inverzének deriváltját és annak értékét a megadott x_0-hoz tartozó $y_0 = f(x_0)$ pontban, és ellenőrizzük az eredményt implicit függvény deriválásával:

187.• $f(x) = 5x^3 + x - 7$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 1$,

188. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$,

189. $f(x) = 7x - \sin 3x$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$,

190. $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 1$.

191.▸ Tegyük fel, hogy az $f : B \to C$ és a $g : A \to B$ függvények kölcsönösen egyértelmű leképezések az adott halmazok között. Mutassuk meg, hogy $f \circ g$ is kölcsönösen egyértelmű függvény, és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

192.▸ Igazoljuk, hogy az $f : x \mapsto x^4 + x^3 + 1$, $x \in (0,3)$ függvény szigorúan monoton növekedő. Képezzük az $F(x) = f(2g(x))$ függvényt, ahol g az f inverze, és határozzuk meg az $F'(3)$ értéket.

Görbék érintkezése, érintő, simulókör

T 9.22 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor az f grafikonjának az x_0 abszcisszájú pontban van érintője, és az érintő iránytangense éppen $f'(x_0)$. Így az érintő egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, míg az érintőre merőleges u.n. normális egyenes egyenlete: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, ha $f'(x_0) \neq 0$, és $x = x_0$, ha $f'(x_0) = 0$.

D 9.23 Ha két görbe közös pontja M, és mindkettőnek van érintője e pontban, akkor a görbék M pontnál bezárt szögén az érintőik által bezárt szöget értjük. Ha e szög 0, akkor azt mondjuk, hogy a két görbe az M pontban **érinti** egymást.

D 9.24 Legyenek f és g az x_0 helyen legalább r-szer differenciálható valós függvények, amelyekre $0 \le k \le r$ esetén $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$. Ha az $f^{(r+1)}(x_0)$ és a $g^{(r+1)}(x_0)$ differenciálhányadosok nem mindketten léteznek, vagy ha mindkettő létezik, nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű görbék az x_0 helyen **r-edrendben érintik** egymást.

T 9.25 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen legalább kétszer differenciálható, és $f''(x_0) \neq 0$, akkor az $y = f(x)$ egyenletű görbének az x_0 helyen egyértelműen meghatározott simulóköre — azaz a görbét legalább másodrendben érintő köre — van, és ennek a körnek a sugara és középpontjának koordinátái:

$$r(x_0) = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}, \quad \left(x_0 - \frac{f'(x_0)(1 + f'^2(x_0))}{f''(x_0)}, f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}\right).$$

T 9.26 Ha az f függvény legalább n-szer differenciálható és $f(c) \neq 0$, akkor az

$$y = (x - c)^n f(x), \text{ és az } y = (x - c)^n f(c)$$

egyenletű görbék legalább n-edrendben érintik egymást.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának érintőjét és normálisát az adott x_0 abszcisszájú pontban:

193. $f(x) = \sin \sqrt{x}$, $x_0 = \pi^2$, **194.** $f(x) = \sin \dfrac{\pi^2}{x}$, $x_0 = \pi$,

195. $f(x) = x^3 - 8x$, $x_0 = 3$.

Írjuk fel az alábbi egyenletű síkgörbék adott pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét:

196.▹ $x^3 + y^3 - 6xy = 0$, $(3, 3)$, **197.** $y = \sin(x + y)$, $(\pi, 0)$.

198.▹ Legyen f pozitív értékű, differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f(x)$ és az $f(x) \sin ax$ ($a \neq 0$) függvények grafikonjai metszéspontjaikban érintik egymást.

199.▹ Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy az origón és érinti az $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ egyenletű görbét.

200. Milyen összefüggés áll fenn a, b és c között, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola érinti az x-tengelyt?

201.▹ Igazoljuk, hogy ha az $y(x) = x^3 + px + q$ egyenletű harmadfokú görbe érinti az x-tengelyt, akkor $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{4}\right)^2 = 0$.

Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonjai k-adrendben érintik egymást az $x_0 = 0$ helyen:

202. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$, $k = 4$,

203. $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$, $k = 5$,

204. $f(x) = 1 + x + x^2$, $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $k = 2$,

205. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, $k = 2$.

Hányad rendben érintik egymást az alábbi függvények grafikonjai a megadott pontban:

206. $x^3 \cos x$, x^2, $a = 0$, **207.** $(x-1)(|x-1|+1)$, $x-1$, $a = 1$.

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott görbék metszési szögeit:

208.[▷] $y^2 = 4x - x^2$, $x^2 + y^2 = 8$,

209.[▷] $2x^2 + y^2 = 20$, $4y^2 - x^2 = 8$,

210.[▷] $xy = 12$, $x^2 + y^2 = 25$.

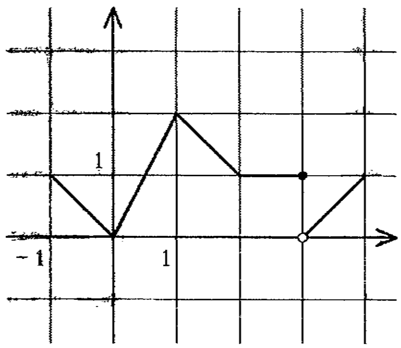
Az alábbi görbék adott P pontjaiban számítsuk ki a görbületi sugarat és a simulókör középpontjának koordinátáit:

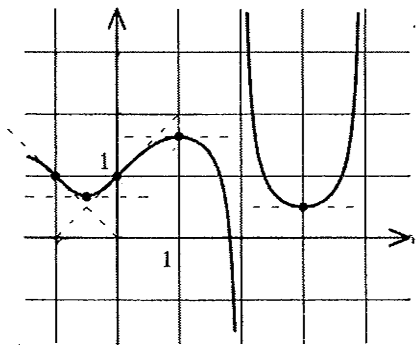
211. $6y = x^3 - 12x - 2$, $P(2,-3)$, **212.**[▷] $y^2 = 2px$, $(p > 0)$, $P(x,y)$,

213. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $P(0,b)$, **214.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $P(a,0)$.

Vegyes feladatok

215. Vázoljuk fel szabad kézzel az alábbi grafikonokról leolvasható információk, valamint a differenciálhányados geometriai jelentése alapján az ábrázolt függvények deriváltfüggvényét!





216.[▷] Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le x_0 \\ ax + b, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen x_0-ban.

217.[▷] Legyen f differenciálható x_0-ban. Mutassuk meg, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \le x_0 \\ f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható x_0-ban. Határozzuk meg $g'(x_0)$-t! Vázoljuk fel g grafikonját!

218.▷ Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$y = \begin{cases} m^2/|x|, & \text{ha } |x| > c \\ ax^2 + b, & \text{ha } |x| \le c \end{cases}$$

egyenletű görbe folytonos, és minden pontjában érintővel rendelkező legyen.

219.▷ Legyen f kétszer differenciálható minden $x \le x_0$ pontban. Határozzuk meg az a, b és c paraméterek értékét úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \le x_0 \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény kétszer legyen differenciálható x_0-ban.

220. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(x) + g(x)$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható x_0-ban, de $g(x)$ nem,
b) sem $f(x)$, sem $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban.

221. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(x)g(x)$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható x_0-ban, de $g(x)$ nem,
b) sem $f(x)$, sem $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban.
Vizsgáljuk me az a) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, b) $f(x) = g(x) = |x|$ függvényeket a 0 pontban.

222. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(g(x))$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható $g(x_0)$-ban, de $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban,
b) $f(x)$ nem differenciálható $g(x_0)$-ban, de $g(x)$ differenciálható x_0-ban,
c) $f(x)$ nem differenciálható $g(x_0)$-ban, és $g(x)$ sem differenciálható x_0-ban.
Vizsgáljuk me az a) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, b) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, c) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ függvényeket a 0 pontban.

223. Legyenek f és g háromszor differenciálható függvények, és legyen $F : x \mapsto f(g(x))$. Határozzuk meg az F'' és F''' függvényeket.

10. fejezet

Egyváltozós valós elemi függvények

Racionális függvények

D 10.1 Valós [komplex] együtthatós n-edfokú **racionális egész függvényen**, más néven **polinomfüggvényen** olyan,

$$f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \; n \in \mathbf{N}$$

alakú függvényt értünk, amelyben az $a_0, \ldots, a_n$ együtthatók adott valós [komplex] számok, x értéke pedig tetszőleges valós [komplex] értéket felvehet. Az n számot f **fokszámának** nevezzük, és f^*-gal jelöljük. A zérusfüggvény foka $-\infty$. Az a_0 együtthatót a polinom **főegyütthatójának** nevezzük. **Racionális függvényen** két polinomfüggvény hányadosát értjük, amit **racionális törtfüggvénynek** hívunk, ha a nevező nem konstansfüggvény.

D 10.2 Az f polinomfüggvény g polinomfüggvénnyel való **maradékos osztásán** olyan q és r polinomfüggvények meghatározását értjük, amelyekkel $f = gq + r$, és $r^* < g^*$. (E maradékos osztás egyértelműen elvégezhető, ha g nem a zérusfüggvény.)

T 10.3 Az egyváltozós valós (vagy komplex) f polinomfüggvénynek az $(x - c)$ elsőfokú polinomfüggvénnyel való maradékos osztásának maradéka az $f(c)$ értékű konstansfüggvény.

T 10.4 **Polinomfüggvény gyöktényezős alakja:** Minden valós vagy komplex együtthatós nemkonstans egyváltozós n-edfokú f polinomfüggvényhez találhatók olyan $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbf{C}$, $(s \leq n)$, és $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbf{N}^+$ számok, hogy minden x-re

$$f(x) = a_0(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_s)^{k_s},$$

ahol a_0 az f polinom főegyütthatója, és $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. (A c_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ számot az f polinom k_j-szeres **zérushelyének** nevezzük.) Ha f minden együtthatója valós, és a nemvalós c_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ szám k_j-szeres zérushely, akkor van olyan c_l $(l = 1, 2, \ldots, s; l \neq j)$, hogy $c_l = \bar{c}_j$ és $k_l = k_j$.

T 10.5 **Valós polinomfüggvény valós gyöktényezős alakja:** Ha a valós együtthatós f polinomfüggvény valós zérushelyei $c_1, c_2, \ldots, c_r$, akkor f felírható

$$f(x) = (x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_r)^{k_r} p(x)$$

alakban, ahol $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbf{N}^+$, és p olyan valós együtthatós polinom, amelynek nincs valós zérushelye.

T 10.6 **Valós együtthatós polinomfüggvény valós szorzatalakja:** Minden valós együtthatós polinomfüggvény felírható elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomfüggvények szorzataként.

P 10.7 Horner módszer. Egy polinom helyettesítési értéke kiszámítható az alábbi zárójelezést felhasználva is:

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n = (\ldots((a_0c + a_1)c + a_2)c + \cdots + a_{n-1})c + a_n.$$

A kiszámított a_0, $a_0c + a_1$, $(a_0c + a_1)c + a_2, \ldots$ részeredmények az $f(x) : (x - c)$ maradékos osztás hányadosának együtthatóit adják. Az eljárást az ú. n. Horner-sémában ábrázoljuk. Ez például az $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polinomfüggvénnyel felírva a következő:

	a_0	a_1	a_2	a_3
c	a_0	$a_0c + a_1$	$(a_0c + a_1)c + a_2$	$((a_0c + a_1)c + a_2)c + a_3$

ahol tehát $f(c) = ((a_0c + a_1)c + a_2)c + a_3$, és

$$\frac{f(x)}{x - c} = a_0x^2 + (a_0c + a_1)x + ((a_0c + a_1)c + a_2) + \frac{f(c)}{x - c}.$$

T 10.8 Rolle gyöktétele. Egészegyütthatós polinomfüggvénynek csak olyan racionális zérushelye lehet, amelynek nem egyszerüsíthető alakjában a számláló a polinom konstans tagjának, a nevező a legmagasabb fokú tag együtthatójának osztója. Ha egy egészegyütthatós polinomfüggvény főegyütthatója 1, akkor annak minden racionális zérushelye egész szám.

Feladatok

Végezzük el az alábbi f polinomnak a g polinommal való maradékos osztását, azaz határozzuk meg a q hányadost és az r maradékot!

1.* $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^2 + 3x + 1$,

2. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $g(x) = x^4 + x^2 + 1$,

3. $f(x) = x^6 - x^5 + x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x^3 - x^2$,

4. $f(x) = x^{10} + 2x^9 - x^3 - 2x^2 + 8x + 3$, $g(x) = x^8 - x + 3$,

5. $f(z) = z^3 + 2iz^2 + 3z + 6i$, $g(z) = z + i$,

6. $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, $g(z) = z^2 + (1 + i)z + i$,

7. $f(x) = x^{3k} - 1$, $g(x) = x^3 - 1$,

8. $f(x) = x^{3k}$, $g(x) = x^2 + x + 1$,

Írjuk fel

a) gyöktényezős alakban (**T 10.4**),

a) valós szorzatalakban (**T 10.6**),

a) valós gyöktényezős alakban (**T 10.5**) és

a) a **D 10.1** szerinti polinom alakban

azt a legkisebb fokszámú f polinomot, amelynek főegyütthatója 1, zérushelyei $c_1, c_2, \ldots, c_r$, mégpedig c_1 k_1-szeres,..., c_r pedig k_r-szeres zérushely.

9.* $c_1 = -1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$,

10. $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$,

11. $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$,

12. $c_1 = 1$, $c_2 = i$, $c_3 = -i$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$,

13. $c_1 = 1,\ c_2 = i,\ c_3 = -i,\ k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 2,$

14.• $c_1 = 1,\ c_2 = 1+i,\ c_3 = 1-i,\ k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 2,$

15. $c_1 = -1,\ c_2 = i,\ c_3 = -i,\ c_4 = 1+i,\ c_5 = 1-i,\ k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1,$

16.• $c_1 = i,\ c_2 = -i,\ k_1 = 2,\ k_2 = 1,$

17. $c_1 = i,\ c_2 = -i,\ k_1 = 2,\ k_2 = 3,$

18.▹ $c_1 = i,\ c_2 = 2+i,\ c_3 = 2-i,\ k_1 = k_2 = k_3 = 1.$

19.* Mutassuk meg, hogy a

$$P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

ú. n. **Legendre-polinom** zérushelyei különbözőek, valósak és a $(-1,1)$ intervallumba esnek. [Útmutatás: Vizsgáljuk meg az $(x^2-1)^n$ függvénynek és deriváltjainak zérushelyeit.]

A Horner-módszert felhasználva számítsuk ki az alábbi f polinomok helyettesítési értékét a megadott c helyen. (A kalkulátort használó feladatoknál tegyük c értékét a memóriába, és minden szorzáskor onnan hívjuk elő.)

20.• $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^3 + x - 1,\ c = -2,$

21.▹ $f(z) = 3z^6 - 4z^5 + (13+8i)z^4 + (1-2i)z^3 + 4z,\ c = 2i,$

22. $f(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1,\ c = -4.$

23.k $f(x) = \sqrt{5}x^4 - 3x^3 + \sqrt{17}x^2 + 0,3939x + 2,\ c = 1,39,$

24.k $f(a) = 17,39a^4 - 1,56a^3 + 0,11a^2 + a - 1,\ c = \cos 1.$

Horner-módszerrel végezzük el a megadott f polinom g-vel való maradékos osztását!

25.• $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = x - 1,$

26. $f(x) = x^9 - x^7 + x^5 - x^3 + x,\ g(x) = x + 1,$

27.k $f(x) = 3,11x^5 - 8,29x^3 + 5,44x^2 - 9,99;\ g(x) = x - 1,35$

28.k $f(x) = x^3\cos 1,1 - x^2 \sin 5,4 + \cos 2,1;\ g(x) = x - \operatorname{tg} 0,5$

29. $f(x) = x^5 + 2x^2 - x + 2,\ g(x) = x - i,$

30. $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 + (6+i)x^2 + 4 + 4i,\ g(x) = x + 2 + i.$

A Horner-módszer segítségével alakítsuk át $f(x)$-et $(x - x_0)$ polinomjává!

31.▹ $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1,\ x_0 = -1,$

32. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2,\ x_0 = -1,$

33. $f(x) = x^5,\ x_0 = 1.$

34. Milyen a és p értékekre osztható maradék nélkül az $f(x) = x^4 + pa^2x^2 - 5a^3x + a^4$ polinom az $x - a$ polinommal?

A Rolle-féle gyöktétel alkalmazásával számítsuk ki az alábbi racionális együtthatós egyenletek racionális gyökeit, és e gyökök felhasználásával írjuk fel az egyenletek bal oldalán álló polinomot alacsonyabb fokú, racionális együtthatós polinomok szorzataként.

35.• $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = 0,$ 36. $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0,$

37. $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$, **38.** $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$.

Ábrázoljuk az alábbi polinomfüggvényeket a **T 9.26** segítségével:

39.▷ $f(x) = \frac{1}{12}x^2(x+1)(x-3)^2$, **40.** $f(x) = \frac{1}{9}x(x+2)^2(x-1)^3$,

41. $f(x) = \frac{1}{25}x(x+3)^2(x-2)^2$, **42.** $f(x) = \frac{1}{16}x^2(x-2)^2(x+1)^2(x+2)$.

Ábrázoljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket a számláló és a nevező zérushelyeinek meghatározása, a ∞-ben, a $-\infty$-ben és a hézagpontokban vett határértékek kiszámítása segítségével:

43. $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, **44.** $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)}$,

45. $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)/2}{x^2(x+1)}$, **46.** $r(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)^2}{x^2(x+1)}$,

Páros és páratlan függvények, periodikus függvények

D 10.9 Az egyváltozós (valós vagy komplex) f függvényt **páros [páratlan]** függvénynek nevezzük, ha az értelmezési tartományába eső minden x-szel együtt $-x$ is az f értelmezési tartományába tartozik, és $f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$.

T 10.10 Ha az egyváltozós valós f függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a 0 pontra nézve, akkor előállítható egy páros f_1 és egy páratlan f_2 függvény összegeként, éspedig $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ és $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

D 10.11 Az egyváltozós nem konstans (valós vagy komplex) f függvényt c szerint **periodikusnak** és a $c \neq 0$ számot az f függvény **periódusának** nevezzük, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + c \in \operatorname{Dom} f$, és $f(x+c) = f(x)$.

T 10.12 Ha c az egyváltozós f függvény periódusa, k pedig nullától különböző egész szám, akkor kc is periódusa f-nek. Ha f valós változós, akkor priódusai között van egy legkisebb pozitív periódus, melynek egészszámú többszörösei adják f összes periódusát.

Feladatok

Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek párosak és melyek páratlanok (l. **D 10.9**). Azokat, amelyek nem tartoznak egyik osztályba sem, bontsuk fel (**D 10.10** segítségével) egy páros és egy páratlan függvény összegére!

47. x^{2n}, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, **48.** x^{2n+1}, $n \in \mathbf{Z}$, **49.** $\sin x$,

50. $\cos x$, **51.** $\operatorname{tg} x$, **52.** $x \sin x$,

53. $x \cos x$, **54.** $x^2 - x^4$, **55.** $x + x^3$,

56. $x^2 - x$, **57.** $(x+1)\sin x$, **58.**• $|x-1|$.

Legyenek az f, f_1, f_2 függvények páros függvények, a g, g_1, g_2 függvények páratlanok egy H halmazon. Az alábbi függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok?

59.▷ $f_1 + f_2$, 60. $g_1 + g_2$, 61. $f + g$,
62. $f_1 f_2$, 63. $g_1 g_2$, 64. fg,
65. $\frac{f_1}{f_2}$, 66. $\frac{1}{g}$, 67. $\frac{f}{g}$,
68. $f \circ g$, 69.▷ f', 70. g'.

Határozzuk meg az alábbi függvények közül a periodikusak legkisebb pozitív p periódusát!

71. $\sin 3x$, 72.• $\cos ax$, $a > 0$, 73. $\sin ax + \cos ax$, $a > 0$,
74. $\sin^2 x$, 75. $\sin\sqrt{x}$, 76. $3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

77. Mutassuk meg, hogy p szerint periodikus függvények összege, különbsége, szorzata, hányadosa vagy szintén periodikus p szerint, vagy konstans.

Trigonometrikus függvények

Feladatok

A sin, cos, tg, ctg függvények grafikonjából kiindulva függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

78.▷ $3\sin 2x + 1$, 79.▷ $3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 2$, 80. $\cos kx$, $k \neq 0$,
81. $\sin\frac{x}{k}$, $k \neq 0$, 82. $-2\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{2})$, 83.▷ $a\sin(bx+c)$, $a, b, c \neq 0$.

Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját!

84. $\frac{1}{\sin x}$, 85. $\sin\frac{1}{x}$, 86. $x\sin\frac{1}{x}$,
87. $x^2\sin\frac{1}{x}$, 88. $|\sin x|$, 89. $\operatorname{sgn}\sin x$,
90. $\operatorname{Ent}(2\sin x)$.

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi függvényeket, majd ábrázoljuk őket.

91. $\cos x \sin x(1 - 2\sin^2 x)$, 92.▷ $\sin x + \cos x$,
93.▷ $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x$, 94.• $a\sin x + b\cos x$,
95. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 96. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, akkor

97. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,
98.▷ $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Differenciáljuk az alábbi trigonometrikus függvényeket:

99. $\operatorname{tg}^2\frac{1}{3x}$, 100. $\sin\sqrt{x}$, 101. $\left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3$,
102. $\sin(\cos x^2)$, 103. $\sqrt{\sin x^2}$, 104. $\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}$.

Arkuszfüggvények

D 10.13 Az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények megadott intervallumra való leszűkítéseinek inverzei, nevezetesen:

$$\arcsin x = y \;:\Leftrightarrow\; \sin y = x,\; \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \operatorname{arctg} x = y \;:\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} y = x,\; \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\arccos x = y \;:\Leftrightarrow\; \cos y = x,\; [0,\pi], \quad \operatorname{arcctg} x = y \;:\Leftrightarrow\; \operatorname{ctg} y = x,\; (0,\pi).$$

T 10.14 Az arcsin és az arccos függvények a $(-1,1)$ intervallumon, az arctg és az arcctg függvények az egész számegyenesen differenciálhatók. Deriváltjuk:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\; (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\; (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\; (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

T 10.15 Az arkuszfüggvényekre, értelmezési tartományuk minden x pontjában, fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

105.[k] $\arccos(-0,25)$, **106.**[k] $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 200$, **107.**[k] $\operatorname{arcctg} 10$.

Kalkulátor használata nélkül számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

108. $\operatorname{arctg} 1$, **109.** $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$, **110.** $\arcsin(1/2)$,
111. $\arccos(-\sqrt{2}/2)$, **112.** $\arccos\cos 7$, **113.** $\operatorname{arctg}\operatorname{tg} 1,6$,
114. $\arcsin\sin 10$, **115.** $\arcsin\sin 13$, **116.** $\arcsin\sin(-13)$.

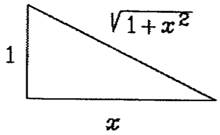
Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját és a derivált értelmezési tartományát!

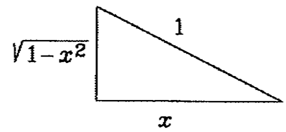
117. $\arccos(1-2x)$, **118.** $\operatorname{arctg}(1-x^2)$, **119.** $\operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x$,
120. $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, **121.** $\arcsin\cos x$, **122.** $\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

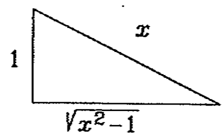
123.[F] Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények közül bármely kettő különbsége konstans. Határozzuk meg e konstansokat!
$\arcsin(2x-1)$, $2\arcsin\sqrt{x}$, $-2\arcsin\sqrt{1-x}$, $2\arccos\sqrt{1-x}$,
$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $4\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, $-4\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.

124.[F] A BASIC programozási nyelvben az ATN(x) függvény kiszámítja az $\operatorname{arctg} x$ értéket. Igazoljuk a programozási kézikönyvekben az arcsin és az arccos függvényekre javasolt alábbi formulák helyességét:
$\arcsin x = \mathrm{ATN}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $\arccos x = -\mathrm{ATN}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 1,5707963$.

A mellékelt ábrák valamelyikét felhasználva igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét az $x > 0$ esetben, majd az összefüggést trigonometriai átalakításokkal







bizonyítsuk minden lehetséges x-re!

125.• $\cos \arcsin x = \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$,

126.▷ $\operatorname{tg} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{ctg} \operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{x}$,

127.▷ $\operatorname{tg} \arccos x = \operatorname{ctg} \arcsin x = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

128.▷ $\operatorname{tg} \arcsin x = \operatorname{ctg} \arccos x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

129. $\sin \operatorname{arctg} x = \cos \operatorname{arcctg} x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

130. $\sin \operatorname{arcctg} x = \cos \operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét! Mind a négy feladatban $k \in \mathbf{Z}$.

131.• $\arcsin \sin x = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{ha } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ -x + (2k+1)\pi, & \text{ha } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

132. $\arccos \cos x = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{ha } 2k\pi \le x \le (2k+1)\pi, \\ -x + 2k\pi, & \text{ha } (2k-1)\pi \le x \le 2k\pi, \end{cases}$

133. $\operatorname{arctg} \operatorname{tg} x = x + k\pi$, ha $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

134. $\operatorname{arcctg} \operatorname{ctg} x = x + k\pi$, ha $k\pi < x < (k+1)\pi$.

135. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, és rajzoljuk fel a grafikonjukat!
sin arcsin, cos arccos, tg arctg, ctg arcctg,
arcsin sin, arccos cos, arctg tg, arcctg ctg.

Kalkulátor használata nélkül — alkalmas trigonometriai azonosságok alkalmazásával — számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

136.▷ $\cos\left(2\arcsin(-\frac{2}{3})\right)$,

137. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$,

138. $\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$,

139.▷ $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

140. $\arcsin x = \arccos x$,

141. $\arccos x = \operatorname{arctg} x$,

142.▷ $2\arcsin x = \arccos 2x$,

143. $\operatorname{arctg}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-2) = \pi/4$,

144. $\arcsin\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin 2x$.

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

145.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin ax}{x}$, 146. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$, 147.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin ax}{\arcsin bx}$,

148. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$, 149. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$, 150. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$.

151.* Bizonyítsuk be, hogy $\frac{-\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Az előző feladat eredményét, valamint az $\operatorname{arctg} x < x$ (ha $x > 0$) egyenlőtlenséget felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket! (A 155. feladatban szereplő formula segítségével számította ki π értékét 100 tizedesjegy pontossággal 1706-ban John Machin.)

152.* $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, 153. $2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$,

154. $3\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}$, 155. $4\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

156.* Igazoljuk az alábbi egyenlőséget:

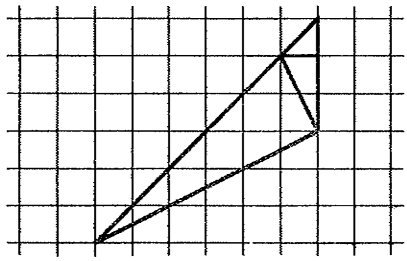
$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!

157.* $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $x \ge 0$,

158.* $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2+x+1} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x+1}$, $x > 0$.

159. Adjunk 'geometriai bizonyítást' az $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$ egyenlőségre az alábbi ábra segítségével:



Logaritmusfüggvények

T 10.16 Az $\log_a x$ függvény a $(0,\infty)$ intervallumon, az $\log_a |x|$ (speciálisan az $\ln |x|$) függvény pedig a 0 kivételével minden valós helyen differenciálható, és

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, \quad (x > 0),$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, \quad (x \ne 0), \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (x \ne 0).$$

D 10.17 Ha az f függvény az értelmezési tartományán pozitív és differenciálható, akkor az $\ln f$ függvény is differenciálható, és $(\ln f)' = f'/f$. Az $\ln f$ függvény deriváltját az f függvény **logaritmikus deriváltjának** nevezzük. **Logaritmikus deriváláson** pedig az f' függvénynek az

$$f' = f(\ln f)'$$

képlettel való kiszámítását értjük.

Feladatok

Kalkulátor használata nélkül számítsuk ki az alábbi értékeket:

160. a) $10^{\lg 3{,}5}$, b) $\lg 10^5$, c) $e^{\ln 3}$, d) $\ln e^2$,
e) $e^{-2\ln 3}$, f) $2^{\log_4 9}$, g) $8^{\log_4 9}$,

161. a) $\lg \sqrt[3]{100}$, b) $\log_9 27$, c) $\log_{27} 9$, d) $\log_{32} 512$, e) $\log_{1/6} 36$,
f) $\log_6 \dfrac{1}{36}$, g) $\log_{1/4} \dfrac{1}{1024}$, h) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, i) $\ln \sqrt[7]{e}$.

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

162. $f(x) = \log_x a,\ a \neq 1$, **163.** $f(x) = \log_x x$, **164.** $f(x) = \ln x^2$,
165.* $f(x) = \ln \sin x$, **166.** $f(x) = \ln \cos x$, **167.** $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$,
168.* $f(x) = \ln \arcsin x$, **169.** $f(x) = \ln \arccos x$, **170.** $f(x) = \arcsin \ln x$.

Bizonyítsuk be a különböző alapú logaritmusokra vonatkozó alábbi azonosságokat! (A feladatokban szereplő konstansokra fennáll, hogy $a, b, c, a_i > 0$, de $a, b, c, a_i \neq 1$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$ és $n \in \mathbf{N}^+$.)

171.* $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, **172.*** $\log_a b \cdot \log_b a = 1$,

173. $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} a_1 = 1$, **174.** $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$,

175. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, **176.** $\log_a b = -\log_{1/a} b = -\log_a \dfrac{1}{b}$,

177. $\log_{ab} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c}{1+\log_a b}$, **178.** $\log_{\frac{a}{b}} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_a c} - \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c}{1-\log_a b}$,

179. $\log_{a_1 \ldots a_n} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} c} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} c}}$.

Ahol jelezve van, ott kalkulátorral, ahol nincs, ott kalkulátor nélkül számítsuk ki az alábbi értékeket! Ahol szükséges, alakítsuk át a kifejezést az előző feladatokban megismert összefüggések segítségével.

180.[k] $\ln 2$, $\lg 2$, $\ln 10$, $\lg e$, $\ln \pi$,

181.[k] $\log_2 3$, $\log_3 2$, $\log_\pi e$, $\log_2 10$, $\log_{5{,}2} 3{,}8$.

182. $\dfrac{\lg 4}{1 - \lg 5}$, $\dfrac{\lg 5}{1 + \lg 0{,}5}$, $\dfrac{1}{1/\log_2 30 + 1/\log_3 30 + 1/\log_5 30}$,

183. $\log_{27} 125 \cdot \log_{625} 9$, $\log_{81} 256 \cdot \log_4 9$, $\log_4 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 4$,

184.* Számítsuk ki a $\lg 8$, $\lg 5$, $\lg 0,72$, $\lg \sqrt[7]{7,5}$ értékeket úgy, hogy csak a négy alapműveletet, a $\lg 2 \approx 0,30103$ és a $\lg 3 \approx 0,47712$ értékeket használjuk.

185.* Bizonyítsuk be, hogy ha az $\ln x$ függvény grafikonját az x-tengely irányában k-szorosára nyújtjuk, ugyanazt a görbét kapjuk, mint amikor a grafikont az y-tengely irányában eltoljuk egy alkalmasan választott c számmal. Határozzuk meg c értékét k függvényében!

Milyen transzformációkkal kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját az ln függvény grafikonjából?

186. $\log_2 x$, **187.** $\log_3 \frac{x^{3/2}}{9}$, **188.** $\ln \sqrt[3]{1-x}$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

189. $\log_{x+2}(3x^2+12x+14)=2$, **190.** $\ln x^2+\ln x^8=10$,

191. $\log_{32}(2x)-\log_8(4x)+\log_2 x=3$, **192.** $\log_x 8-\log_{4x} 64=\log_{2x} 4$.

Differenciáljuk az alábbi függvényeket!

193. $\ln(5x+1)$, **194.** $\lg \frac{x}{2}+\ln 3$, **195.** $\ln \frac{1}{x}$,

196. $\ln^2(1-2x)$, **197.** $\ln \sin x$, **198.** $\lg \cos x$,

199. $\log_3(x^2-1)$, **200.** $\frac{1}{\log_5 x}$, **201.** $x^n \ln x$.

202.* Számítsuk ki az $\ln x$ függvény n-edik deriváltját!

203. Mutassuk meg, hogy az $y=\ln\sin x$, $(0<x<\pi)$ függvény kielégíti az $y''+(y')^2=-1$ egyenletet!

204. Mutassuk meg, hogy az $y=c_1\sin\ln x+c_2\cos\ln x$, $(x>0)$ függvény tetszőleges $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ együtthatókkal kielégíti az $x^2y''+xy'+y=0$ egyenletet!

205. Mutassuk meg, hogy $0<a<b$ esetén

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}.$$

206. Bizonyítsuk be, hogy $x>1$ esetén $\ln x<2(\sqrt{x}-1)$.

207.[k] Jelölje $\pi(x)$ az x számnál kisebb prímek számát. A **prímszámtétel** szerint

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1.$$

Becsüljük meg e tétel segítségével a 10^7-nél kisebb prímek számát.

208. A zenei hangköz nagyságát a két hang frekvenciájának hányadosával mérjük. Az oktáv hangtávolság esetén a frekvenciák hányadosa 2. Johann Sebastian Bach kora óta a "jóltemperált" zongorán az oktáv 12 egyenlő nagyságú — kisszekund nevű — hangközre van osztva (wohltemperiertes Klavier). n kisszekundnyi hangköznek milyen frekvenciahányados felel meg? Az x és y $(x>y)$ frekvenciájú hangok közti hangköz hány kisszekundból áll?

Logaritmikus deriválással (**D 10.17**) számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

209.[D] $\frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}$, **210.** $(x+1)(x+2)(x+3)$, **211.** $(2x+1)(x^2+1)x^{4/5}$,

212. $\sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{x^2+2}}$, **213.** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}}$, **214.** $\dfrac{\sqrt{x+11}}{(x-7)\sqrt[3]{2x+1}}$,

215.$^\triangleright$ $(1+x)^{1-x}$, **216.** $(1-3x)^{\ln x}$, **217.** $\sqrt[x]{3x^2-6x+7}$.

Exponenciális függvények

T 10.18 Az a^x, $(a>0)$ függvény az egész számegyenesen differenciálható, deriváltja

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

speciálisan $(e^x)' = e^x$, és így minden nemnegatív egész r-re $(e^x)^{(r)} = e^x$. Szokás az e alapú exponenciális függvényt exp-pel jelölni, azaz $\exp: x \mapsto e^x$. E jelölést használva $\exp^{(r)} = \exp$.

Feladatok

Milyen transzformációkkal kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját az exp függvény grafikonjából?

218. 2^x, **219.**$^\triangleright$ 5^{x+1}, **220.** $(3^{x/2-1})^3$.

221. Ha $a<0$, akkor az a^x függvény mely valós x értékekre van értelmezve?

222. Melyek azok az x_0 valós számok, amelyek megoldásai az $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ alakú egyenletnek?

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

223. $(2x+1)^{x-3} = (2x+1)^{5-3x}$, **224.** $(x-3)^{9/x} = (x-3)^x$,

225. $(x+1)^{2x+1} = (x^2+2x+1)^{2x+1}$.

Számítsuk ki az alábbi $x \mapsto y$ függvények deriváltját!

226. $y = x^\pi$, **227.** $y = \pi^x$, **228.** $y = 2^x$,

229. $y = 2^{-x}$, **230.** $y = 2^{\operatorname{tg} x}$, **231.** $y = 5^{1/x} + 1/5^x$,

232. $y = \exp\sqrt{x} + \sqrt{\exp x}$, **233.**$^\triangleright$ $e^{xy} - y = 3$, **234.** $e^{y \ln x} + \ln y = 0$.

Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját az $a^b = e^{b \ln a}$ átalakítás segítségével!

235.$^\triangleright$ $(x \ln x)^x$, **236.** $x^{\sin x}$, **237.** $x^{\frac{1}{x}}$,

238. $2x^{\sqrt{3x}}$, **239.** $(1-x)^{x^2}$, **240.** $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

241.$^\triangleright$ Ha az f függvény konstans, akkor $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x)$; ha a g függvény konstans, akkor $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$. Mutassuk meg, hogy általában az $f(x)^{g(x)}$ függvény deriváltja az előző két eredmény összege:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x).$$

242.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy $(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$.

243.[▷] Az e^{-x^2} függvény n-edik deriváltfüggvénye kifejezhető $\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = e^{-x^2}H_n(x)$ alakban, ahol H_n az n-edfokú **Csebisev-Hermite** polinom. Mutassuk meg, hogy H_n eleget tesz az alábbi rekurzív összefüggésnek:

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad (n \geq 1).$$

244.[•] A **Stirling-formula** (ejtsd: sztő^{r}ling) szerint

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\Theta_n}{12n}\right),$$

ahol Θ_n egy, a $(0,1)$ intervallumba eső valós szám. Ennek felhasználásával milyen alsó és felső becslést adhatunk $n!$-ra?

245.[k] Az előző feladat eredményét felhasználva, becsüljük meg 12! és 60! értékét! Az előbbit számítsuk ki pontosan is!

246.[k] A Stirling-formulát felhasználva adjunk meg alsó és felső becslést az $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ szorzat értékére, majd számítsuk közelítőleg az $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99$ szorzat értékét.

Mutassuk meg, hogy a megadott függvények a velük megadott egyenletet kielégítik:

247. $f(x) = e^{mx}, \quad f(x+y) = f(x)f(y),$

248. $f(x) = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}, \quad f'(x) = 1 - f^2(x),$

249. $y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$, $c_1, c_2, a, b \in \mathbf{R}$ konstansok, $\quad y'' - (a+b)y' + aby = 0.$

250.[•] Mutassuk meg, hogy az

$$f'(x) = kf(x)$$

(k adott konstans) egyenletnek minden $f(x) = ce^{kx}$ alakú függvény megoldása (c tetszőleges konstans), továbbá mutassuk meg, hogy más megoldása az egyenletnek nincs is. (Útmutatás: legyen $f(x)$ egy tetszőleges megoldás, és vizsgáljuk az $f(x)e^{-kx}$ függvényt.)

251.[k] Mekkora összeg lesz egy év elteltével egy 10000 Ft értékű, 15% kamatozású betéten, ha kamatos kamattal számolunk†, és a kamatot

a) évente,
b) havonta,
c) naponta,
d) 'folyamatosan' számoljuk (ami azt jelenti, hogy évente n-szer számoljuk, és ennek vesszük a határértékét, ha $n \to \infty$)?

252.[k] Mekkora összeg lesz E év elteltével egy A Ft értékű, K% kamatozású betéten, ha kamatos kamattal számolunk† és a kamatot az előző feladatbeli a), b), c), d) pontoknak megfelelően számítjuk?

253. Egy évi s% kamatozású betéten levő összeg hány százalékkal kamatozik, ha nem csak kamatot, hanem folyamatos kamatozással kamatos kamatot számítunk?

† ami azt jelenti, hogy a kamatot hozzá kell adni a betét értékéhez, és legközelebb e megnövelt értékre számítunk kamatot

254.[•] Egy radioaktív anyag elbomlásakor a tömeg megváltozásának sebessége az anyag tulajdonságaitól függ, de minden pillanatban arányos az anyag tömegével; legyen az arányossági tényező k. Mutassuk meg, hogy az az idő, amely alatt az anyag fele elbomlik, nem függ a tömegétől, azaz csak az anyag jellemzője — ezt nevezik **felezési időnek** —, és ez az idő $-\ln 2/k$.

255.[k] 3 gramm 14-es szénizotópból mennyi marad meg 1000 év elteltével, ha felezési ideje 5730 év?

256. (**Kormeghatározás** 14-es szénizotóppal) Az élő szervezetekben a stabil 12-es és a radioaktív 14-es szénizotóp aránya mindaddig állandó, amíg a szervezet él. Pusztulása után azonban az 5730 év felezési idejű 14-es szénizotóp mennyisége csökken. Egy barlangban talált emberi haj csak 40%-át tartalmazza az élő emberi haj szénizotópmennyiségének. Hány éve halt meg a haj viselője?

257. Egy populáció egyedeinek számát az idő függvényében leíró függvény nem folytonos, hanem szakaszonként konstans, hisz csak egész értékeket vehet fel. Ha azonban az egyedek száma nagy, e függvény jól közelíthető egy folytonos, sőt differenciálható függvénnyel. Tegyük fel, hogy egy falu lakossága minden évben a lakosok számának 2%-ával növekszik. Mennyi idő alatt duplázódik meg a falu lélekszáma? Hány lakosa lesz a falunak 30 hónap múlva, ha ma ezren lakják?

Hiperbolikus függvények

D 10.19 A szinusz hiperbolikusz (sh), a koszinusz hiperbolikusz (ch), a tangens hiperbolikusz (th), és a kotangens hiperbolikusz (ch) függvények definíciói:

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x := \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

T 10.20 Az sh, ch, th, cth függvények egész értelmezési tartományukon differenciálhatók. Deriváltjuk:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

258.[k] $\operatorname{sh} 1$, $\operatorname{sh}(-1)$, $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1$, $\operatorname{th} 1$, $\operatorname{cth} 1$,

259. $\operatorname{sh} \ln 2$, $\operatorname{ch} \ln 2$, $\operatorname{cth}(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3})$, $\operatorname{sh} 5 + \operatorname{ch} 5$.

Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

260. **Paritási összefüggések**: $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$,

261. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$,

262. Összegzési képletek: $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$,
$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$,

263. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{th} 2x = \dfrac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$,

264.[▷] **Négyzetes összefüggések:**
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{th}^2 x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$, $\operatorname{cth}^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1$.

265.[▷] **Linearizáló formulák:** $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$, $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$,

266. Bontsuk fel az e^x és az e^{-x} függvényeket egy páros és egy páratlan függvény összegére.

267. Mutassuk meg, hogy minden valós v számra $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^v = \operatorname{sh} vx + \operatorname{ch} vx$.

268.[▷] Fejezzük ki az sh és a ch függvényeket a th segítségével!

269. Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ segítségével!

Differenciáljuk az alábbi függvényeket x szerint!

270. $\operatorname{ch}(3x^2 - x + 1)$, **271.** $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$, **272.** $\operatorname{sh}(e^{3x})$,
273. $e^x \operatorname{ch} x$, **274.** $\operatorname{sh}(\cos x)$, **275.** $\operatorname{sh} 3x \operatorname{ch} 5x$.

276. Mutassuk meg, hogy az $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C$, ($a \neq 0$, $C \in \mathbf{R}$) függvény kielégíti az $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$ egyenletet! (Ez a differenciálegyenlet, és így a megoldását adó $y(x)$ függvény írja le egy két végén felfüggesztett, csak saját súlyával terhelt lánc alakját. Ezért szokták a ch függvény grafikonját **láncgörbének** nevezni.)

277. Ha egy m tömegű test a sebességének négyzetével arányos légellenállás mellett szabadon esik, akkor sebessége eleget tesz az $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ differenciálegyenletnek, ahol k a test aerodinamikai tulajdonságaitól függő állandó. Mutassuk meg, hogy a

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th}\Big(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t\Big)$$

függvény kielégíti a fenti egyenletet. Határozzuk meg a határsebességet, azaz a $\lim_{t\to\infty} v(t)$ határértéket.

Area függvények

D 10.21 Az areafüggvények a hiperbolikus függvények inverzei:
$\operatorname{arsh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto y$, ahol $\operatorname{sh} y = x$,
$\operatorname{arch} : [1, \infty) \to [0, \infty);\ x \mapsto y$, ahol $\operatorname{ch} y = x$,
$\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbf{R};\ x \mapsto y$, ahol $\operatorname{th} y = x$,
$\operatorname{arcth} : \mathbf{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbf{R} \setminus \{0\};\ x \mapsto y$, ahol $\operatorname{cth} y = x$.

T 10.22 Az areafüggvények kifejezhetőek a logaritmusfüggvénnyel:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ (x \in \mathbf{R}), \qquad \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ (|x| < 1),$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ (x \geq 1), \qquad \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ (|x| > 1).$$

T 10.23 Az arch függvény az $(1,\infty)$ intervallumon, a többi areafüggvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, és

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Feladatok

Igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét!

278.[P] $\operatorname{arsh}\operatorname{sh} x = \operatorname{arth}\operatorname{th} x = x, \quad \operatorname{arch}\operatorname{ch} x = |x|,$

279.[P] $\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x = \sqrt{1+x^2}, \quad \operatorname{sh}\operatorname{arch} x = \sqrt{x^2-1}$, ha $x \geq 1$,
$\operatorname{th}\operatorname{arcth} x = \frac{1}{x}$, ha $|x| \geq 1$, $\operatorname{cth}\operatorname{arth} x = \frac{1}{x}$, ha $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$,

280.[P] $\operatorname{th}\operatorname{arsh} x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{th}\operatorname{arch} x = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x},$
$\operatorname{sh}\operatorname{arth} x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{ch}\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (a, b adott konstansok)!

281.[P] $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arch} x$,
282.[P] $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arth} x$,
283.[P] $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arsh} a + \operatorname{arsh} b$,
284. $\operatorname{arch} x = \operatorname{arch} a + \operatorname{arch} b$,
285. $\operatorname{arth} x = \operatorname{arth} a + \operatorname{arth} b$,
286. $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arth} a + \operatorname{arch} b$.

Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

287. $\operatorname{arsh} x^3$,
288. $\operatorname{arth} \frac{1}{x}$,
289. $\operatorname{arsh}(\sin 3x)$,
290. $\operatorname{arth}^2(3x)$,
291. $\exp \operatorname{arch} x$,
292. $\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} x}{2}$.

Gudermann függvénynek nevezzük az $u \mapsto \varphi = 2\operatorname{arctg} e^u - \dfrac{\pi}{2}$ függvényt. Bizonyítsuk be e függvényről az alábbiakat:

293. $\operatorname{Ran}\varphi = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
294. páratlan,
295. invertálható,
296.[*] $\varphi = \operatorname{arctg}\operatorname{sh} u = \arcsin \operatorname{th} u$,
297. $\operatorname{sh} u = \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{ch} u = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{th} u = \sin\varphi$,
298. $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \ln\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

299.[K] Azonos magasságban és egymástól 2 m távolságra lévő két pont között kifeszítünk egy kötelet, mely a végpontoknál 10°-os szöget zár be a vízszintessel. Tudva, hogy a kötél alakja az $a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ függvény valamely eltoltjával írható le, számítsuk ki a kötél belógását.

11. fejezet

Egyváltozós valós függvények menetének vizsgálata

Szélsőérték meghatározása az első deriválttal

D 11.1 Legyen f egy metrikus tér valamely részhalmazán értelmezett valós értékű függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az értelmezési tartományához tartozó P_0 pontban **maximuma (minimuma, szigorú maximuma**, ill. **szigorú minimuma)** van, ha $f(P) \leq f(P_0)$, $(f(P) \geq f(P_0)$, $f(P) < f(P_0)$, ill. $f(P) > f(P_0))$. Ha az $f(P) \leq f(P_0)$ egyenlőtlenség f értelmezési tartományának minden P pontjára teljesül, akkor a P_0 pontot az f függvény **abszolút minimumhelyének** nevezzük. Hasonlóan definiálható az abszolút maximumhely, ill. a szigorú abszolút minimum- és maximumhely fogalma.

T 11.2 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor az x_0 pontbeli szélsőérték létezéséhez szükséges, hogy $f'(x_0) = 0$ legyen.

T 11.3 Ha az f függvény differenciálható az (a, x_0) intervallumon, és itt $f' \geq 0$, valamint differenciálható az (x_0, b) intervallumon is, ahol $f' \leq 0$, továbbá f folytonos az x_0 pontban, akkor az f függvénynek x_0-ban maximuma van. (Másképpen fogalmazva: ha f monoton növekvőből monoton csökkenőbe vált egy x_0 pontban, akkor ott maximuma van.)

P 11.4 Azokat az intervallumokat, melyekben a derivált állandó előjelű, a derivált zérushelyei és szakadási helyei határolják. Például az $f : x \mapsto x + 1/x$ függvény deriváltja az $f' : x \mapsto 1 - 1/x^2$ függvény. Ennek zérushelyei: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, szakadási helye: $x_3 = 0$. Így az alábbi intervallumokon kell a derivált előjelét vizsgálni: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Praktikus lehet a derivált előjelére, valamint az f függvény viselkedésére vonatkozó ismereteket táblázatban összefoglalni, pl. a következőképpen:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	szak.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	pólus	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

A megoldásokban az alábbi rövidítéseket használjuk:

MIN	minimum	MAX	maximum
INFL	inflexiós pont	nincs sz.	nincs szélsőérték
n.ért.	nincs értelmezve	pólus	f-nek pólusa van
$+$	$f' > 0$ (ill. $f'' > 0$)	$-$	$f' < 0$ (ill. $f'' < 0$)
$\nearrow$	f monoton nő	$\searrow$	f monoton csökken
$\smile$	f konvex	$\frown$	f konkáv

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi $x \mapsto f(x)$ függvények szélsőértékhelyeit a derivált zérushelyeinek és szakadási helyeinek, valamint az ezek által meghatározott intervallumokon felvett előjelének meghatározásával.

1. $x^2\sqrt[3]{x+2}$,
2. $|x-3|+|2x+1|$,
3. $|x-1||x+2|$,
4. $\max\{2|x|, |1+x|\}$,
5. $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x,\ 0 < x < \pi$,
6. $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$,
7. x^x,
8. x^{-x^2}.

Taylor-formula

D 11.5 Az x_0 helyen legalább r-szer differenciálható egyváltozós valós f függvény x_0 helyhez tartozó r-edik **Taylor-polinomján** az alábbi (legfeljebb r-edfokú) polinomfüggvényt értjük:

$$T_r(x) := \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

T 11.6 Taylor-formula: Ha az f függvény az x_0 és az x pontokat tartalmazó valamely intervallumon $(r+1)$-szer differenciálható, akkor az x_0 és x pontok között található olyan ξ, hogy

$$f(x) := \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_r(x),$$

ahol

$$R_r(x) = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1}.$$

E képletbeli $R_r(x)$ tagot a Taylor-formula **maradéktagjának** nevezzük. Mivel ξ az x_0 és az x közé esik, ezért kifejezhető $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ alakban, ahol $0 < \theta < 1$. A Taylor-formulát **Maclaurin-formulának** is nevezzük, ha $x_0 = 0$. Ekkor a formula alakja:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(r+1)}(\theta x)}{(r+1)!}x^{r+1}, \text{ ahol } 0 < \theta < 1.$$

Feladatok

Írjuk fel az alábbi függvények x_0 ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomját és a Taylor-formula maradéktagját.

9.ᴾ $\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$,

10. e^x, $x_0 = 0$,

11. e^x, $x_0 = 1$,

12. $\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

13. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x_0 = 0$,

14. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x_0 = 1$.

15.ᴾ Fejezzük ki a $P(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 1$ függvényt az $x - 1$ polinomjaként.

16. Fejezzük ki a $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ függvényt az $x + 1$ polinomjaként.

Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ ponthoz tartozó n-edik Maclaurin-polinomját és a formula maradéktagját.

17. e^x,

18. $\sin x$,

19. $\cos x$,

20.* $(1 + x)^m$.

21.ᴾ Az e^x függvény Maclaurin-polinomjai közül hányadfokúak azok, melyek az e^x függvényt a $[-1; 1]$ intervallumon 2 tizedesjegy pontossággal (azaz legfeljebb $0,005$-es hibával) közelítik?

Írjuk fel az f függvény a ponthoz tartozó 6-odfokú Taylor-polinomját. Mely x helyeken közelíti ez a polinom $0,0001$-nél kisebb hibával az f függvényt.

22.ᴾ $f(x) = \cos x$, $a = 0$,

23. $f(x) = \sin x$, $a = 1$.

24. Legyen $g(x) = p(x) + x^{n+1} f(x)$, ahol p egy n-edfokú polinom, f az egész számegyenesen n-szer differenciálható. Mutassuk meg, hogy a g függvény n-edik Maclaurin-polinomja p.

25. Az előző feladat eredményét is felhasználva határozzuk meg az $f_1(x) = x + x^3$, az $f_2(x) = x + x^3 + x^4$, az $f_3(x) = x + x^3 + x^4 \sin x$, az $f_4(x) = x + x^3 + x^5 \operatorname{arctg} x$ és az $f_5(x) = x + x^3 \cos^2 x$ függvények harmadfokú Maclaurin-polinomját!

Annyiadik Maclaurin formulát írva a számlálóba, amennyi a nevező fokszáma, számítsuk ki az alábbi határértékeket!

26.ᴾ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$,

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^6}$,

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$,

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}{x^4}$.

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

30.* $\operatorname{sh} x > x + \frac{x^3}{6}$, ha $x > 0$,

31. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, ha $x \in \mathbf{R}$.

Számítsuk ki az alábbi értékeket az a ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinom segítségével. Becsüljük meg a közelítés hibáját.

32.ᴷ $\cos 62°$, $a = \frac{\pi}{3}$, $n = 2$,

33.ᴷ $\sin 43°$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.

34.* Számítsuk ki $\sqrt[3]{29}$ értékét a négy alapművelet segítségével, 10^{-3} pontossággal.

Szélsőértékek meghatározása

T 11.7 Legyen $n \geq 1$ és f az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább n-szer folytonosan differenciálható egyváltozós valós függvény; továbbá legyen $f^{(k)}(x_0) = 0$, ha $0 < k < n$, de $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ha n páros, akkor a függvénynek az x_0 helyen szélsőértéke van, mégpedig szigorú minimuma van, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$, és szigorú maximuma, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ha n páratlan, akkor a függvénynek az x_0 helyen nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

Feladatok

Magasabbrendű deriváltak segítségével (az előző tételt használva) vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e szélsőértékük az $x_0 = 0$ pontban, és ha igen, milyen!

35.▷ $\cos x - 2x^2$,

36. $e^{2x} + 2e^{-x}$,

37. $(e^{-1} + x)\ln(e^{-1} + x)$,

38.▷ $\operatorname{tg} x - x$,

39. $\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$,

40.• $\operatorname{ch} x + \cos x$,

41. $1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$,

42.• $\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}$.

Határozzuk meg az alábbi $f(x)$ függvények szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékhelyeit a megadott intervallumon. (Vizsgáljuk meg a függvényt az intervallum végpontjaiban, valamint a deriváltfüggvény zérushelyein és szakadási helyein.)

43.▷ $x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $[-6, 6]$,

44.▷ $x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $(-6, 6)$,

45. $\sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 8]$,

46. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3}$, $[-1, \sqrt{2}]$,

47. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3}$, $(-1, \sqrt{8})$,

48. xe^{-x}, $[1/2, \infty)$,

49. $x^2 \ln x$, $[1, e]$,

50. $e^{-|x|}$, $[-1, 2]$,

51. $\begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-2, -1) \\ 5 + 2x - x^2, & x \in [-1, 3) \\ x - 1, & x \in [3, 8), \end{cases}$

52. $\begin{cases} e^{1/x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

53.* $x^m(1 - x)^n$, $m, n \in \mathbf{N}^+$, $x \in \mathbf{R}$.

54.• Bizonyítsuk be, hogy ha f monoton, akkor a g és az $f \circ g$ függvényeknek ugyanott vannak szélsőértékei, mégpedig

a) ha f monoton nő, akkor g-nek és $f \circ g$-nek ugyanott vannak maximumai, és ugyanazokon a helyeken vannak minimumai,

b) ha f monoton csökken, akkor g-nek ott van maximuma, ahol $f \circ g$-nek minimuma, és fordítva.

Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit az előző feladat eredményének felhasználásával!

55.[▷] $f(x) = \dfrac{42}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 56}$, **56.**[•] $f(x) = \operatorname{arctg}(4 - \sqrt{e - e^{x^2}})$,

57. $f(x) = \cos \operatorname{arcctg}(1 - x^2)$, **58.** $f(x) = \operatorname{th}\big(1 - \ln(1 + x + x^2)\big)$.

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket:

59.[▷] $|3x - x^3| \leq 2$, ha $|x| \leq 2$, **60.**[*] $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$,

61.[▷] $x^m(1-x)^n \leq \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, ha $x \in [0;1]$, $m, n > 0$,

62.[▷] $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2, \quad x \in \mathbf{R}$.

Határozzuk meg az alábbi sorozatok legnagyobb elemét:

63.[▷] $a_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 100}$, **64.**[k] $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$, **65.**[k] $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{100}}$.

66.[*] Milyen feltételek mellett van az $x^3 + px + q$ egyenletnek (a) egy, (b) három valós gyöke? Ábrázoljuk a megfelelő tartományokat a (p, q) koordinátasíkon.

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokhoz tartozó infimumát és szuprémumát!

67.[▷] $f(x) = \dfrac{1+x}{3+x^2}$, $(0, \infty)$, **68.**[▷] $f(x) = \dfrac{1+x^2}{3+x^2}$, $(0, \infty)$.

Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvények halmazán távolságfüggvény az alábbi ρ:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Határozzuk meg az alábbi függvények távolságát a megadott intervallumon!

69.[▷] $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $[0, 1]$, **70.** $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $[0, \pi]$.

71. Állapítsuk meg a c valós szám értékét úgy, hogy a $[0, 2]$ intervallumon az x^2 és a $2x + c$ függvények távolsága minimális legyen.

Oldjuk meg az alábbi szöveges szélsőértékfeladatokat!

72.[▷] Bontsuk fel a pozitív b számot két szám összegére úgy, hogy a szorzatuk maximális legyen.

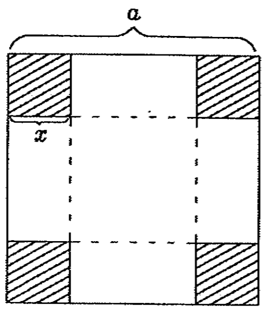
73. Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

74. Adott térfogatú egyenes hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?

75. Határozzuk meg az $A(2, 0)$ pont és az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonal pontjai közötti legkisebb és legnagyobb távolságot.

76. Az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ egyenletű ellipszishez érintőt húzunk. Az érintő és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe milyen x és y értékekre lesz minimális, és mennyi a háromszög területe?

77. Az f fókusztávolságú lencsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága kielégíti az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ összefüggést. Ha f adott, akkor mennyi a képtávolság és a tárgytávolság összegének infimuma és szuprémuma?



78. Egy a oldalú négyzetlapból az ábrán látható módon ki kell vágni a sarkán 4 kis négyzetet úgy, hogy a belőle hajtogatott doboz térfogata maximális legyen. Mekkora legyen a kivágott négyzet oldala?

79.[k] Tegyük fel, hogy az y és az x változók közötti függvénykapcsolat $y = kx$ alakú, ahol k állandó. Négy mérést végzünk az x és az y értékére: $(x_1, y_1) = (1,4)$, $(x_2, y_2) = (2,7)$, $(x_3, y_3) = (3,13)$, $(x_4, y_4) = (4,15)$. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy az eltérések négyzetösszege, azaz a

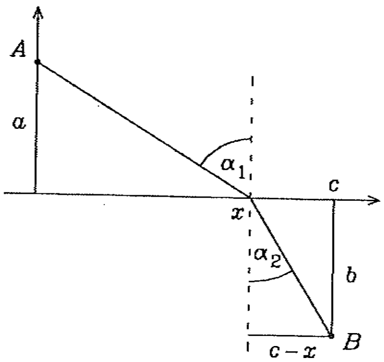
$$H(k) = \sum_{i=1}^{4}(y_i - kx_i)^2$$

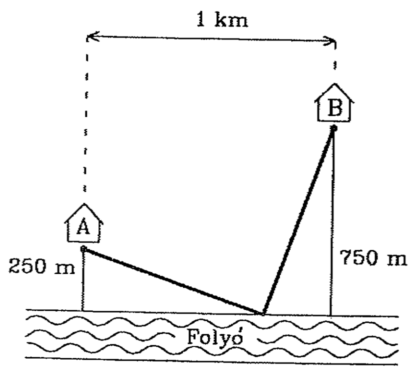
függvény értéke minimális legyen.

80. (**Snell** törvénye) A Fermat-elv szerint a fény két pont között azon az úton halad, melyet a legrövidebb idő alatt tesz meg. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2},$$

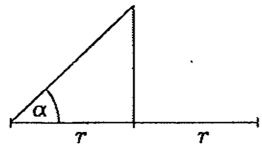
ahol v_1 illetve v_2 a fény sebessége két különböző közegben, és α_1 illetve α_2 a közegek határára merőleges egyenes és a fénysugár által bezárt szög az egyik illetve a másik közegben. (Az alábbi ábrán a közegek határa az x-tengely, a fény az $A(0,a)$ és $B(c,-b)$ pont között halad.)





81. A jobb oldali ábrán látható A jelű házból a gazda elindul a folyó felé, megmeríti vödrét, majd a) ugyanakkora sebességgel, b) harmadakkora sebességgel folytatja útját a B jelű házig. Milyen útvonalon halad, ha a legrövidebb idő alatt ér A-ból B-be.

82.* Egy r sugarú, kör alakú asztal közepe fölött milyen magasra kell elhelyezni a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a hajlásszög szinuszával, és fordítva arányos a távolság négyzetével.)



83.* Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 2 m sugarú kör alaprajzú, henger formájú toronyba be lehet vinni az oldalán lévő 2 m magas ajtón keresztül?

Konvexség, konkávság, inflexiós pont

D 11.8 Legyen f egyváltozós valós függvény. Ha az $y = f(x)$ egyenletű görbének az x_0 abszcisszájú pontban van érintője, és a görbe az x_0 valamely környezetében az érintő **felett (alatt)** halad, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 helyen **konvex (konkáv)**. Azt mondjuk, hogy az f függvény az (a, b) intervallumon **konvex (konkáv)**, ha annak minden pontjában az.

T 11.9 Legyen $n \geq 2$ és f az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább n-szer folytonosan differenciálható egyváltozós valós függvény; továbbá legyen $f^{(k)}(x_0) = 0$, ha $1 < k < n$, de $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. A függvény az x_0 helyen konvex, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$ és n páros, konkáv ha $f^{(n)}(x_0) < 0$ és n páros. Ha n páratlan, akkor a függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

T 11.10 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább kétszer folytonosan differenciálható, és $f''(x_0) > 0$, akkor konvex, ha $f''(x_0) < 0$, akkor konkáv az f függvény az x_0 pontban. Ha pedig f az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább háromszor folytonosan differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, de $f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0 a függvény inflexiós pontja.

T 11.11 Ha az f függvény grafikonjának az x_0 abszcisszájú pontjában van érintője, és f az x_0 egy ba loldali környezetében konvex, egy jobb oldali környezetében konkáv (vagy fordítva), akkor f-nek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

Feladatok

84.* Legyen f legalább kétszer folytonosan differenciálható az x_0 valamely teljes környezetében. A **T 11.10** felhasználásával mutassuk meg, hogy ha f szigorúan monoton nő és konvex (ill. konkáv) x_0-ban, akkor inverze szigorúan nő és konkáv (ill. konkáv) $f(x_0)$-ban, ha pedig f szigorúan monoton csökken és konvex (ill. konkáv) x_0-ban, akkor inverze is szigorúan csökken és konvex (ill. konkáv) $f(x_0)$-ban.

Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények mely intervallumokon konvexek, melyeken konkávok, és hol vannak inflexiós pontjaik:

85. $f(x) = x^3$, 86. $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

87. $f(x) = x + x^{5/3}$, 88. $f(x) = (x-5)^{5/3} + 2$,

89. $f(x) = x \sin(\ln x)$, 90. $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$.

Magasabbrendű deriváltak segítségével határozzuk meg az f függvény inflexiós pontjait:

91. $f(x) = x^3$, 92. $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$,

93. $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}^+$, 94. $f(x) = \sin^2 x$,

95. $f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$, 96. $f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x + 3x$,

97. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ függvény grafikonján az inflexiós pontok egy egyenesbe esnek.

98. Milyen c értékekre lesz az $f(x) = x^4 + cx^3 + 3x^2 + 1$ függvény konvex minden x-re?

99. Milyen feltételeket kell kielégítenie az a, b, c, d konstansoknak, hogy az $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvénynek legyen inflexiós pontja?

L'Hospital szabály

T 11.12 L'Hospital szabály. Legyen f és g két olyan egyváltozós valós függvény, amely az x_0 valamely K környezetében értelmezve van és differenciálható, és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in K$. Ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik az

$$L' = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor létezik az

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is, és $L = L'$. Analóg állítás igaz K baloldali környezettel és a limeszjelben $(x_0 - 0)$-val, illetve K jobboldali környezettel és a limeszjelben $(x_0 + 0)$-val, valamint akkor, ha K a ∞ ill. $-\infty$ valamely környezete, és x_0-t a ∞ ill. $-\infty$ szimbólummal helyettesítjük.

D 11.13 Ha $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, akkor az $L = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határértéket, $\dfrac{0}{0}$ **típusú határértéknek** nevezzük, ahol a lehet x_0, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, ∞, $-\infty$. Hasonló értelemben beszélhetünk $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértékekről. (Ezek azok a típusok, melyekről nem dönthető el ránézésre, hogy mi a határértékük, ezért **határozatlan típus**)oknak is nevezik őket.)

P 11.14 Ha egy $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértéket kell kiszámítanunk, akkor először algebrai átalakításokkal vagy logaritmálással $\frac{\infty}{\infty}$ vagy $\frac{0}{0}$ típusúvá alakítjuk, majd erre megpróbáljuk a L'Hospital szabályt alkalmazni. Azt, hogy a $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ határérték kiszámítása helyett a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ kiszámítására térünk át, a két határérték közé tett $\stackrel{L}{=}$ jellel fejezzük ki. Számítsuk ki az alábbi $\infty-\infty$ (ellenőrizzük!) típusú határértéket (mely összevonás után $\frac{0}{0}$ típusú határértékké alakul át):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x^2+x}{(x-1)\ln x}\stackrel{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x-2x+1}{(x-1)/x+\ln x}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-2x^2+x}{x-1+x\ln x}\stackrel{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-4x+1}{2+\ln x}=-\frac{3}{2}.$$

Feladatok

Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek $\frac{0}{0}$ típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével.

100.• $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, **101.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, **102.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$,

103. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, **104.**▷ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\ln(1+x)}$, **105.**▷ $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$,

106. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek $\frac{\infty}{\infty}$ típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével.

107.▷ $\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{e^x+x}$, **108.**▷ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$, **109.**▷ $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\ln x}{e^x+x}$,

110.▷ $\lim_{x\to a+0}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$, **111.**▷ $\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1+\ln\sin x}$, **112.** $\lim_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

113.• Ha $x\to\infty$, akkor az $\log_a(x)$ $(a>1)$, a^x $(a>1)$, x^k $(k>0)$ függvények is ∞-hez tartanak. Hasonlítsuk össze e három függvény értékét 'nagy' x-ekre, azaz, ha lehet, állítsuk őket nagyságszerinti sorrendbe. (Ehhez számítsuk ki a hányadosaik határértékét.)

Számítsuk ki az alábbi $0\cdot\infty$ típusú határértékeket!

114.• $\lim_{x\to+0} x\ln x$, **115.**▷ $\lim_{x\to+0} x\ln\sin x$, **116.** $\lim_{x\to+0}\ln x\ln(x+1)$,

117. $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$, **118.** $\lim_{x\to-\infty} e^x\ln(-x)$,

119. $\lim_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$, **120.** $\lim_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$,

121.• $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{v}{x}\right)$, $(v\in\mathbf{R})$, **122.**• $\lim_{x\to\infty} x^\varepsilon e^{-x}$, $(\varepsilon\in\mathbf{R})$,

123.▷ $\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+\sin^2 x)\cdot\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)\right)$.

124.* Legyen p egy tetszőleges polinomfüggvény, r egy teszőleges racionális törtfüggvény. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = 0, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to\infty} r(x)e^{-x} = 0.$$

Számítsuk ki az alábbi $\infty - \infty$ típusú határértékeket!

125.* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, 126.* $\lim_{x\to\pi/2}\left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$,

127.* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$, 128. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,

129. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$, 130.* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p} - \frac{q}{1-x^q}\right)$, $p, q \neq 0$.

Számítsuk ki az alábbi 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértékeket!

131.* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, 132. $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$, 133.* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$,

134. $\lim_{x\to +0}(1+x)^{\ln x}$, 135.* $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{s}{x})^x$, $s \in \mathbf{R}$, 136. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Vizsgáljuk meg, hogy alkalmazható-e a L'Hospital szabály az alábbi határértékeknél.

137.* $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, 138.* $\lim_{x\to\infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokhoz tartozó infimumát és szuprémumát!

139. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $(1, \infty)$,

140. $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$, $(0, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$ rögzített egész.

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának aszimptotáit!

141. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$, 142. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Függvények vizsgálata

M 11.15 A függvények vizsgálatához és ábrázolásához az alábbiakra lehet szükség:

(1) határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát;
(2) vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-, páratlan-, vagy periodikus-e;
(3) keressük meg a folytonossági intervallumokat és a szakadási helyeket;
(4) vizsgáljuk meg a függvény viselkedését az értelmezési tartomány határpontjaiban, számítsuk a függvény határértékeit a szakadási pontokban és a ∞ és $-\infty$ helyeken, keressük meg az aszimptotákat;
(5) határozzuk meg a függvény grafikonjának metszéspontjait a koordinátatengelyekkel;
(6) keressük meg a szélsőértékhelyeket, és azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növekvő, illetve csökkenő;

(7) keressük meg az inflexiós pontokat, és azokat a szakaszokat, ahol a függvény konvex, illetve konkáv;

(8) esetleg egy-két további tulajdonság megállapítása, a grafikonon néhány pont koordinátáinak kiszámítása és az értékkészlet meghatározása után rajzoljuk fel a függvény grafikonját.

Feladatok

Végezzük el az f függvény teljes vizsgálatát a bevezetőben leírtakat követve, ha $f(x)$ az alábbi képlettel van megadva:

143.▷ $\dfrac{x^3+1}{x^2}$,	**144.**▷ $\sqrt[3]{1-x^3}$,	**145.**▷ $x^6-3x^4+3x^2-1$,
146.▷ $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$,	**147.**▷ $\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,	**148.**▷ $x^2e^{\frac{1}{x}}$,
149.▷ $x-2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$,	**150.**▷ $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$,	**151.**▷ $\dfrac{\ln x}{x}$,
152. x^x,	**153.** $(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$,	**154.** $x^2\ln x^2$,
155. x^2e^{-x},	**156.** $\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}$,	**157.*** $4e^{(\sqrt{3}-2)x}\sin x$,
158. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.		

Paraméteresen adott síkgörbék vizsgálata

D 11.16 Síma görbeívnek nevezzük az $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1<t<t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel jellemzett síkbeli ponthalmazt, ha a (t_1,t_2) nyílt intervallumban
1. az $x(t)$ és $y(t)$ akárhányszor differenciálhatók t szerint;
2. legfeljebb véges sok olyan t_0 van, ahol $\dot{x}(t_0)=0$ vagy $\dot{y}(t_0)=0$;
3. egyetlen olyan t_0 sincs, ahol egyidejűleg $\dot{x}(t_0)=\dot{y}(t_0)=0$ lenne.

T 11.17 Síma görbeív bármely pontjában az y koordinátafüggvénynek x szerinti és az x koordinátafüggvénynek y szerinti differenciálhányadosa közül legalább az egyik létezik, mégpedig az $x_0=x(t_0)$ illetve $y_0=y(t_0)$ helyen

$$y'(x_0)=\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)},\ \text{ha } \dot{x}(t_0)\neq 0,\qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0}=\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)},\ \text{ha } \dot{y}(t_0)\neq 0.$$

T 11.18 Síma görbeív bármely pontjában az y koordinátafüggvénynek x szerinti és az x koordinátafüggvénynek y szerinti második differenciálhányadosa közül legalább az egyik létezik, mégpedig az $x_0=x(t_0)$ helyen

$$y''(x_0)=\left(\frac{dy'/dt}{dx/dt}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right)_{t=t_0},\quad \text{ha } \dot{x}(t_0)\neq 0,$$

illetve az y és x felcserélésével adódó képlet érvényes az $y_0=y(t_0)$ helyen, ha $\dot{y}(t_0)\neq 0$.

Feladatok

A D 11.16 szerint mely (t_1, t_2) intervallumokon lesz az alábbi paraméteresen megadott görbe sima görbeív?

159. $x = t^2$, $y = t^3$, **160.** $x = |t|$, $y = t^3 + 1$, **161.** $x = \cos\frac{1}{t}$, $y = \sin\frac{1}{t}$.

Határozzuk meg az alábbi paraméteresen megadott $x \mapsto y$ függvény x szerinti első és második deriváltját a paraméter kiküszöbölése nélkül:

162.$^{\triangleright}$ $x = 3t^2$, $y = 2t^3$,

163. $x = 6t^2$, $y = t^3$,

164. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$,

165. $x = 3\,\mathrm{tg}\,t - 1$, $y = \frac{5}{\cos t} + 2$,

166. $x = \frac{2}{1+t^2}$, $y = \frac{2}{t(1+t^2)}$. 13.1.18

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék t_0 paraméterértékhez tartozó érintőjének egyenletét:

167. $x = 4t + t^2$, $y = 2t^2$, $t_0 = 1$,

168. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, (a) $t_0 = 0$, (b) $t_0 = 1$.

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék t_0 paraméterértékhez tartozó simulókörének egyenletét:

169. $x = 2t - \frac{3}{t}$, $y = 2t + \frac{3}{t}$, $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

170. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t_0 = \pi/3$.

171. Mutassuk meg, hogy az $x = 2t + |t|$, $y = 5t^2 + 4t|t|$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott $x \mapsto y$ függvény $t = 0$ esetén differenciálható.

12. fejezet

Határozatlan integrál

Határozatlan integrál

D 12.1 Azt mondjuk, hogy az egyváltozós valós f függvénynek a H halmazon **primitív függvénye** az F függvény, ha a H halmazon f és F értelmezve van, továbbá F differenciálható a H halmazon, mégpedig

$$F'(x) = f(x), \quad \text{ha} \quad x \in H\,.$$

Az egyváltozós valós f függvény primitív függvényeinek összességét az f **határozatlan integráljának** nevezzük és a következőképpen jelöljük: $\int f(x)\,dx$, vagy $\int f$.

T 12.2 Ha az egyváltozós valós f függvénynek valamely I intervallumon primitív függvénye F és G, akkor van olyan valós C szám, hogy az I intervallum minden x elemére $G(x) = F(x)+C$.

D 12.3 Az elemi függvények differenciálási szabályaiból adódó integrálási képleteket **alapintegráloknak** nevezzük. A fontosabbak:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^*, \text{ ha } n \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C^*;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C^*, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C^*;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C, \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{arsh} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{arch} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C^* = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C^*, & \text{ha } |x| < 1, \\ \operatorname{arcth} x + C^*, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

Ahol C^* jelöli az integrációs konstanst, ott ezzel azt jelezzük, hogy az integrandus értelmezési tartománya több intervallumból áll (az x^n függvénynél csak negatív n esetén), az összefüggés pedig csak egy, de bármelyik intervallumon érvényes. Az egész értelmezési tartományon érvényes összefüggést úgy kapunk, ha minden intervallumon külön konstanst használunk. Pl.:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

T 12.4 A függvények differenciálási szabályaiból közvetlenül adódnak az integrálás alábbi **általános szabályai**:

(1) $$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,;$$

(2) $$\int (k \cdot f(x))\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \quad (k \in \mathbf{R})\,;$$

(3) $$\int f^v(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + C\,, \quad (v \in \mathbf{R}, v \neq -1)\,;$$

(4) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,.$$

Ha $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, akkor bármely a és b ($a \neq 0$) konstansokkal

(5) $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad \text{speciálisan} \quad \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

Ha $\int f(u)\,du = F(u) + C$, akkor bármely differenciálható g belső függvénnyel

(6) $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,.$$

P 12.5 Számítsuk ki az $\dfrac{1}{(\sin^2 x)\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$ határozatlan integrálját. A (3) szabályt alkalmazzuk:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{4}} \cdot (\operatorname{ctg} x)'\,dx = -\frac{(\operatorname{ctg} x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C\,.$$

P 12.6 Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$ függvény határozatlan integrálját. Mivel $(1 + \sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$, a (4) szabály alapján

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2f(x)\,dx = \ln\sqrt{1 + \sin^2 x} + C\,.$$

P 12.7 Számítsuk ki az $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx^2}$, $(a\,, b > 0)$ határozatlan integrált. Átalakítás után az (5) szabályt alkalmazzuk:

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x + C\,.$$

P 12.8 Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$. Állítsuk elő $\int f(x)\,dx$-et! A (5) szabállyal:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

P 12.9 Számítsuk ki az $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$ határozatlan integrált. A (6) szabállyal:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2 - 1}} \cdot (\sqrt{2}\cos x)'\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arch}(\sqrt{2}\cos x) + C.$$

Feladatok

Az összeg- és különbségfüggvény, illetve a konstanssal szorzott függvény integrálási szabályát alkalmazva oldjuk meg az alábbi feladatokat. (A gyökös kifejezéseket írjuk át törtkitevős alakba.)

1. $\int 7x^4\,dx$, **2.** $\int \sqrt[5]{x}\,dx$,

3. $\int (t^2 + 6t - 5)\,dt$, **4.** $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$,

5. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$, **6.** $\int \left(2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\,dx$.

Oldjuk meg maradékos osztás után az alábbi feladatokat:

7.• $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx$, **8.▷** $\int \frac{x^3}{x+5}\,dx$, **9.▷** $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$,

10. $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}}\,dx$, **11.** $\int \frac{x^4}{x^2 + a^2}\,dx$, **12.** $\int \frac{x^5}{x^3 - a^3}\,dx$,

13. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}\,dx$.

A **T 12.4** alatti (3) és (4) integrálási szabályok alapján oldjuk meg az alábbi feladatokat:

14. $\int (2x-3)^{100}\,dx$, **15.** $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\,dx$, **16.** $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$,

17. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$, **18.▷** $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$, **19.•** $\int (a+bx)^n\,dx$,

20. $\int r^2\sqrt[3]{1+r^3}\,dr$, **21.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, **22.** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

23. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$, **24.•** $\int \cos^3 x\,dx$, **25.** $\int \sin^3 x\,dx$,

26. $\int \sin^5 x\,dx$, **27.** $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$, **28.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$,

29. $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx$, **30.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$, **31.** $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx$,

32.* $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$, **33.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$, **34.** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$,

35. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x \, dx$, 36. $\int \operatorname{ch}^3 x \, dx$, 37.▷ $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} \, dx$,

38. $\int \frac{7}{4x-1} \, dx$, 39. $\int \frac{8x-7}{4x^2-7x+11} \, dx$, 40. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} \, dx$,

41. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} \, dx$, 42. $\int \frac{x}{x^2+a^2} \, dx$, 43. $\int \frac{3x^2}{a^3+x^3} \, dx$,

44.▷ $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$, 45.▷ $\int \frac{dx}{\sin x}$, 46. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

47. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$, 48. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \, dx$, 49. $\int \frac{a^x}{a^x+1} \, dx$,

A T 12.4 alatti (5) és (6) integrálási szabályok alapján oldjuk meg az alábbi feladatokat:

50. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$, 51. $\int \frac{dx}{3x^2+6x+5}$, 52. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$,

53. $\int \frac{1}{x^2-2x-3} \, dx$, 54. $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$, 55.• $\int \frac{x \, dx}{4+x^4}$,

56.▷ $\int \frac{x}{a^4-x^4} \, dx$, 57.▷ $\int \frac{x^3}{x^8-2} \, dx$, 58. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$,

59.• $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$, 60.• $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-3}}$, 61.• $\int \frac{dx}{\sqrt{3+6x-9x^2}}$,

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$, 63. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$, 64. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$,

65. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$, 66. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx$, 67.▷ $\int \frac{dx}{a^{-x}+a^x} \, dx$,

68. $\int \frac{\sin \ln x}{x} \, dx$, 69.▷ $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \, dx$, 70. $\int \frac{dx}{x \ln x}$,

71. $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$, 72.* $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, 73.* $\int \frac{a^2 b^2 \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

Parciális integrálás

D 12.10 A szorzatfüggvény differenciálási szabályából nyerhető

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

képletet a **parciális integrálás** képletének nevezzük, és ha ezt a képletet alkalmazzuk, akkor azt mondjuk, hogy az illető függvényt parciálisan integráljuk.
A parciális integrálásra különösen alkalmas függvények típusai:
1. **típus.** A

$$p(x) \cdot t(ax+b) \quad (a, b \in \mathbf{R}\,;\ a \neq 0)$$

alakú függvények, amelyekben p: polinomfüggvény, t: a sin, cos, sh, ch, exp valamelyike. Ebben az esetben legyen $f'(x) = t(ax+b)$ és $g(x) = p(x)$. Annyi parciális integrálásra lesz

szükségünk, amennyi p foka.
2. **típus.** Az

$$x^v \ln^n x \quad (n \in \mathbf{N},\ v \in \mathbf{R},\ v \neq -1)$$

alakú függvények. Ebben az esetben legyen $f'(x) = x^v$ és $g(x) = \ln^n x$. Itt n parciális integrálásra lesz szükség.
3. **típus.** A

$$t_1(ax+b) \cdot t_2(cx+d) \quad (a, b, d \in \mathbf{R};\ a \neq 0,\ c \neq 0)$$

alakú függvények, ahol t_1 és t_2 az 1. típusnál a t-ként felsorolt öt függvény valamelyike. (Az $f'(x)$ és $g(x)$ megválasztásához lásd **P 12.11.**)
4. **típus.** A

$$p(x) \cdot a(x)$$

akakú függvények, amelyekben p: polinomfüggvény, a: arkusz- vagy areafüggvény. Ebben az esetben legyen $f'(x) = p(x)$ és $g(x) = a(x)$.

P 12.11 A 3. típusú függvények parciális integrálásánál egyenletet írhatunk fel a kiszámítandó határozatlan integrálra, mely egyenlethez két módon is eljuthatunk. Szemléltessük ezt az

$$I = \int e^{ax} \sin bx\, dx \quad (a, b \neq 0 \text{ konstans})$$

kiszámításán. Eljárhatunk úgy, hogy I-t két különböző módon parciálisan integráljuk, egyszer $f'(x) = \sin bx$ és $g(x) = e^{ax}$ választással, majd $f'(x) = e^{ax}$, $g(x) = \sin bx$ választással:

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\, dx\,,$$
$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\, dx\,.$$

Az első egyenletet $\frac{b}{a}$-val, a másodikat $\frac{a}{b}$-vel szorozva és összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{b}{a}I + \frac{a}{b}I = \frac{a^2+b^2}{ab}I = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a}\cos bx, \quad \text{amiből } I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Eljárhatunk úgy is, hogy a fenti első egyenletben tovább integráljuk parciálisan a második tagot $f'(x) = \cos bx$, $g(x) = e^{ax}$ választással:

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left(e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx\right) = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Ebből ismét

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Feladatok

A parciális integrálás módszerével oldjuk meg az alábbi feladatokat:

74.• $\int x\cos x\,dx$, 75. $\int x\sin 2x\,dx$, 76. $\int x^2\cos 2x\,dx$,

77. $\int x\cos 2x\,dx$, 78. $\int x^2\sin 2x\,dx$, 79. $\int x^3\sin x\,dx$,

80. $\int x^3\cos x\,dx$, 81. $\int x\cos^2 x\,dx$. 82. $\int x\cdot 3^x\,dx$,

83. $\int xe^{-x}\,dx$, 84. $\int x^2e^{-2x}\,dx$, 85. $\int e^{-x}\sin x\,dx$,

86. $\int e^{2x}\cos x\,dx$, 87.▷ $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, 88. $\int e^{6x}\cos 4x\,dx$,

89. $\int e^x\sin^2 x\,dx$, 90. $\int \arcsin x\,dx$, 91. $\int (\arcsin x)^2\,dx$,

92. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, 93. $\int \arccos\frac{1}{x}\,dx$, 94. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx$,

95.• $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$, 96.▷ $\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\,dx$, 97. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$,

98. $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, 99. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, 100.▷ $\int \ln x\,dx$,

101. $\int \ln^2 x\,dx$, 102. $\int \ln^3 x\,dx$, 103. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$,

104. $\int \ln(x^2+1)\,dx$, 105. $\int \ln\frac{8-x}{3}\,dx$, 106. $\int \lg\frac{4}{x}\,dx$,

107. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$, 108. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$, 109. $\int x^v\ln x\,dx$, $(v\neq -1)$,

110. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$, 111. $\int x\operatorname{sh} x\,dx$, 112. $\int x^3\operatorname{ch} 3x\,dx$,

113. $\int (2x-x^2)\operatorname{sh} x\,dx$, 114. $\int \operatorname{ch} x\cos 5x\,dx$.

115. Igazoljuk, hogy $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

116. Igazoljuk, hogy $\int \sin^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

Integrálás helyettesítéssel

D 12.12 Az $f(x)$ függvény **helyettesítéssel történő integrálásáról** beszélünk, ha
1. az x változó helyébe valamely t változónak egy invertálható és differenciálható $u(t)$ függvényét helyettesítjük; kimutatható, hogy ekkor a dx helyébe az $u'(t)\,dt$ kifejezést kell írnunk, és a számítást a következőképpen kell folytatnunk:
2. elvégezzük a t szerinti integrálást;
3. végül az u függvény $\overline{u}$ inverzét véve a $t = \overline{u}(x)$ helyettesítéssel visszaírjuk az eredeti x változót. Képletben:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=\overline{u}(x)}.$$

Megjegyzés. A gyakorlatban esetenként nem közvetlenül az x változó helyébe vezetjük be az $u(t)$ függvényt, hanem az f valamely belső függvényét helyettesítjük valamely más függvénnyel, vagy egyszerűen x valamely függvénye helyébe írjuk a t változót. Ez az utóbbi eset azonos a (6) képletben leírttal.

T 12.13 A leggyakoribb helyettesítések: Legyen $R(x, y)$ egy racionális törtfüggvény. Az alább konkrétan megnevezett f és g függvényekből felépített $R(f, g)$ függvények integrálásához használatos helyettesítések:

Az $R(\sin x\,, \cos x)$ típus esetén a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ helyettesítés. Ekkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ha $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, akkor használható az általában egyszerűbb $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítés is. Ekkor

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Az $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ típus esetén vagy az ($R(e^x)$ esetben használható) $e^x = t$ helyettesítés, amikor $dx = \frac{dt}{t}$, vagy a $\operatorname{th}\frac{x}{2} = u$ helyettesítés, amikor

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2}.$$

Az $R\left(x\,, \sqrt{1-x^2}\right)$ esetén a helyettesítés $x = \sin t$.

Az $R\left(x\,, \sqrt{x^2+1}\right)$ esetén a helyettesítés $x = \operatorname{sh} t$.

Az $R\left(x\,, \sqrt{x^2-1}\right)$ esetén a helyettesítés $x = \operatorname{ch} t$, ha $x \geq 0$, és

az $R\left(x\,, \sqrt{x^2-1}\right)$ esetén a helyettesítés $x = -\operatorname{ch} t$, ha $x \leq 0$.

Az $R\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \ldots, x^{\frac{k}{l}}\right)$ $(a, b, c, d, \ldots, k, l \in \mathbb{N}^+)$ esetén a helyettesítés $x = u^\lambda$, ahol λ a kitevők nevezőinek legkisebb közös többszöröse.

P 12.14 Gyakran az alkalmas helyettesítés megtalálásához az integrálandó függvényen átalakítást kell végeznünk. Keressük például a $\sqrt{1+2x-x^2}$ függvény határozatlan integrálját.

Előbb átalakítjuk a függvényt:

$$I=\int\sqrt{1+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\sqrt{2}\int\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx.$$

Ez utóbbi alak az $u=\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$ helyettesítéssel $R\left(u,\sqrt{1-u^2}\right)$ típusú lesz, amelyre a **T 12.13** szerint az $u=\sin t$ helyettesítést alkalmazzuk. A több lépésből álló helyettesítés egy lépésben is elvégezhető: $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}=\sin t$. Ekkor $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$, és

$$I=\sqrt{2}\int\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t\,dt=2\int\cos^2 t\,dt=2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=t+\frac{\sin 2t}{2}+C=$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sin t\cdot\cos t+C=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}+C=$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}+C\,.$$

P 12.15 Előfordulhat, hogy a fentiekben ajánlott helyettesítésnél kevesebb számolással járó helyettesítést is találhatunk. Számítsuk ki például az $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(x>1)$ integrált. Az ajánlott helyettesítés: $x=\operatorname{ch} t$. Ekkor $dx=\operatorname{sh} t\,dt$ és $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t}=\int\frac{dt}{\operatorname{ch} t}$.
Ez utóbbit megoldhatjuk a $\operatorname{th}\dfrac{t}{2}=u$ helyettesítéssel: a (13) képletek szerint $I=\displaystyle\int\frac{2du}{1+u^2}=$ $2\operatorname{arctg} u+C$. A $\operatorname{ch} t=\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ egyenletből $u=\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} t-1}{\operatorname{ch} t+1}}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, tehát $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$ $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+C$.

Számítsuk ki ugyanezt a feladatot $t=\dfrac{1}{x}$ helyettesítéssel. Ekkor $dx=-\dfrac{1}{t^2}$, és

$$I=\int t\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arccos t+C=\arccos\frac{1}{x}+C\,.$$

Látható, hogy ez utóbbi helyettesítés kevesebb számolással jár.

Megjegyzés. Az $\displaystyle\int\frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ integrált más módon is kiszámíthatjuk. Bővítve a törtet $\operatorname{ch} t$-vel és $\operatorname{ch}^2 t$ helyére $(1+\operatorname{sh}^2 t)$-et írva, $u=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel

$$I=\int\frac{\operatorname{ch} t\,dt}{1+\operatorname{sh}^2 t}=\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg} u+C=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t)+C=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+C\,.$$

Más átalakítással és $u=e^t$ helyettesítéssel:

$$I=\int\frac{dt}{\operatorname{ch} t}=\int\frac{dt}{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})}=2\int\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt=2\int\frac{du}{1+u^2}=2\operatorname{arctg}(e^t)+C\,.$$

Az $x=\operatorname{ch} t$ egyenlőségből $t=\operatorname{arch} t=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, tehát $I=2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+$ C.

Differenciálással meggyőződhetünk arról, hogy mind a négy módon a megadott függvény határozatlan integrálját kaptuk meg az $(1,\infty)$ intervallumban. Ez azt is jelenti, hogy az eredmények jobb oldalán első tagként álló függvények legfeljebb konstans összeadandóban térhetnek el egymástól.

Feladatok

A T 12.13 alatt felsorolt helyettesítések valamelyikével vagy más alkalmas helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi feladatokat (a, b, c konstansok és $a > 0$).

117.▷ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, **118.** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, **119.** $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$,

120. $\int \sqrt{5+3x^2}\,dx$, **121.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, **122.**▷ $\int x\sqrt{c+x}\,dx$,

123. $\int \frac{dx}{x\sqrt{c+x}}$, **124.** $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$, **125.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$,

126.▷ $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, **127.** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$, **128.**▷ $\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$,

129.▷ $\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$, **130.**▷ $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, **131.** $\int \sqrt{5-3x^2}\,dx$,

132. $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$, **133.**▷ $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$, **134.** $\int \sqrt{5-2x+x^2}\,dx$,

135. $\int \sqrt{15+2x-x^2}\,dx$, **136.** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$,

137. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$, **138.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, **139.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$,

140. $\int \frac{dx}{x^4+x}$, **141.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$, **142.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$,

143. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$, **144.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$, **145.** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$,

146.▷ $\int \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}\,dx$, **147.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, **148.** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$,

149. $\int \frac{dx}{\cos x}$, **150.** $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$, **151.** $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x}$,

152.▷ $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$, **153.**▷ $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$, **154.**▷ $\int \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}\,dx$,

155. $\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$, **156.**▷ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$, **157.**▷ $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$,

158. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, **159.** $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,dx$, **160.**▷ $\int \frac{dx}{c+b\cos x}$.

Racionális törtfüggvények integrálása

T 12.16 A valós együtthatós racionális $R(x)$ törtfüggvény maradékos osztással

$$R(x) = g(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

alakra hozható, ahol $P(x)$ fokszáma kisebb $Q(x)$ fokszámánál.

T 12.17 A $Q(x)$ valós együtthatós polinomfüggvény egyértelműen előállítható elsőfokú, és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomfüggvények szorzataként:

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_l x + c_l)^{\beta_l} .$$

T 12.18 Ha $Q(x)$-nek az előző tétel szerinti felbontása ismeretes, akkor $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ törtfüggvényt a

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^{(1)}}{x - x_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{A_1^{(k)}}{x - x_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}x + C_{\beta_1}^{(1)}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{B_1^{(l)}x + C_1^{(l)}}{x^2 + b_l x + c_l} + \frac{B_2^{(l)}x + C_2^{(l)}}{(x^2 + b_l x + c_l)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_l}^{(l)}x + C_{\beta_l}^{(l)}}{(x^2 + b_l x + c_l)^{\beta_l}} + \cdots\end{aligned}$$

képlet szerint elemi törtfüggvények (parciális törtek) összegére bonthatjuk. Az itt még ismeretlen $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ számok meghatározására egyenletrendszert írhatunk fel.

P 12.19 Számítsuk ki az $\dfrac{1}{x^6 + x^4}$ függvény határozatlan integrálját.

A nevezőt a **T 12.17** szerinti alakra hozzuk: $x^6 + x^4 = x^4(x^2 + 1)$. Ezt felhasználva a függvényt előállítjuk elemi törtek összegeként:

$$\frac{1}{x^4(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} .$$

A jobb oldalt összevonva, a két oldal számlálójának azonosan egyenlőnek kell lennie:

$$1 = A_1 x^3(x^2 + 1) + A_2 x^2(x^2 + 1) + A_3 x(x^2 + 1) + A_4(x^2 + 1) + (Bx + C)x^4 .$$

Átrendezve x hatványai szerint:

$$1 = (A_1 + B)x^5 + (A_2 + C)x^4 + (A_1 + A_3)x^3 + (A_2 + A_4)x^2 + A_3 x + A_4 .$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításával:

$$A_4 = 1,\ A_3 = 0,\ A_1 + B = 0,\ A_2 + C = 0,\ A_1 + A_3 = 0,\ A_2 + A_4 = 0.$$

Ezekből $A_1 = 0$, $A_2 = -1$, $B = 0$, $C = 1$. Tehát

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^2} = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Amennyiben $Q(x)$ gyökei között több egyszeres gyök van, az $A_j^{(i)}$, $B_j^{(i)}$, $C_j^{(i)}$ számok meghatározását célszerűbben az alábbi példában szemléltetett módon végezhetjük.

P 12.20 Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{1-x^4}$ függvény határozatlan integrálját. Elemi törtek összegére bontjuk a függvényt:

$$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{-x^2}{x^4-1}=\frac{-x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ebből $-x^2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$.
Legyen $x=1$; akkor $-1=4A$, azaz $A=-\frac{1}{4}$.
Legyen $x=-1$; akkor $-1=-4B$, azaz $B=\frac{1}{4}$.
Legyen $x=0$; akkor $0=A-B-D$, azaz $D=-\frac{1}{2}$.
A C-t az x együtthatóiból állapítjuk meg: $A+B-C=0$, azaz $C=0$. Tehát

$$\int\frac{x^2}{1-x^4}\,dx=\int\frac{-x^2}{x^4-1}\,dx=\int\left(-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Feladatok

Integráljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket, illetve helyettesítéssel ilyenekre visszavezethető függvényeket.

161.$^{\triangleright}$ $\dfrac{1}{x^3-8}$, 162. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, 163. $\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$,

164. $\dfrac{x-3}{x^3-x}$, 165. $\dfrac{1}{x^4-x^2}$, 166. $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

167.$^{\triangleright}$ $\dfrac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$, 168.$^{\triangleright}$ $\dfrac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}$, 169. $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$,

170. $\dfrac{x}{x^3-1}$, 171.$^{\triangleright}$ $\dfrac{1}{x(3+5x^6)}$, $(u=x^6)$, 172.$^{\triangleright}$ $\dfrac{8}{7x+3x^5}$, $(u=x^4)$,

173. $\dfrac{6dx}{e^x-3}$, 174.$^{\triangleright}$ $\dfrac{\ln x+1}{x^x-1}$, 175. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Vegyes feladatok.

176.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg az $\int xf''(x)\,dx$ integrált.

177. Határozzuk meg az $\int f'(2x)\,dx$ integrált.

178.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg az f függvényt, ha $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$.

179.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg az f függvényt, ha $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

180. Legyen f folytonos és invertálható függvény, inverzét jelölje f^{-1}. Mutassuk meg, hogy ha
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
akkor
$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$
Ellenőrizzük e formulát az x^n, e^x, $\arcsin x$ függvényekkel!

Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét.

181.▷ $\int |x|\,dx$,

182. $\int x|x|\,dx$,

183. $\int (|1+x|-|1-x|)\,dx$,

184. $\int e^{-|x|}\,dx$,

185. $\int \max(1,x^2)\,dx$,

186.▷ $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$,

187. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$,

188. $\int x\ln(4+x^4)\,dx$,

189.▷ $\int \frac{x^2\,dx}{x^6-10x^3+9}$,

190. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+2}$,

191. $\int \frac{2x-3}{9x^2-12x+4}\,dx$,

192. $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}\,dx$,

193.* $\int \frac{dx}{1+x^4}$,

194. $\frac{1}{x^2-x+2}$,

195. $\int \frac{x}{x^4-2x^2-1}\,dx$,

196.▷ $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$,

197. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$,

198. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$.

199.▷ $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$,

200. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$,

201. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$,

202. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$,

203. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$,

204. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$,

205. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$,

206. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$,

207. $\int \cos^6 x\,dx$,

208. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$,

209. $\int x^2 a^x\,dx \ (a>1)$,

210. $\int \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx$,

211. $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{sh} x}$,

212.* $\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{sh} x)^2}$,

213. $\int \sin\ln x\,dx$.

214. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$,

215. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$,

216. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+3\cos^2 x}\,dx$,

217. $\int 2\operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx$,

218. $\int \sin x\cos x\sqrt{\cos^6 x+\sin^6 x}\,dx$,

219. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$,

13. fejezet

Határozott integrál

A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

D 13.1 Legyen f az $[a,b]$ intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós függvény, továbbá legyen

$$B: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

az $[a,b]$ intervallum valamely beosztása, és legyen $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Az

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvényhez, a B beosztáshoz és annak $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$ reprezentánsrendszeréhez tartozó **integrálközelítő összegnek** nevezzük.

Ha az $[a,b]$ intervallum minden határon túl finomodó $[B_m;\ m \in \mathbf{N}^+]$ beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek bármely $[I_m]$ sorozatának van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f az $[a,b]$ intervallumon **integrálható**; ezt a határértéket – amely minden ilyen $[I_m]$ esetén ugyanaz a szám – az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett **határozott integrál**jának nevezzük és így jelöljük:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ vagy } \int_a^b f\,.$$

T 13.2 Bármely integrálható f, g függvényekre és bármely a, b, c valós számokra érvényesek az alábbi tulajdonságok:

(1) $$\int_a^b (c \cdot f(x))\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

(2) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

(3) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$

(4) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

(5) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

(6) $m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b-a)$, ahol m az f függvénynek alsó korlátja, M pedig felső korlátja az $[a,b]$ intervallumon.

T 13.3 (Integrál-középértéktétel.) Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, akkor integrálható is, és van olyan $c \in [a,b]$, hogy

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c). \tag{7}$$

T 13.4 Newton–Leibniz-formula. Ha f és F függvények az $[a,b]$ intervallumon folytonosak, továbbá F a f-nek primitív függvénye az (a,b) intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b, \quad \text{ahol} \quad [F(x)]_a^b := F(b) - F(a). \tag{8}$$

P 13.5 Keressünk olyan c számot, amely kielégíti az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvényre és a $[-1,1]$ intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt.
A (8) alapján

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

és $f(c) = \dfrac{1}{1+c^2}$; ezért (7) szerint $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{1+c^2}$, azaz $c^2 = \dfrac{4-\pi}{\pi}$ .Tehát két ilyen szám van: $c_1 = -\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$ és $c_2 = \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$.

Feladatok

1.▹ Számítsuk ki az $f(x) = x+1$ függvénynek a $B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ beosztáshoz és a $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\}$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összegét.

Számítsuk ki a megadott integrálokat a **D 13.1** definíció segítségével úgy, hogy az adott intervallumot n egyenlő részre osztjuk és reprezentánsrendszernek az intervallumok bal vagy jobb végpontját választjuk:

2.▹ $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$, **3.** $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$. **4.** $\displaystyle\int_0^2 2\,dx$.

5.▹ $\displaystyle\int_0^1 x\,dx + \int_2^1 -x\,dx + \int_3^3 x^3\,dx$, **6.**▹ $\displaystyle\int_0^5 \left(5x^3+1\right)dx + \int_5^4 \left(5x^3+1\right)dx$.

7.▹ Adjunk alsó és felső becslést az $I = \displaystyle\int_2^4 e^{-x^2}\sin\frac{\pi x}{4}\,dx$ integrál értékére!

Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik az alább megadott f függvényre és $[a,b]$ intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt.

8.▹ $f(x) = 3x^2$, $[-4,-1]$, **9.** $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $[4,12]$,

10. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, **11.** $f(x) = \sin x$; $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

12. $f(x) = \sin x$; $[0,\pi]$.

Improprius integrálok

D 13.6 Az $I = [a, \infty)$, ill. $I = (-\infty, b]$, ill. $I = (-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett f függvény (végtelenbe nyúló) I intervallumon vett **improprius integráljának** jele és értelmezése:

$$(9) \qquad \int_a^{\infty} f := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f\,, \quad \text{ill.} \int_{-\infty}^{b} f := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f\,, \quad \text{ill.} \int_{-\infty}^{\infty} f := \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f\,,$$

amennyiben f minden véges $[a, b]$ intervallumon integrálható, és a jobb oldalra írt határértékek léteznek (a legutóbbi esetben úgy, hogy a és b egymástól függetlenül tart mínusz végtelenhez, illetve végtelenhez).

D 13.7 Ha az $I = (a, b]$, ill. $I = [a, b)$, ill. $I = (a, b)$ intervallumon értelmezett f függvény az I-hez nem tartozó határpont(ok) környezetében nem korlátos, de integrálható minden

$$[t, b]\ (a < t) \quad \text{ill. } [a, u]\ (u < b)\,, \quad \text{ill. } [t, u]\ (a < t < u < b)$$

intervallumon, akkor az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett **improprius integráljának** jele és értelmezése:

$$(10) \qquad \int_a^b f := \lim_{t\to a+0} \int_t^b f \quad \text{ill.} \quad \int_a^b f := \lim_{u\to b-0} \int_a^u f \quad \text{ill.} \quad \lim_{\substack{t\to a+0 \\ u\to b-0}} \int_t^u f\,,$$

amennyiben a feltüntetett jobb-, ill. baloldali határértékek léteznek (a legutóbbi esetben úgy, hogy t és u egymástól függetlenül tart jobbról a-hoz, illetve balról b-hez).

D 13.8 Legyen értelmezve az f függvény az $(a, u) \cup (u, b)$ halmazon. Ha f nem korlátos az u környezetében és esetleg az a vagy a b (vagy mindkettő) környezetében sem (vagy $a = -\infty$ és/vagy $b = \infty$), de az f függvénynek az $[a, u]$ és $[u, b]$ intervallumokon vett improprius integrálja létezik, akkor az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$(11) \qquad \int_a^b f(x)\,dx := \int_a^u f(x)\,dx + \int_u^b f(x)\,dx\,.$$

Ha a fenti definíciókban szereplő határértékek valamelyike létezik, akkor az illető improprius integrált **konvergens**nek nevezzük (ellenkező esetben **divergens**nek).

P 13.9 Számítsuk ki az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ improprius integrált (ha létezik). Az alsó határra a (10) alatti első képletet, a felső határra a (9) alatti első képletet alkalmazzuk. Akkor

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{a\to1+0 \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{a\to1+0 \\ b\to\infty}} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}\right]_a^b =$$

$$= \lim_{\substack{a\to1+0 \\ b\to\infty}} \left(2 \operatorname{arctg} \sqrt{b-1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{a-1}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 = \pi\,.$$

(Az $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ határozatlan integrált legegyszerűbben az $u = \sqrt{x-1}$ helyettesítéssel számíthatjuk ki.)

Feladatok

Állapítsuk meg, hogy az alábbi nem korlátos függvények improprius integráljai, illetve a végtelen intervallumokon vett improprius integrálok konvergensek-e, s ha igen, határozzuk meg az értéküket.

13. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **14.** $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}$, **15.** $\int_0^2 \sqrt[3]{2}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$,

16. $\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$, **17.** $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2\,dx}{\sqrt[7]{(x^3-1)^2}}$, **18.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$,

19. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x+2}$, **20.** $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, **21.** $\int_0^1 \ln^2 x\,dx$,

22. $\int_0^\infty e^{-x}$, **23.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, **24.** $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{3+4x^2}$,

25. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1^2}}$, **26.** $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$, **27.** $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$,

28. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$, **29.** $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$, **30.** $\int_0^\infty e^{-x}\cdot\cos x\,dx$,

31. $\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$, **32.** $\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx$.

33. Keressünk olyan $b \neq 0$ valós számot, amelyre $\int_0^b \ln x\,dx = 0$.

Számítsuk ki az alábbi határozott, vagy improprius integrálokat.

34. $\int_0^2 (16x - x\cdot 4^x)\,dx$, **35.** $\int_0^\pi \cos^2 2x$, **36.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2+3x^2}$,

37. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,dx$, **38.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$, **39.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$,

40. $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, **41.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. **42.** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2||x-3|}}$.

43. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Bizonyítsuk be, hogy ha $p > 0$ konstans, akkor

44. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{ha } p > 1, \\ \infty, & \text{ha } p \leq 1. \end{cases}$ **45.** $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{, ha } p < 1, \\ \infty & \text{, ha } p \geq 1. \end{cases}$

Terület

D 13.10 Legyen f az (a,b) intervallumon előjelet nem váltó, korlátos, és legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos valós függvény (az $a=-\infty$ és a $b=\infty$ esetet is megengedve). A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y=f(x)$ egyenletű görbe, az (a,b) intervallum, valamint (véges a és b esetén) az $x=a$ és az $x=b$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot az f függvény és az (a,b) intervallum által meghatározott **görbevonalú trapéznak** nevezzük, és ennek **területén** az

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

Ha az y_1 és y_2 is az $[a,b]$ intervallumon értelmezett korlátos és legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos valós függvény úgy, hogy minden $x\in[a,b]$ esetén $y_1\geq y_2\geq 0$, akkor az $y=y_1(x)$ és az $y=y_2(x)$ egyenletű görbék, valamint az $x=a$ és az $x=b$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét az

$$\int_a^b (y_1(x)-y_2(x))\,dx$$

integrállal számítjuk. Ezt a területet röviden a két görbe közötti területnek mondjuk.

Ha az f függvény az (a,b) intervallum egyes részintervallumain az $f(x)\geq 0$ egyenlőtlenségnek, a többi részintervallumain pedig az $f(x)\leq 0$ egyenlőtlenségnek tesz eleget, akkor részintervallumonként külön számítjuk ki a területet, és az ezekre kapott értékeket összeadjuk.

P 13.11 Számítsuk ki az $f(x)=x^2-2x$ függvény és a $[-1,3]$ intervallum által meghatározott görbevonalú trapéz területét. A függvény grafikonja a $[-1,0)$ és a $(2,3]$ intervallumon az x tengely felett, a $(0,2)$ intervallumon az x tengely alatt halad, ezért a keresett T terület:

$$T=\int_{-1}^0 (x^2-2x)\,dx-\int_0^2 (x^2-2x)\,dx+\int_2^3 (x^2-2x)\,dx=4\,.$$

T 13.12 Görbevonalú trapéz területe, ha a határoló görbe $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1<t<t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)y(t)|\,dt$$

integrállal számítható ki (feltéve, hogy az integrál létezik).

P 13.13 Számítsuk ki az $y_1(x)=e^x$ és $y_2(x)=8-3e^x$ egyenletű görbék közti területet 0-tól a görbék metszéspontjának abszcisszájáig terjedő intervallumon.
A metszéspont abcisszája az $e^x=8-3e^x$ egyenletből: $x=\ln 2$.
A görbék közti terület:

$$T=\int_0^{\ln 2} ((8-3e^x)-e^x)\,dx=[8x-4e^x]_0^{\ln 2}=4(2\ln 2-1)\,.$$

D 13.14 Legyen r egy 2π-nél nem hosszabb $[\alpha,\beta]$ intervallumon értelmezett valós függvény. A síkbeli polárkoordináta-rendszerben az $r=r(\varphi)$ egyenletű görbe, valamint a $\varphi=\alpha$ és a

$\varphi = \beta$ egyenletű félegyenes által határolt síkidomot az r függvény és az $[\alpha, \beta]$ intervallum által meghatározott szektornak nevezzük, és ennek **területén** az

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi \tag{12}$$

határozott integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

D 13.15 Ha két görbe van adva, $r = r_1(\varphi)$ és $r = r_2(\varphi)$ poláregyenletével és $r_1(\varphi) \geq r_2(\varphi)$, ha $\varphi \in [\alpha, \beta]$, akkor a két görbe közti területet az

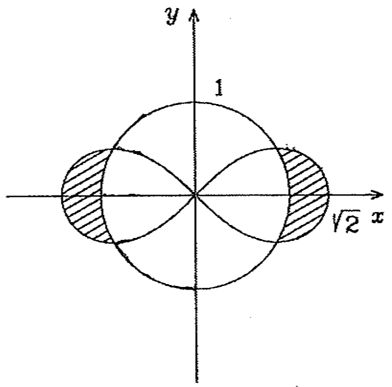
$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)\right] d\varphi$$

képlettel számítjuk.Ha egy síkidom több, páronként közös belső pont nélküli szektorból áll, akkor a megfelelő részterületeket külön számítjuk ki, és összeadjuk.

P 13.16 Számítsuk ki az $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$ egyenletű görbe (lemniszkáta) által határolt síkidomból az $r = 1$ egyenletű körön kívül eső rész területét.

A lemniszkátát megkapjuk, ha φ befutja a $H = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ halmazba eső értékeket.

A kör és a lemniszkáta metszéspontjaihoz tartozó φ értékeknek az $1 = \sqrt{2\cos 2\varphi}$ egyenletből származó $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$ egyenletet kell kielégíteniük. Négy ilyen, a H-ba tartozó φ érték van. $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_3 = \frac{5\pi}{6}$, $\varphi_4 = \frac{7\pi}{6}$. Tehát a (12) képlet és a 4. megjegyzés alapján a keresett T terület:



$$T = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi\,.$$

A szimmetria miatt T-t így is kiszámíthatjuk:

$$T = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\,.$$

T 13.17 A szektor területe, ha a határoló görbe az $x = x(t)$, $y = t(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)|\,dt$$

integrállal számítható ki (feltéve, hogy $\dot{x}$ és $\dot{y}$ létezik).

T 13.18 A szektor területe, ha a szektort határoló görbe egyenlete $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, akkor az előbbi területképlet szerint

$$T = \frac{1}{2}\int_a^b \left|xf'(x) - f(x)\right|\,dx\,.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények és intervallumok által meghatározott görbevonalú trapézok területét.

46.▷ $\dfrac{1}{2x+4}$, $[0,3]$,

47. x^2+x+1, $[2,3]$,

48.• x^3-3, $[1,2]$,

49.▷ $\operatorname{sh}(x-1)$, $[0,2]$,

50. x^3-3, $[3,4]$,

51. $x-\dfrac{x^3}{3}+\sqrt{x}$, $[0,2]$,

52. $\dfrac{1}{1+x^2}$, $[0,1]$,

53. $\dfrac{5}{3x^2}+x$, $[1,3]$,

54.▷ $1-3^{x-2}$, $[0,4]$,

55. $\ln\dfrac{x}{2}$, $[1,e]$,

56. $\sqrt{9-x}$, $[0,8]$,

57. $\sqrt{\dfrac{x^3}{2}}$, $[0,2]$,

58. $\dfrac{10}{\sqrt{x+4}}$, $[0,5]$,

59. $\left(1-x^{1/3}\right)^3$, $[0,1]$,

60.* $1-\left(1-(1-x)^{2/3}\right)^{3/2}$, $\left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]$,

61.▷ $\lg\dfrac{4}{x}$, $[1,6]$,

62. $\cos\dfrac{x}{2}$, $[0,\pi]$,

63. $\operatorname{ch}2x$, $[0,3]$,

64. $5^x e^x-1$, $[-1,1]$.

Ábrázoljuk az alábbi egyenletű görbék által határolt korlátos síkidomokat, és számítsuk ki a területüket:

65.▷ $y=2x^2-1$, $y=0$,

66. $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=x+\dfrac{1}{2}$, $x=0$,

67. $y=x^2$, $y=1-x^2$,

68. $y=\dfrac{4}{3x}$, $y=\dfrac{13}{3}-x$,

69.▷ $y=x^4$, $y=3x^2-2$,

70. $y=\dfrac{8}{x^2+4}$, $y=\dfrac{1}{4}x^2$,

71. $y=x^2$, $y=2x$,

72. $y=x^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=x$,

73. $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{x}{2}$,

74. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x+y=1$,

75.• $y^2=x+3$, $y=\dfrac{1}{2}x$,

76.• $y=x^2$, $y=\dfrac{1}{4}x^2$, $y=4$,

77. $x=y^2$, $x=\dfrac{3}{4}y^2+1$,

78. $y=x^3$, $y=2-x$, $y=0$,

79.▷ $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0$ konstans$)$,

80.▷ $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, $y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, $(b>0$ konstans$)$, 81.▹ Számítsuk ki az $x^2+(y+2)^2=16$ egyenletű kör és az x-tengely által határolt kisebbik körszelet területét,

82.▹ Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $x^2+y^2 \le 4$ körlapból az $x^2+(y-2)^2=4$ körön kívül eső pontok elhagyásával kapunk,

83. $x^{1/3}+y^{1/3}=1,\ x+y=1$,

84. $y=\sin x,\ y=x,\ x=\dfrac{\pi}{2}$,

85. $y=\cos x,\ y=4x^2-\pi^2$,

86. $y=e^x,\ y=e^{\sqrt{x}}$,

87. $y=xe^x,\ y=0,\ x=4$,

88. $y=x\cdot 4^x,\ y=16x$,

89. $y=2^x,\ y=2^{-2x},\ y=4$,

90. $y=4^x,\ y=4^{2-x},\ y=1$,

91. $y=3^x,\ y=5^{1-x}+2,\ x=0$,

92.▹ $y=1-2^{x-3},\ y=\ln\dfrac{x}{3},\ x=6$,

93. $y=\ln\dfrac{x}{2},\ x=2e^2,\ y=0$,

94. $y=\ln\dfrac{x}{2},\ y=\ln\dfrac{2}{x},\ x=4$,

95. $y=\ln x,\ y=2\ln\dfrac{x}{3},\ y=0$,

96. $y=\ln x,\ y=\ln^2 x$,

97.▹ $y=\ln x,\ y=\ln\dfrac{8-x}{3},\ y=0$,

98.▹ $y=\ln^2\dfrac{x}{3},\ y=\ln^2 3$.

Ábrázoljuk az alábbi paraméteresen megadott függvények és a kijelölt paraméter-intervallumok által meghatározott görbevonalú trapézokat, és számítsuk ki ezek területét (a és b pozitív konstansok).

99. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ [0,2\pi]$ (ciklois),

100. $x=t^2,\ y=(1-t)^2,\ [0,1]$,

101. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ [0,2\pi]$, (kör),

102. $x=\dfrac{4}{3}\cos t-\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t,\ [0,2\pi]$ (ellipszis),

103. $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t,\ [0,\frac{\pi}{2}]$ (asztrois),

104. $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ [0,\pi/2]$ (kör evolvense),

105. $x=1-\cos^3 t,\ y=1-\sin^3 t,\ \left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$,

106. $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t),\ [0,\pi/3]$,

107. $x=t+\cos t,\ y=t\sin t,\ [0,\pi]$.

108. $x=at,\ y=a(1-\cos t),\ [0,2\pi]$.

Számítsuk ki az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektor területét (az a, b és φ_1 pozitív konstans):

109. $r=a,\ [0,2\pi]$ (kör),

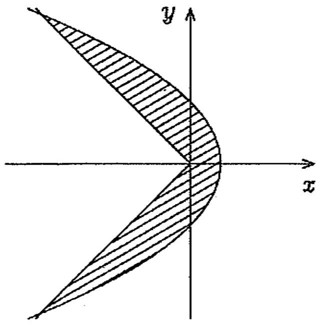
110. $r=a\sqrt{\varphi},\ [0,\varphi_1]$ (parabolikus spirális $r^2=a^2\varphi$),

111. $r=\dfrac{a}{\varphi},\ [1,\varphi_1],\ (\varphi_1>1)$ (hiperbolikus spirális),

112. $r=a\cos 2\varphi,\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ (négyszirmú rózsa),

113. $r=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ (lemniszkáta),

114. $r=a\cos\varphi+b,\ [0,\pi]$,



115.* $r = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$, $[0, 2\pi]$ (ellipszis),

116.ᐅ $r = \dfrac{1}{1 + \cos\varphi}$, $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ (parabola), (lásd **ábra**.)

117. $r = a\varphi$, $[0, 2]$ (archimedeszi spirális),

118. $r = ae^{b\varphi}$, $[0, \varphi_1]$ (logaritmikus spirális),

119. $r^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, $[0, 2\pi]$ (ellipszis),

120. $r = 2a(1 + \cos\varphi)$, $[0, \pi]$ (kardioid).

Számítsuk ki az alábbi, paraméteres egyenletrendszerekkel megadott függvények és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektorok területét.

121. $x = t^2$, $y = (1-t)^2$, $[0, 1]$,

122. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $[0, 2\pi]$ (kör),

123. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0)$, $[0, 2\pi]$ (ciklois),

124. $x = \cos t$, $y = \sin 2t$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

125. $x = \cos 2t$, $y = \cos t$, $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (parabola),

126.ᐅ $x = 1 - \cos^3 t$, $y = 1 - \sin^3 t$, $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$,

127. $x = \dfrac{4}{3}\cos t - \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t$, $[0, 2\pi]$ (ellipszis),

128. $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $[-t_1, t_1]$ $\left(0 \le t_1 < \dfrac{\pi}{4}\right)$ (hiperbola).

Számítsuk ki a derékszögű koordináta-rendszerben $y = f(x)$ alakú egyenlettel megadott görbék és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektorok területét.

129. $y = x^2$, $[1, 2]$,

130. $y = \dfrac{1}{x}$, $\left[\dfrac{1}{a}, a\right]$ $(a > 1)$,

131. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\left[\dfrac{1}{a}, a\right]$ $(a > 1)$,

132. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $\left[\dfrac{1}{a}, a\right]$ $(a > 1)$,

133.ᐅ $y = \left(1 - x^{1/3}\right)^3$, $[0, 1]$,

134. $y = (1 - \sqrt{x})^2$, $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$,

135. $y = \ln x$, $[1, e]$,

136. $y = e^x$, $[1, \ln 4]$.

Ábrázoljuk az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék által határolt síkidomokat, és számítsuk ki a területüket.

137.ᐅ $r = 2\cos\varphi$, $r = \cos\varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$,

138.ᐅ $r = 4\cos\varphi - \dfrac{1}{\cos\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$,

139.ᐅ $r = \operatorname{tg} 2\varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$,

140.ᐅ $r = e^{\varphi}$, $r = \varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$,

141. $r = e^{\varphi}, \quad r = e^{\varphi/2}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi$.

142. Számítsuk ki az $r = 4$ egyenletű kör és az $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$ egyenletű egyenes által határolt kisebbik (jobb oldali) körszelet területét. (Igazoljuk, hogy az előbbi egyenlet valóban egyenes egyenlete.)

143. Számítsuk ki az $r = 4$ egyenletű kör, valamint az $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$ és a $\varphi^2 = (\pi/2)^2$ egyenletű egyenesek által határolt síkrész területét.

144. Számítsuk ki az $r = 4\sin\varphi$ egyenletű körből az $r = 2$ egyenletű körön kívül eső rész területét.

Ívhossz

D 13.19 Legyen $[t_n\,; n \in \mathbb{N}^+]$ a G görbe AB ívébe beírható töröttvonalak olyan sorozata, hogy az n növekedése közben a töröttvonalak oldalainak hosszúsága 0-hoz tart. Ha a t_n-ek hosszúsága minden ilyen sorozat esetén konvergál, akkor ugyanahhoz a számhoz konvergál, és ezt a számot az AB **ív hosszúságának**, az AB ívet pedig **rektifikálhatónak** nevezzük.

T 13.20 Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonosan differenciálható, akkor az $y = f(x)$ egyenletű görbének az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó íve rektifikálható, és az ív hosszúsága:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

T 13.21 Ha egy sima görbe paraméteres egyenletrendszere $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$, akkor ívhosszúsága

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\,.$$

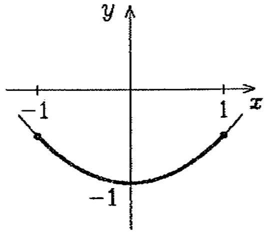
T 13.22 Síkbeli polárkoordináta-rendszerben $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \beta)$ alakú egyenlettel megadott görbeív hosszúsága

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Megjegyzés. Ezek a képletek akkor is érvényesek, ha konvergens improprius integrált jelentenek.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbéknek a megadott intervallumhoz tartozó ívhosszát:



145. $y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$, $[-1, 1]$,

146. $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$, $[0, 2]$,

147. $y = x^{3/2}$, $[0,4]$, **148.** $y = \dfrac{x^2}{2p}$, $[0,a]$, $(p > 0$ konstans$)$,

149. $9ay^2 = x(x-3a)^2$, $[0,a]$, $(a > 0$ konstans$)$,

150. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[0,a]$, $(a > 0$ konstans$)$ (asztrois),

151. $y = \ln x$, $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$, **152.** $y = \ln(1-x^2)$, $[0, 1/2]$,

153. $y = \ln\cos x$, $[0, \pi/6]$, **154.** $y = \ln\dfrac{1}{\sin x}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$,

155. $y = \dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})\right]$, $[1, a+1]$,

156.* $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$, $\left[0, \dfrac{5}{3}a\right]$, $(a > 0$ konstans$)$ (cisszoid).

Számítsuk ki az alábbi, paraméteresen megadott görbeívek hosszát, (az a, t_1 és t_2 pozitív konstansok).

157. $x = t^2$, $y = 2t$, $[0, \sqrt{3}]$, **158.** $x = \dfrac{1}{2}t^2$, $y = \dfrac{4}{3}(1+t)^{3/2}$, $[0,1]$,

159. $x = t^2$, $y = t^3$, $[0, t_1]$, **160.** $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $[0, t_1]$,

161. $x = \cos t$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\sin 2t$, $[0, 2\pi]$,

162. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $[0, 2\pi]$ (ciklois),

163. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $[0, 2\pi]$ (kör evolvense),

164.* $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$, $[0, 2\pi]$,

165.▷ $x = \cos 2t$, $y = \sin t$, $[0, \pi/2]$, **166.** $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $[0, \pi/2]$,

167. $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$, $\left[t_1, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (traktrix),

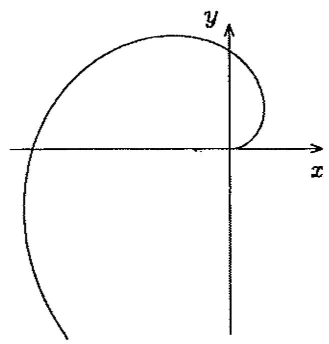
168. $x = 1 + \operatorname{arctg} t$, $y = 1 - \ln\sqrt{1+t^2}$, $[0,1]$,

169. $x = \ln\cos 2t$, $y = 2t$, $[0, \pi/6]$, **170.** $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, $[0, t_1]$,

171. $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} t$, $y = 2\sqrt{2}\operatorname{sh}\dfrac{t}{2}$, $[0, \ln a]$, **172.** $x = \operatorname{arch} t$, $y = \operatorname{arsh} t$, $[t_1, t_2]$,

173. $x = t - \operatorname{sh} t\operatorname{ch} t$, $y = 2\operatorname{ch} t$, $[0, t_1]$.

Számítsuk ki az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbeívek hosszát (az a, p és φ_1 pozitív konstans):



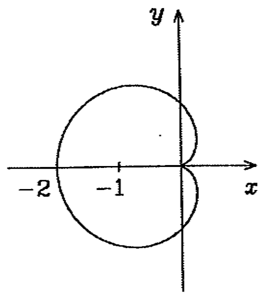
174. $r = a$, $0 \le t < 2\pi$; (kör),

175. $r = a\varphi$, $\varphi \in [0, \varphi_1]$ (archimedeszi spirális), (1. **ábra**),

176. $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\varphi \in [1, \varphi_1]$ (hiperbolikus spirális),

177. $r = \dfrac{2a}{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ (egyenes),

178. $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ (egyenes),



179. $r = 1 - \cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (kardioid), (l. ábra),

180. $r = \dfrac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (parabola),

181. $r = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}$, $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (parabola),

182. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}$, $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (parabola),

183. $r = 2a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_1]$ (kardioid),

184. $r = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$, $[0, 3\pi]$, **185.** $r = a \operatorname{th} \dfrac{\varphi}{2}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

186. $r = a\dfrac{e^{\varphi} - 1}{e^{\varphi} + 1}$, $\varphi \in [0, \varphi_1]$, **187.** $r = 1 - \varphi^2$, $\varphi \in [-1, 1]$.

188. $r = e^{a\varphi}$, $\varphi \in [0, \varphi_1]$ (φ_1 konstans), (logaritmikus spirális: $\ln r = a\varphi$),

Térfogat

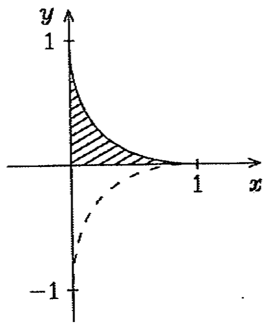
D 13.23 Legyen f az (a, b) intervallumon értelmezett valós értékű függvény (az $a = -\infty$ és $b = \infty$ esetet is megengedve). A f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület, valamint (véges a és b esetén) az $x = a$ és $x = b$ egyenletű sík által határolt **forgástest térfogatán** a

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

P 13.24 Számítsuk ki a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ egyenletű görbe x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, és a görbe legkisebb abcisszájú pontjában az x tengelyre merőlegesen állított sík által határolt test térfogatát. Először megkeressük az integrálás határait. A $\sqrt{x}$ értelmezési tartománya miatt $0 \le x$. A $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}$ miatt $\sqrt{x} \le 1$, tehát $x \le 1$, lásd az ábrát. A V térfogat:

$$V = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^4\, dx = \frac{\pi}{15}.$$



Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, valamint a megadott intervallumok végpontjaiban az x tengelyre merőlegesen állított síkok által határolt forgástestek térfogatát.

189. $y = x - \dfrac{1}{x}$, $[1, 3]$, **190.** $y = \sqrt{1 + x^2}$, $[0, 3]$, **191.** $y = \cos^2 x$, $[0, \pi]$,

192. $y = \operatorname{ch} x$, $[-1,1]$, **193.** $y = e^{-x}$, $[0,\infty)$, **194.** $y = \ln x$, $[1,3]$,
195. $y = xe^{x}$, $(-\infty, 0]$,
196. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $[-a,a]$, (gömbtérfogat).

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező zárt forgásfelületek térfogatát.

197. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, (gömbtérfogat), **198.** $y = 1 - x^2$,
199. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$,
200. $y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $a > 0$, $b > 0$ (forgási ellipszoid).

Felszín

D 13.25 Legyen f az (a,b) intervallumon értelmezett valós értékű függvény (az $a = -\infty$ és $b = \infty$ esetet is megengedve). Az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával előálló **forgásfelület felszínén** a

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

T 13.26 Ha egy sima görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ alakú paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az x tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület felszíne

$$s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\,.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbeívek x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét.

201. $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, **202.**$^\triangleright$ $y = \sin x$, $x \in [0,\pi]$,
203.$^\triangleright$ $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [0,\pi/4]$,
204. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x \in [-a,a]$ (katenoid, láncfelület),
205.$^\triangleright$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \in [0,a]$, ($a > 0$ konstans).

Számítsuk ki az alábbi görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező zárt forgásfelületek felszínét.

206. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, (gömbfelszín),
207.$^\triangleright$ $y = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$, ($a > 0$ konstans) (ellipszoid),
208.$^\triangleright$ $y = \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} x$, **209.**$^\triangleright$ $y = 1 - x^2$.

Számítsuk ki az alábbi, paraméteresen adott görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét ($a > 0$ konstans).

210. $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad t \in [0, \pi]$, (gömbfelszín),

211.$^{\triangleright}$ $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

212.$^{\triangleright}$ $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$, (ciklois),

213.$^{\triangleright}$ $x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in [0, \pi]$,

214.$^{\triangleright}$ $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tömegközéppont

D 13.27 Az f függvény és az (a, b) intervallum által meghatározott görbevonalú trapéz $P(x_s, y_s)$ **tömegkközéppontjának koordinátái** az

$$x_s = \frac{M_y(a,b)}{T(a,b)}, \quad y_s = \frac{M_x(a,b)}{T(a,b)}$$

képletekkel számolt értékek, ahol
$T(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx$ (a görbevonalú trapéz területe),
$M_y(a,b) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$, $M_y(a,b) = \int_a^b f^2(x)\,dx$ **(statikai nyomatékok)**.

T 13.28 Ha egy görbe sima és paraméteres alakban van megadva ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$), akkor a görbéhez és az $(x(t_1), x(t_2))$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz tömegközéppontjának koordinátáit is $x_s = M_y/T$, $y_s = M_x/T$ határozza meg, ahol

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt\,, \quad M_x = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{x}(t)\,dt\,, \quad M_y = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt\,.$$

T 13.29 Síkbeli polárkoordináta-rendszerben $r = r(\varphi)$, ($\alpha \le \varphi \le \beta$) alakú egyenlettel megadott görbe és a polártengely közé eső görbevonalú trapéz tömegközéppontjának koordinátái: $x_s = M_y/T$, $y_s = M_x/T$,ahol az $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$ és $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$ függvényekre vonatkozóan

$$T = \int_\alpha^\beta y(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi\,, \quad M_x = \int_\alpha^\beta x(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi\,, \quad M_y = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Feladatok

Ábrázoljuk az alábbi egyenletű görbék és egyenesek által határolt síkidomot, és határozzuk meg tömegközéppontjának koordinátáit.

215. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1$,

216. $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$,

217. $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$,

218. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, ($a > 0$ konstans), $y = 0$,

219. $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, ($a$ és b pozitív konstansok), $y = 0$.

Határozzuk meg az alábbi, paraméteresen megadott görbék és az x tengely által határolt síkidomok tömegközéppontjának koordinátáit (a és b pozitív konstansok).

220. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ (0 \le t \le \pi)$,

221. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ (0 \le t \le \pi)$,

222. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ (0 \le t \le 2\pi)$,

223. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Határozzuk meg az alábbi, polárkoordinátás egyenletű görbék által határolt szektorok tömegközéppontjának koordinátáit abban a derékszögű koordináta–rendszerben, amelynek origója a pólussal, pozitív x féltengelye pedig a polártengellyel esik egybe (az a pozitív konstans).

224. $r = a,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

225. $r = a\varphi,\ \varphi \in [0, \pi]$,

226. $r = 2a(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in [0, \pi]$,

227. $r = ae^{\varphi},\ \varphi \in [0, \pi]$.

Határozott integrál kiszámítása közelítő módszerekkel

T 13.30 Legyen f az $[a, b]$ intervallumon értelmezett és integrálható valós függvény. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ pontokkal n egyenlő részre. Legyen

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{és} \quad t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Minden egyes $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2 \cdots, n)$ részintervallumon az $y = f(x)$ egyenletű görbének a $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és $P_i(x_i, f(x_i))$ pontját összekötő íve helyett az $y = f(t_i)$ egyenletű szakaszt véve (**téglalapmódszer**)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i);$$

a pontos érték és a közelítő érték közötti D_n eltérésre

$$D_n \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\sup\{|f''|\}\ ; x \in [a, b]\},$$

ha f az $[a, b]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható.

Ha pedig az előbbi beosztás után minden egyes $P_{i-1}P_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ív helyett a $P_{i-1}P_i$ húrt vesszük (**trapézmódszer**), akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

és

$$D_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup\{|f''|\}\ ; x \in [a, b]\},$$

ha f az $[a,b]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható.

A **parabola** vagy **Simpson módszernél** az intervallumot páros számú $(2n)$ részre osztjuk, és az $y=f(x)$ grafikonjának az x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i} $(i=1,2,\cdots,n)$ abcisszájú pontjain átmenő görbeívét az ugyanezen a pontokon átmenő parabolaívekkel (vagy, ha ezek a pontok kollineárisak, akkor összekötő szakaszukkal) helyettesítjük. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right]$$

és

$$D_{2n} \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\sup\{|f^{(4)}|\}\ ; x\in[a,b]\},$$

ha az f az $[a,b]$ intervallumon négyszer folytonosan differenciálható.

Feladatok

Számítsuk ki közelítőleg az alábbi integrálokat téglalap-, trapéz-, ill. parabolamódszerrel (az intervallumokat a zárójelben feltüntetett számú részre osztva). Amennyiben a függvény valamelyik integrálási határán nincs értelmezve, tekintsük függvényértéknek az ott felvett határértékét. Amely feladatokban trigonometrikus függvény fordul elő, ott a határok radiánban értendők, és ezért radiánban kell számolni.

228.[k] $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$, (4),

229.[k] $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$, (4),

230.[k] $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\,dx$, (4),

231.[k] $\displaystyle\int_0^8 \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}\,dx$, (6),

232.[k] $\displaystyle\int_0^{10} \sqrt[3]{125-x^2}\,dx$, (6),

233.[k] $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$, (10),

234.[k] $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, (10),

235.[k] $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$, (6),

236.[k] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\,dx$, (10),

237.[k] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx$, (10),

238.[k] $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$, (10),

239.[k] $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$, (4),

240.[k] $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx$, (6),

241.[k] $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1+x)}\,dx$, (6),

242.[k] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$, (8),

243.[k] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx$, (6),

244.[k] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, (12).

1. Bevezetés (megoldások)

1. A szorzás elvégzésével adódik az állítás.

4. $0 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$. Ebből: $3abc = a^3+b^3+c^3+3ab(a+b+c)+3ac(a+b+c)+3bc(a+b+c) = a^3+b^3+c^3$.

5. Ha $x \geq 0$, akkor $x = x+1$, ami lehetetlen. Ha $x < 0$, akkor $-x = x+1$, azaz $x = -\frac{1}{2}$.

6. $x_1 = -1; x_2 = 3$.

7. $x = \frac{3k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$.

8. Nincs megoldás.

9. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$.

10. $|a| = a$ pontosan akkor, ha $a \geq 0$, ezért az $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. A megoldások: $x \geq 0, \quad x < -1$.

11. Az egyenlet átírható a bal oldal átalakításával a következőképpen:

$$|(x^2+4x+9)+(2x-3)| = |x^2+4x+9| + |2x-3|.$$

Tetszőleges a, b valós számokra $|a+b| = |a| + |b|$ akkor és csak akkor, ha a és b egyenlő előjelűek. Mivel $x^2+4x+9 = (x+2)^2+5 > 0$, ezért szükségképpen $2x-3 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{3}{2}$.

12. $|a-b| = |a| - |b|$ pontosan akkor, ha $|a| \geq |b|$ és b előjele megegyezik a előjelével. Ezért: $x^4 - 4 \geq x^2 + 2$, amiből kapjuk, hogy : $x^2 - 2 \geq 1$, azaz $|x| \geq \sqrt{3}$.

13. Az egyenletnek csak pozitív x-ekre van értelme a valós számok körében. Az $x = 1$ megoldása az egyenletnek. Ha $x \neq 1$, akkor az egyenletből $2\sqrt{x} = x$, amiből $x = 4$ következik.

14. $-\frac{5}{3} < x < \frac{7}{4}$.

15. $x < 3, \quad x \geq 6$.

16. Nincs megoldás.

17. $x \neq -\frac{1}{2}$.

18. $|3x-7| < 1$ pontosan akkor, ha $-1 < 3x-7 < 1$, azaz ha $2 < x < \frac{8}{3}$.

19. Ha $x \leq -6$, akkor $-x \leq -x-6$, ami lehetetlen. Ha $-6 < x \leq 0$, akkor $-x \leq x+6$, azaz $-3 \leq x$. Ha $0 < x$, akkor $x \leq x+6$, ami minden ilyen számra igaz. Tehát minden $x \geq -3$ szám megoldása az egyenlőtlenségnek.

20. $-6 \leq x \leq 6$.

21. $\frac{3}{5} < x < 1$.

22. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

23. $-1 < x < 0$.

24. $\dfrac{x^2+2x+21}{(x-4)(x+1)} < 0; x^2+2x+21 > 0$, ezért $(x-4)(x+1) < 0$, ahonnan $-1 < x < 4$.

25. $x^2+2x-3 > 0$, ha $x < -3$ vagy $x > 1$. Ekkor a feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens az $x^2+3x-10 \leq 0$ egyenlőtlenséggel. Mivel az $x^2+3x-10$ kifejezés zérushelyei -5 és 2, ezért ez akkor igaz, ha $-5 \leq x \leq 2$. Ebben az esetben tehát a megoldások: $-5 \le x \le -3$, $1 < x \le 2$. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy ha $-3 < x < 1$, akkor nincs megoldás.

26. $x < -\sqrt{5}$, $x > \sqrt{5}$.

27. $0 \le x < \frac{5-2\sqrt{5}}{10}$, $\frac{5+2\sqrt{5}}{10} < x \le 1$.

28. $3 < x < 4$.

29. $x < 0$, $0 < x < 5$.

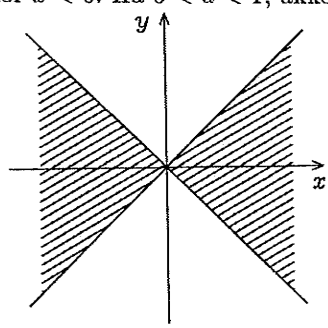
30. $3 - 2x - x^2 \ge 0$ pontosan akkor, ha $-3 \le x \le 1$. Ha $x \le -2$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldala nem pozitív, tehát az egyenlőtlenség a $-3 \le x \le -2$ intervallumban teljesül. Ha $x > -2$, akkor a jobb oldal pozitív. Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy $2x^2 + 6x + 1 \le 0$. Az utóbbi egyenlőtlenség megoldásai: $\frac{-3-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$. Az $x > -2$ feltételt figyelembe véve $-2 < x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$. Az eredményeket összesítve, a megoldások: $-3 \le x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$.

31. $0 \le x < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

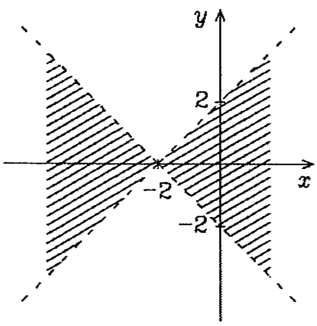
32. Az egyenlőtlenségrendszer ekvivalens a $2 < |2x+3| < 3$ egyenlőtlenségrendszerrel. Ha $x \ge -\frac{3}{2}$, akkor $2 < 2x + 3 < 3$, azaz $-\frac{1}{2} < x < 0$. Ha $x < -\frac{3}{2}$, akkor $2 < -2x - 3 < 3$, amiből $-\frac{5}{2} > x > -3$.

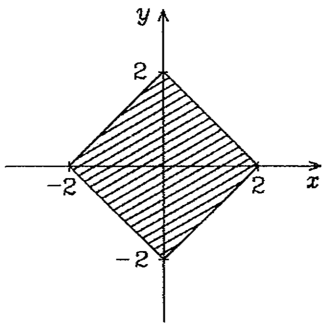
33. Ha $a < 0$, akkor $\frac{a+1}{a} < x < \frac{2a}{a-1}$. Ha $a = 0$, akkor $x < 0$. Ha $0 < a < 1$, akkor $x < \frac{2a}{a-1}$. Ha $a \ge 1$, akkor nincs megoldás.

34. Ha $x, y \ge 0$, akkor $y \le x$, azaz az első síknegyedben az x tengely és az $y = x$ egyenletű egyenes közötti szögtartomány. Ha $x \le 0$, $y \ge 0$, akkor $y \le -x$, azaz a második síknegyedben az x tengely és az $y = -x$ egyenletű egyenes közötti szögtartomány. A harmadik és a negyedik síknegyed pontjaira is megvizsgálva az egyenlőtlenséget, megoldásként az ábrán látható halmazt kapjuk.



35. Az alábbi bal oldali ábrán látható a megoldás. Az $y = x + 2$ és az $y = -x - 2$ egyenletű egyenesek pontjai nem tartoznak a megoldáshalmazhoz.





36. A jobb oldali ábrán látható a megoldás.

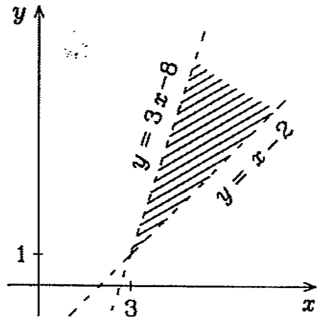
37. A $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ pontokat összekötő négyzet határvonala.

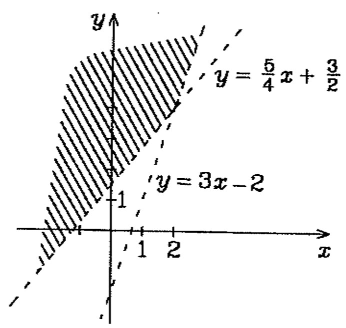
38. Az első síknegyedben az $y = x - 1$, a második síknegyedben az $y = -x - 1$, a harmadik síknegyedben az $y = x + 1$, a negyedik síknegyedben az $y = -x + 1$ egyenletű egyenes.

39. Nem lehet x és y különböző előjelű, így a halmazba a sík első és harmadik negyedének pontjai és a koordináta-tengelyek pontjai tartoznak.

40. Az x-tengely és az $y = x$ egyenletű egyenes közötti 45^o-os szögtartomány pontjai a határoló egyenesekkel.

41. Az egyenlőtlenségeket y-ra megoldva: $y > x - 2$, $y < 3x - 8$, azaz $x - 2 < y < 3x - 8$. A bevonalazott szögtartomány belső pontjainak koordinátái a egyenlőtlenségrendszer megoldásai. (bal oldali ábra)

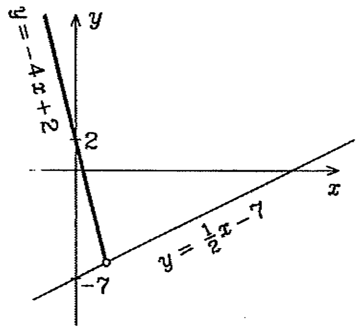




42. $y > 3x - 2$, $y > \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$. Mivel $3x - 2 \geq \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, ha $x \geq 2$ és $3x - 2 < \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, ha $x < 2$, ezért az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $y > 3x - 2$, ha $x \geq 2$; $y > \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, ha $x < 2$. (jobb oldali ábra)

43. $y > x + \frac{10}{3}$.

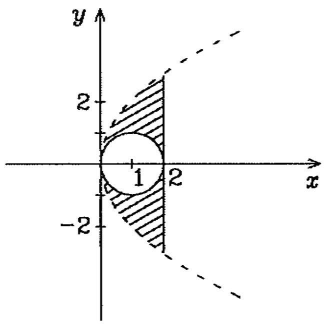
44. Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenesnek az $\frac{x}{2} - 7 < y$ félsíkba eső része.

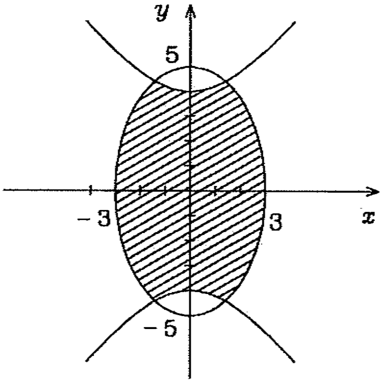


45. $\frac{x+7}{5} < y < \frac{x+4}{2}$, ha $-2 < x \leq 3$ és $x - 1 < y < \frac{x+4}{2}$, ha $3 \leq x < 6$, azaz az $y = \frac{x+7}{5}$, az $y = \frac{x+4}{2}$ és az $y = x - 1$ egyenletű egyenesek által meghatározott háromszög belső pontjai adják a megoldáshalmazt.

46. $y = \frac{3}{7}x + \frac{13}{7}$, ahol $-2 < x < 5$.

47. Az $y^2 - 4x < 0$ egyenlőtlenséget az $y^2 = 4x$ egyenletű parabola belső pontjainak koordinátái elégítik ki, az $x^2 + y^2 - 2x \le 0$ egyenlőtlenséget pedig az $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ körlap pontjainak koordinátái. Az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát a bal oldali ábra bevonalazott része mutatja (a szaggatott vonal pontjai nem tartoznak a halmazhoz).





48. Az első egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ellipszis belső és határpontjainak halmaza. A második egyenlőtlenséget pedig az $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ hiperbola határ- és külső pontjainak koordinátái elégítik ki. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása a fenti jobb oldali ábrán látható.

49. 1.megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x \ge y \ge 0$ vagy $x > 0 > y$ vagy $0 \ge x \ge y$. Ha $x \ge y \ge 0$, akkor $|x|+|y| = x+y = |x+y|$. Ha $x > 0 > y$, akkor $|x| + |y| = x - y > -y = |y| > |x + y|$. Ha $0 \ge x \ge y$, akkor $|x| + |y| = -x - y = -(x + y) = |x + y|$. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha x és y előjele megegyezik.
2.megoldás: Felhasználjuk, hogy nem negatív a és b számokra $a \le b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a^2 \le b^2$. Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát. Azonos átalakítások után az $xy \le |x||y|$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely nyilvánvalóan igaz. Ebből az is leolvasható, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x és y előjele megegyezik.

50. Ha $ab \ge 0$, akkor $a^2+b^2-2|ab| = (a-b)^2 \ge 0$. Ha $ab < 0$, akkor $a^2+b^2-2|ab| = (a+b)^2 \ge 0$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $|a| = |b|$.

51. Az $|x+y| \le |x|+|y|$ felhasználásával kapjuk, hogy $|a| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b|$ és $|b| = |(b-a)+a| \le |b-a|+|a| = |a-b|+|a|$, amelyekből: $|a-b| \ge |a|-|b|$ és $|a-b| \ge |b|-|a|$, azaz $|a-b| \ge ||a|-|b||$.

52. Felhasználva az előző feladatot is:
$$\frac{1}{|a-b|} \le \frac{1}{||a|-|b||} = \frac{1}{|a|-|b|} < \frac{1}{|a|-\frac{|a|}{2}} = \frac{2}{|a|}.$$

53. $a + \frac{1}{a} \ge 2$ pontosan akkor, ha $a^2 + 1 \ge 2a$, azaz ha $(a-1)^2 \ge 0$. Az utolsó egyenlőtlenségből látható, hogy az egyenlőség csak az $a = 1$ esetben teljesül.

54. Az előző feladat és az $\dfrac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ átalakítás alapján adódik az állítás. Az egyenlőség csak az $x = 0$ esetben érvényes.

55. Az **53.** feladat alapján. Az egyenlőség csak az $x = \pm 1$ esetekben teljesül.

56. A $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$ és a $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ egyenlőtlenségeket külön-külön vizsgálva, mindkét oldal négyzetreemelésével adódik az állítás.Az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha $a = b$.

57. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor nyilvávalóan igaz az állítás. Legyen $a > 0$ és $b > 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a \ge b$. Ez azt jelenti, hogy $0 < \frac{a}{b} \le 1$. Mivel $\alpha > \beta$, ezért $0 < \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} < \left(\frac{a}{b}\right)^{\beta}$. Mivel $0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$, ezért: $\left(\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{b^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{a^{\beta}+b^{\beta}}{b^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, amiből $b > 0$ miatt adódik az állítás. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = 0$ vagy $b = 0$.

58. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet asszociatív, de nem kommutatív.

59. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet asszociatív és kommutatív.

60. A halmaz nem zárt a műveletre nézve.

61. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet az egész számok halmazán kommutatív és asszociatív, ezért bármely részhalmazán is, így a páros számok halmazán is az.

62. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet kommutatív és asszociatív.

63. A halmaz zárt a műveletre nézve. $x \circ y = x + 2y$, $y \circ x = y + 2x$, $(x \circ y) \circ z = (x + 2y) \circ z = x + 2y + 2z$ és $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + 2z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z$ $(x, y, z \in \mathbf{R})$, ezért a művelet nem kommutatív és nem asszociatív.

64. A halmaz zárt a műveletre nézve. Ha $c \neq 0$, akkor az $a = b = 1$ esetben, ha pedig $c = 0$, akkor az $a, b \in \{0, 1\}$ esetekben a művelet kommutatív és asszociatív, minden más esetben nem kommutatív és nem asszociatív.

65. A halmaz zárt a műveletekre nézve. Mindkét művelet asszociatív, kommutatív és a szorzás az összeadásra nézve disztributív. Az összeadás a szorzásra nézve nem disztributív.

66. A halmaz zárt az összeadásra, de nem zárt a szorzásra nézve. Az összeadás kommutatív és asszociatív.

67. A halmaz zárt a műveletekre nézve. Mindkét művelet asszociatív, kommutatív és a $\circ$ művelet a $\star$ műveletre nézve disztributív. A $\star$ művelet a $\circ$ műveletre nézve nem disztributív.

68. $\sum_{k=0}^{5}(2k+1) = 1+3+5+7+9+11 = 36$.

69. $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -35$.

70. -6. **71.** 0 **72.** 14π

73. $\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\pi + 3\sin\frac{3\pi}{2} + 4\sin 2\pi = -2$

74. $\sum_{k=0}^{4} 2^k$. **75.** $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k\frac{1}{k}$. **76.** $\sum_{k+4}^{n}(k^2-1)$.

77. $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. **78.** $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$. **79.** $\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a^{5-k} b^k$.

80. Az összeadás kommutativitása és asszociativitása miatt igaz.

81. Igaz. 82. Nem igaz. 83. Igaz.

84. $4\left((\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\right)$.

85. Tekintsük az előző feladatbeli másodfokú függvényt. Egy másodfokú függvény akkor és csak akkor nagyobb vagy egyenlő 0-nál minden x-re, ha a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem pozitív, amiből már adódik az egyenlőtlenség. Ebből az is látható, hogy $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$ esetben egyenlőség pontosan akkor van, ha létezik olyan $x_0 \in \mathbf{R}$, hogy minden k-ra $a_k x_0 + b_k = 0$. Az egyenlőség akkor is igaz, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

86. A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből következik.

87. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget.

88. -3. 89. $(n-m+1)c$. 90. $1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$.

91. $-\frac{399}{400}$. 92. $a_1 - a_{n+1}$. 93. $1 - \frac{1}{n+1}$.

94. Felhasználva a $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$ azonosságot, ha $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$, akkor $S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x\right) = \cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x$, Ebből, ha $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, akkor $S_n(x) = \dfrac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$. Ha $\sin \frac{x}{2} = 0$, akkor $S_n(x) = 0$.

95. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = n$.

96. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} = \sum_{k=1} nk = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

97. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \sum_{k=1}^{n} \left(nk - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = 0$.

98. $9 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = 209$. 99. $(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

100. $\dfrac{n}{(2n+2)(2n+3)}$. 101. $\dfrac{(n+k+1)(n+k+2)\ldots(2n+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}$.

102. Ha $k|m$ és $k|(m+n)$, akkor van olyan $r, t \in \mathbf{Z}$, hogy $m = rk$ és $m + n = tk$, ezért $n = (t-r)k$. Mivel $t - r \in \mathbf{Z}$, így $k|n$. Hasonlóan látható be az állítás megfordítása is.

103. $n = 1$ esetben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az n pozitív egész számra igaz az állítás, azaz $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ebből bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz $1 + n + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden n pozitív egész számra igaz az állítás, azaz $n_0 = 1$.

104. Az állítás az $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ azonosság alapján igazolható, $n_0 = 1$.

107. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz az állítás. Ekkor $(n+1)$-re:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 = -(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (-1)^n \frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

115. $n = 1$ esetben a két oldal egyenlő, $n = 2$ ese ›en érvényes az egyenlőtlenség: $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ pontosan akkor, ha $3\sqrt{7} < 8$, azaz ha $63 < 64$, ami igaz. Tegyük fel, hogy n-re érvényes az egyenlőtlenség. Ekkor beszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{2n+1}{2n+2}$-vel, kapjuk hogy

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2};$$

Az $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ egyenlőtlenség mindkét oldal négyzetreemelésével igazolható, ez pedig bizonyítja az állítás helyességét $(n+1)$-re.

116. $n = 2$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz. Ekkor:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$$

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} >$$

$$\frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}.$$

117. $n = 2$-re igaz az állítás: $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$, mivel $2 < \sqrt{2} + 1 < 4$. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor: $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$.

118. $n = 2$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n-re is igaz. Akkor $(n+1)$-re:

$$\frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} <$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} <$$

$$n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} <$$

$$n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = n + 2^n\frac{1}{2^n} = n+1.$$

119. $n_0 = 4$. A $3^n > 2^n + 7n$ indukciós feltevés alapján: $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(2^n + 7n)$. Ebből a $3 \cdot 2^n + 3 \cdot 7n = (2+1)2^n + (2+1)7n = 2^{n+1} + 7n + 2^n + 2 \cdot 7n > 2^{n+1} + 7n + 7 = 2^{n+1} + 7(n+1)$ alapján adódik az állítás.

120. Teljes indukcióval, felhasználva, hogy

$$\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2(2n+1)}{n+1} < 4^{n-1}4 = 4^n,$$

azt kapjuk, hogy $n > 1$ esetén az állítás igaz.

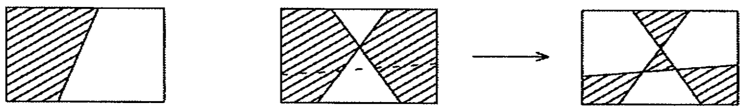
121. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Akkor ebből $(n+1)$-re:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2+2\cos 2\frac{\pi}{2^{n+2}}} =$$

$$\sqrt{2+2(2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}-1)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

122. $\frac{10^{n+2}-9(n+1)-10}{27} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27} + \frac{10^{n+1}-1}{3}$ segítségével teljes indukcióval bizonyítható az állítás, felhasználva, hogy $\frac{10^{n+1}-1}{3} = 33\ldots3$, ahol a jobb oldalon $n+1$ darab 3-as szerepel. (Ez szintén bizonyítható teljes indukcióval.)

123. Az egyenesek számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz. Tekintsünk egy $n+1$ egyenessel származtatott térképet. Hagyjuk el az egyik egyenest. A maradék n egyenessel származtatott térkép az indukciós feltevés szerint színezhető két színnel. Húzzuk vissza az $(n+1)$-edik egyenest, majd ennek egyik oldalán változtassuk meg minden rész színét a másikra. Így nyilván jó színezést kapunk.



124. Tekintsük az egyenes utakat tartalmazó térképet, és az utakkal felszabdalt tartományt színezzük két színnel, például fehérrel és feketével, az előző feladat szerint. Ezek után minden útkereszteződést úgy építsünk meg, hogy ha az úton haladva jobb kézre fehér tartomány esik, akkor az útkereszteződésbe érve ez az út essen felülre (lásd a feladat mellett közölt ábrát). Könnyen látható, hogy akkor minden útkereszteződésben egyértelműen definiálva van az, hogy melyik út megy felül és melyik alul, valamint az, hogy minden úton felváltva vannak alul- ill. felüljárók.

125. Az egyenlőtlenség teljes indukcióval egyszerűen megmutatható. $n = 1$-re nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy ha $1 \le k \le n$, akkor $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$; ezért $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \le |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$. Az egyenlőséget $n = 2$ esetben a **49.** feladatban már megvizsgáltuk. A bizonyítás szintén teljes indukcióval fejezhető be. Tegyük fel, hogy minden $2 \le k \le n$ esetben $|a_1+a_2+\cdots+a_k| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|$ akkor és csak akkor, ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egyenlő előjelűek. Ebből következik, hogy $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| = |a_1+a_2+\cdots+a_n|+|a_{n+1}|$ akkor és csak akkor, ha $a_1+a_2+\cdots+a_n$ és a_{n+1} egyenlő előjelűek, továbbá $|a_1+a_2+\cdots+a_n|+|a_{n+1}| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+|a_{n+1}|$, akkor és csak akkor, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egyenlő előjelűek. Ebben az esetben viszont előjelük egyenlő $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ előjelével, azaz a_{n+1} előjelével.

126. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 2$ esetre a **49.** feladat szerint igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az llítás igaz valamely n-re, és legyen $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbf{R}^+$ valós számokra $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} = 1$. Ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1} (= 1)$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}$ között találhatók különböző számok, akkor van közöttük 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x_1 < 1$ és $x_{n+1} > 1$. Így az indukciós feltevést is felhasználva: $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = (x_1 x_{n+1} + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 \geq n + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 = n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 = n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) > n + 1$.

127. Az előző feladat alapján adódik az állítás.

128. Legyen $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a$, akkor $1 = \frac{x_1}{a}\frac{x_2}{a} \dots \frac{x_n}{a}$. A **126.** feladat szerint $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \dots + \frac{x_n}{a} \geq n$, amiből már megkapjuk az állítást.

129. Az előző feladat alapján.

130. Az **1.128** feladat alapján.

131. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re $8 | 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Ekkor $(n+1)$-re: $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 3^{n-1} + 1 = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 + 4(5^n + 3^{n-1})$. Mivel $5^n + 3^{n-1}$ páros szám, ezért $8 | 4(5^n + 3^{n-1})$. Az indukciós feltevést is felhasználva adódik az állítás.

132. Használjuk az $(n+1)(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) = (n+1)(2n^2 + n) = n(2n^2 - 3n + 1) + 6n^2$ átalakítást.

133. $11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}$

134. $n = 2$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy minden $2 \leq k \leq n$ esetén igaz az állítás. Ha $n + 1$ prímszám, akkor $(n+1)$-re is igaz az állítás. Ha $n + 1$ összetett szám, akkor van olyan $p \leq n$ prímszám, hogy $pj = n + 1 \quad (j \in \mathbf{N}^+, j > 1)$. Az indukciós feltevést alkalmazzuk a bizonyítás befejezéséhez.

135. Nem ellenőriztük, hogy van-e olyan n_0 érték, amelyre az állítás igaz.

136. A tulajdonság öröklődésének bizonyítása korrekt minden $n > 2$ egészre, de éppen $n = 2$ esetén, azaz 2-ről 3-ra nem igaz. Elhagyva ugyanis bármely 2 pont valamelyikét, és a maradék ponthoz hozzávéve egy további pontot, ez a 2 pont is meghatároz egy egyenest, vagyis ez esetben nem jutunk ellentmondásra.

2. Halmazelmélet (megoldások)

1. A pozitív háromjegyű páros számok halmaza.
2. Az olyan, 3-mal osztható egész számok halmaza, amelyek (-100)-nál nagyobbak és 100-nál kisebbek.
3. Az olyan pozitív egész számok halmaza, amelyeknek 3-mal való osztási maradéka 1.
4. $\{-1\}$.
5. $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
6. Az üres halmaz, mert az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek nincs gyöke az egész számok halmazában. (**D 2.1**)
7. Az üres halmaz, mert az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs gyöke a valós számok halmazában. (**D 2.1**)
8. Az x bármilyen valós szám lehet.
9. A pozitív valós számok halmaza.
10. $\emptyset$ (**D 2.1**).
11. Az $O(0,0)$ középpontú, $r = 1$ sugarú körvonal.
12. Az $O(0,0)$ középpontú, $r = 1$ sugarú körlap a határoló körvonallal együtt.
13. Az egész xy koordinátasík.
14. Az $O(0,0)$, $A(1,1)$ és $B(-1,1)$ pontok által meghatározott háromszög (lap), melyből elhagyjuk az OA és OB szakaszok pontjait.
15. Az $O(1,2)$ középpontú, $r = 3$ sugarú körvonal.
16. Az $O(0,0)$ középpontú, $r = 2$ sugarú körvonalnak az a része, amely az x tengely fölött és az x tengelyen van.
17. Mivel a $3x + 4y = 22$ egyenletű egyenes az $x = 6$ (illetve az $y = 4$) egyenletű egyenest az $y = 1$ ordinátájú (illetve az $x = 2$ abszcisszájú) pontban metszi, ezért a megadott halmaz annak az ötszögnek a belső és határoló pontjaiból áll, melynek csúcsai: $(0,0)$, $(6,0)$, $(6,1)$, $(2,4)$, $(0,4)$.
18. Annak a trapéznak belső és határoló pontjai, melynek csúcsai: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$, $(0,2)$.
19. Az x tengely $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}, \cdots$ abszcisszájú pontjai.
20. Belátható, hogy $y_n = x_n^2$. Ebből következik, hogy ez a halmaz az $y = x^2$ parabola következő pontjaiból áll: $P_1(1,1)$, $P_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2})$, $\cdots$, $P_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, $\cdots$.
21. Az $x = t^2$ és $y = 3t^2$ feltételek miatt x és y nem lehet negatív. Helyettesítés után kapjuk, hogy $y = 3x$. Ezért a megadott halmaz az $y = 3x$ egyenletű egyenesnek az a része, mely az első síknegyedben halad.
22. Az $y = 3x$ egyenletű egyenesnek az a szakasza (a végpontokkal együtt), melynek végpontjai: $A(-1,-3)$, $B(8,24)$.
23. Az $O(0,0)$ középpontú, $r = 1$ sugarú körvonal.

24. a) $M \cap F$. b) $A \cap N$. c) $A \cup N$. d) $(A \cup N) \cap F$.
e) E mondat — a szövegkörnyezettől függően — kétféleképpen is értelmezhető: egyik értelme azonos a c)-belivel, a másik szerint azokról van szó, akik „vagy angolul, vagy németül tudnak, de nem mind a két nyelven", ekkor a halmaz: $A \ominus N$.
f) $M - F$, vagy $M \cap \overline{F}_H$, ahol H az első évfolyamosok halmaza, vagy egyszerűen csak $M \cap \overline{F}$ (l. **T 2.8**).
g) Az f) feladathoz hasonlóan: $N - F = N \cap \overline{F}$.
h) Ide azok tartoznak, akik „nem tudnak németül és második tankörösök és nem fiúk", azaz a halmaz $\overline{N} \cap M \cap \overline{F}$ (l. **T 2.6** asszociativitás). Másik megoldás f) és g) alapján: a második tankörös lányok közül elhagyjuk a németül tudó lányokat, így az $(M - F) - (N - F)$ halmazt kapjuk. (**T 2.8** segítségével bizonyítható, hogy e két halmaz azonos.)

25. a) $M \subset N$ akkor és csak akkor teljesül, ha n osztója m-nek, de $n \neq m$.
b) $M \subseteq N$ akkor és csak akkor, ha n osztója m-nek.
c) $M \cap N = \{t, 2t, 3t, \ldots\}$, ahol t az m és n legkisebb közös többszöröse. Ennek bizonyításához használjuk fel az m, az n és a legkisebb közös többszörösük törzstényezős alakját. A két halmaz uniója az olyan pozitív egész számok halmaza, amelyek m-mel, vagy n-nel oszthatók.

26. A **D 2.4** szerint a jobb oldal: $A \ominus B$.

27. a) 1. megoldás: A különbség (**D 2.4**) definíciója miatt

$$(A \cup B) - B = \{x;\quad x \in A \cup B,\ \text{ de } x \notin B\}.$$

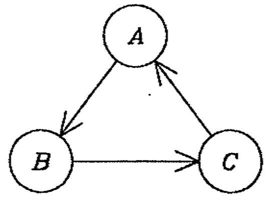
Ez az egyesítés definíciója miatt mindazon A-beli elemek halmaza, amelyek nem tartoznak B-hez, vagyis éppen az $A - B$ halmaz. Az $A - B = A - (A \cap B)$ egyenlőség hasonlóan bizonyítható.
2. megoldás: A bizonyítandó azonosság komplementerekkel kifejezve (**T 2.8**):

$$A \cap \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap (\overline{A \cap B}).$$

Ez pedig igaz, mert (a **T 2.6** és a **T 2.9** tételek alapján): $(A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B}$, és
$A \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$.
b) Igaz. Vegyük figyelembe a **D 2.2** definíciót és azt, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
c) és d) hamis, mert az üres halmaznak nincs valódi része. (Még önmaga sem.)

28. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $A - B \subseteq C$, akkor $A \subseteq B \cup C$. A **D 2.4** definíció miatt $A \subseteq B \cup (A - B)$, ha tehát $A - B \subseteq C$, akkor $B \cup (A - B) \subseteq B \cup C$. Ekkor viszont a tartalmazás tranzitivitása miatt (**T 2.3**) $A \subseteq B \cup C$. Másodszor azt bizonyítjuk be, hogy ha $A \subseteq B \cup C$, akkor $A - B \subseteq C$. A **T 2.5** szerint, ha $A \subseteq B \cup C$, akkor $A \cap \overline{B} \subseteq (B \cup C) \cap \overline{B}$, de a disztributivitási azonosságot felhasználva
$(B \cup C) \cap \overline{B} = (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) = (C \cap \overline{B}) = C - B \subseteq C$ miatt $A \cap \overline{B} \subseteq C$, azaz $A - B \subseteq C$.

29. A három állítás páronkénti ekvivalenciájához elegendő bizonyítani, hogy A-ból következik B, B-ből következik C és C-ből következik A. Ezt a következő ábra szemlélteti:



Könnyen belátható, hogy ekkor a fordított irányítású „következtetések" is teljesülnek. Pl. B-ből következik A, mert B-ből következik C és C-ből következik A.
A-ból következik a B:
A **T 2.5** tétel szerint $L \subseteq M$-ből következik, hogy $L \cap L \subseteq M \cap L$, azaz $L \cap M \supseteq L$. A **T 2.5** szerint viszont tetszőleges L és M halmazokra $L \cap M \subseteq L$. A $L \cap M \supseteq L$ és a $L \cap M \subseteq L$ egyszerre csak $L \cap M = L$ esetén teljesülhet.
B-ből következik C:
Az $L = L \cap M$ feltevésből $L \cup M = (L \cap M) \cup M$ adódik, s e kifejezés jobb oldala az egyik elnyelési tulajdonság (**T 2.6**) szerint M-mel egyenlő.
C-ből következik A:
Ha $L \cup M = M$, akkor $(L \cup M) - M = M - M = \emptyset$ is teljesül. A bal oldal a különbség definíciója szerint $L - M$-mel egyenlő, tehát $L - M = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy L-nek nincs olyan eleme, amely nincs benne a M halmazban, vagyis $L \subseteq M$.

30. A **T 2.8** tétel szerint $B - C = B \cap \overline{C}$. Ez utóbbit, a **T 2.8** és **T 2.9** tételeket, valamint a disztributivitást alkalmazva

$$\begin{aligned} B - (B - C) &= B \cap \overline{(B - C)} = B \cap \overline{B \cap \overline{C}} = B \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap C) = B \cap C . \end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve, az előbbihez hasonló átalakítással kapjuk, hogy

$$D = A - (A - (B - (B - C))) = A \cap B \cap C .$$

Ez utóbbi kifejezés az üres halmazzal egyenlő, ha az A, B, C halmazok közül legalább kettő metszete üres. Ezért az a) és b) esetekben $D = \emptyset$, a c) esetben pedig $D = A \cap B \cap C$.

31. Mindkét oldalra alkalmazzuk a disztributív tulajdonságok egyikét (**T 2.10**).

$$\begin{aligned} (M \cup K) \cap L &= (M \cap L) \cup (K \cap L) , \\ (M \cup L) \cap K &= (M \cap K) \cup (L \cap K) . \end{aligned}$$

Ezekből leolvasható, hogy ha pl. $M \cap L = K \cap L = \emptyset$, de $M \cap K \neq \emptyset$, akkor a feladatbeli egyenlet bal oldalán álló halmaz üres, a jobb oldalon lévő pedig nem üres. Tehát az állítás nem igaz tetszőleges három halmazra.

32. a) A **D 2.4** definíció alapján: $(K \cup L) - L = K - L \subseteq K$.
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $K \cap L = \emptyset$.
b) A **D 2.4** definícióból $(K \cap L) - L = \emptyset$ következik. A **D 2.7** definíciót követő megjegyzés alapján viszont $\emptyset \subseteq M$ teljesül minden M halmazra. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $M = \emptyset$.

33. Ha $A \subseteq C$, akkor az egyik disztributív tulajdonság (**T 2.6**) és a **T 2.5** tétel miatt $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$. Tegyük fel, hogy

$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$. Ha $A \subseteq C$ nem teljesülne, akkor lenne olyan t, melyre $t \in A$ és $t \notin C$. Ebből viszont az következnék, hogy $t \notin (A \cup B) \cap C$. De $t \in A$ miatt $t \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ lenne, ami ellentmondás.

34. Ha $A = B$, akkor $A - B = \emptyset$ és $B - A = \emptyset$. Tehát $A - B = B - A$. Másrészt, az $A \neq B$ feltételből következik, hogy létezik olyan t, melyre $t \in A$, de $t \notin B$. Ekkor viszont $t \in A - B$, de $t \notin B - A$.

35. A **D 2.4** és **D 2.4** definíciókból következik, hogy $A - B$ és $A \cap B$ diszjunkt halmazok. Ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldalon az üres halmaz áll. De ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $A - B = A$, és így a jelen esetben $A = \emptyset$ kell legyen (B tetszőleges). Ez elegendő is, mert $\emptyset - B = \emptyset$ és $\emptyset \cap B = \emptyset$.

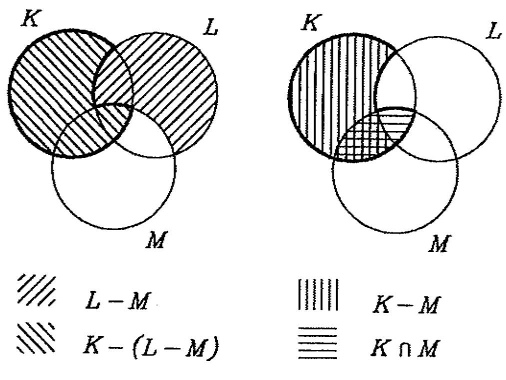
36. Képezzük mindkét oldal metszetét a B halmazzal:

$$(A - B) \cap B = (A \cup B) \cap B .$$

A jobb oldal az egyik elnyelési azonosság (**T 2.6**) miatt B-vel egyenlő. Kaptuk, hogy $(A - B) \cap B = B$. Ez csak úgy teljesülhet (**D 2.4**-ből következően), ha $B = \emptyset$. (Az A tetszőleges halmaz lehet.) Ez elegendő feltétel is, mert ha A tetszőleges halmaz és $B = \emptyset$, akkor $A - \emptyset = A$ és $A \cup \emptyset = A$.

37. A **T 2.8**, **T 2.9** és **T 2.6** tételek alapján:
$K - (K - L) = K \cap (\overline{K \cap \overline{L}}) = K \cap (\overline{K} \cup L) = (K \cap \overline{K}) \cup (K \cap L) = K \cap L$.
Ugyanúgy kapjuk, hogy $L - (L - K) = L \cap K$. E kettő együtt, a metszés kommutatív tulajdonsága miatt, az azonosság teljesülését jelenti.

38. $K - (L - M) =$
$(K \cap (\overline{L \cap \overline{M}}) =$
$K \cap (\overline{L} \cup M) =$
$(K \cap \overline{L}) \cup (K \cap M) =$
$(K - L) \cup (K \cap M)$.



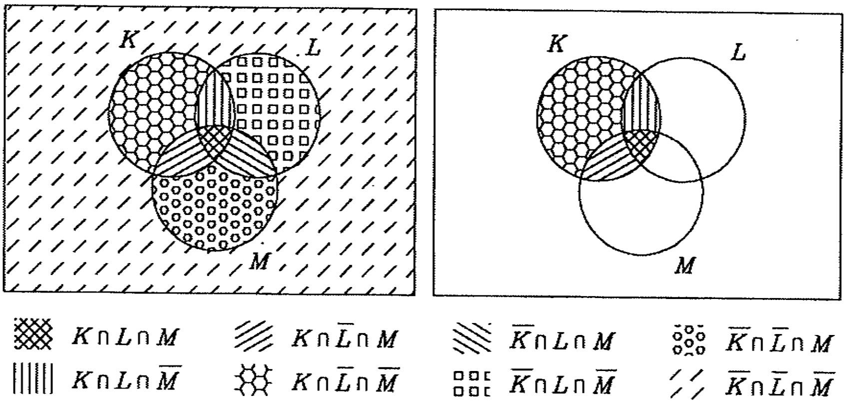
40. $(K - L) - M = (K \cap \overline{L}) \cap \overline{M} = K \cap \overline{L} \cap \overline{M}$, másrészt
$(K - M) - (L - M) = (K \cap \overline{M}) \cap (\overline{L \cap \overline{M}}) = (K \cap \overline{M}) \cap (\overline{L} \cup M) =$
$= (K \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup (K \cap \overline{M} \cap M) = (K \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup \emptyset = K \cap \overline{L} \cap \overline{M}$.

41. $K = K \cup \emptyset = K \cup (L \cap \overline{L}) = (K \cup L) \cap (K \cup \overline{L})$.

42. $K = K \cap H = K \cap (L \cup \overline{L}) = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$, ahol H az alaphalmaz.

43. Az előző feladathoz hasonlóan, az $A = A \cap H$ azonosság és a disztributivitás felhasználásával:
$K = K \cap H = K \cap (L \cup \overline{L}) = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$

$= (K \cap L \cap H) \cup (K \cap \overline{L} \cap H) = (K \cap L \cap (M \cup \overline{M})) \cup (K \cap \overline{L} \cap (M \cup \overline{M}))$
$= (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$.
A bizonyítás elvégezhető fordított sorrendben is. E feladat megoldásának módszere felhasználható bonyolultabb összefüggések bizonyításában (lásd a következő két feladatot). Igaz ugyanis a következő állítás, melyet a mellékelt bal oldali ábra is szemléltet: minden halmaz, amelyet a K, L és M halmazokkal és halmazműveletekkel írunk fel, felbontható $\tilde{K} \cap \tilde{L} \cap \tilde{M}$ alakú tagok uniójaként, ahol $\tilde{K}$ a K és a $\overline{K}$ halmazok valamelyikét jelenti. $\tilde{K} \cap \tilde{L} \cap \tilde{M}$ alakú tagból nyolc féle van, melyet különböző satírozásokkal jelöltünk. E feladatban épp a K halmazt bontottuk fel ilyen tagok uniójaként, melyet a jobb oldali ábra mintázata szemléltet.



44. 1. megoldás: Az előző feladat eredményét és módszerét felhasználva:
$K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,
$L = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (\overline{K} \cap L \cap M) \cup (\overline{K} \cap L \cap \overline{M})$,
$M = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (\overline{K} \cap L \cap M) \cup (\overline{K} \cap \overline{L} \cap M)$,
$K - L = (K \cap \overline{L}) = (K \cap \overline{L} \cap (M \cup \overline{M})) = (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,
$L - M = (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (\overline{K} \cap L \cap \overline{M})$, $M - K = (\overline{K} \cap L \cap M) \cup (\overline{K} \cap \overline{L} \cap M)$.
Behelyettesítés után látható, hogy az egyenlőség fennáll. A fenti bal oldali Venn-diagrammon is kövessük és ellenőrizzük a felbontás és az egyenlőség két oldalán lévő halmazok összehasonlításának lépéseit.
2. megoldás: A bizonyítást a műveletek definíciói és az antiszimmetria tulajdonság (**T 2.3**) alkalmazásával végezzük. Ha x a bal oldal egy tetszőleges eleme, akkor a **D 2.4** definíció szerint a következő négy eset valamelyike teljesül: $x \in K - L$, $x \in L - M$, $x \in M - K$, $x \in K \cap L \cap M$. Ezért x a K, L, M halmazok közül legalább egynek eleme, vagyis benne van a jobb oldali halmazban. Legyen y a jobb oldal egy tetszőleges eleme. Ha y a K, L, M halmazok közül pontosan egynek, vagy pontosan kettőnek eleme, akkor (**D 2.4** miatt) vagy $y \in K - L$, vagy $y \in L - M$, vagy $y \in M - K$. Ha pedig mindhárom halmaz tartalmazza y-t, akkor metszetüknek is eleme. Tehát y minden esetben eleme a bal oldali halmaznak. Ebből (**T 2.3** miatt) az állítás

helyessége következik.

46. a) Ha $A-B=A$, akkor (a **D 2.4** definíció miatt) A és B diszjunkt halmazok. Ekkor viszont $B-A=B$. A másik irányú állítás ugyanígy bizonyítható.

47. Legyen x az $A \ominus B$ halmaznak tetszőleges eleme. Ekkor a szimmetrikus különbség definíciója szerint $x \in A$, vagy $x \in B$, de $x \notin A \cap B$.
Ha $x \in A$ és $x \in C$, akkor $x \in B \ominus C$. Ha pedig $x \in A$ és $x \notin C$, akkor $x \in A \ominus C$. Az $x \in B$ eset hasonlóan vizsgálható.

48. Ha A és B diszjunkt halmazok, akkor $A \cap B = \emptyset$, ezért a **D 2.4** definícióból $A \ominus B = A \cup B$ közvetlenül adódik.
Tegyük fel, hogy $A \ominus B = A \cup B$. A **D 2.4** definíció alapján

$$(A \ominus B) \cap (A \cap B) = \emptyset .$$

Ezért a feltevés miatt $(A \cup B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ is teljesül. Másrészt azonban $A \cap B \subseteq A \cup B$, így $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$. Tehát $A \cap B = \emptyset$, azaz A és B diszjunkt halmazpár.

49. A **T 2.8** tétel alapján a bal oldal $(A \cap \overline{B}) \ominus (\overline{A} \cap B) = (A-B) \ominus (B-A)$. Mivel $A-B$ és $B-A$ diszjunkt halmazok, ezért az előző feladat megoldásából következik, hogy $(A-B) \ominus (B-A) = (A-B) \cup (B-A)$. A jobb oldal pedig a **D 2.4** definíció alapján az $A \ominus B$ halmazzal egyenlő.

50. Alkalmazzuk a halmazműveletek disztributív tulajdonságait, a **T 2.8** tételt és az előző feladat megoldását.

51. Könnyen belátható, hogy a $K \ominus L = M \ominus N$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha nincs olyan x elem, mely a K, L, M és N halmazok közül páratlan soknak volna az eleme. De ugyanez mondható el a $K \ominus M = L \ominus N$ egyenlőségről is, tehát e két egyenlőség ekvivalens egymással, vagyis egyszerre igazak, vagy hamisak.

52. A feladatbeli egyenlet a **D 2.4** definíció szerint pontosan akkor teljesül, ha

(*) $$A \cap (B-X) = \emptyset.$$

Az X-nek tehát tartalmaznia kell B minden olyan elemét, amely A-nak is eleme; azaz szükséges, hogy $X \supseteq A \cap B$ legyen. De ez elegendő is, mert ha $X \supseteq A \cap B$, akkor teljesül a (*) egyenlőség.

53. Ha van ilyen X, akkor $A - X \subseteq X$, ami csak $A - X = \emptyset$ esetén lehetséges (lásd **D 2.4**, és **D 2.2**). Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe $B = X$ adódik. Ezek szerint megoldás csak $A - B = \emptyset$, vagyis $A \subseteq B$ esetén lehetséges. Ha viszont $A \subseteq B$, akkor $X = B$ valóban megoldás (és ez az egyetlen).

54. A tartalmazás tranzitív tulajdonságát, továbbá a **D 2.4** definíciót alkalmazzuk. Ha van olyan X halmaz, amely kielégíti a feladatbeli egyenletet, akkor $A \subseteq B - X \subseteq B$. Tehát csak $A \subseteq B$ esetén lehet megoldás. Ekkor $A - X \subseteq B - X$ is teljesül és ezért az egyenlet így módosul: $A - X = A$. Ezt az egyenletet minden olyan X halmaz kielégíti, amelyre $A \cap X = \emptyset$.

55. A **D 2.4** definíciót, a disztributív tulajdonságokat és az egyik elnyelési tulajdonságot (**T 2.6**) alkalmazzuk. A feltételi egyenletből $B \subseteq X$ következik. Másrészt az egyenletet átalakítva:

$$(A \cup B) \cap (X \cup B) = X ,$$

amiből $X \subseteq A \cup B$. Ezek szerint $B \subseteq X \subseteq A \cup B$, azaz $X = B \cup Y$, ahol $Y \subseteq A$. Minden ilyen X megoldás, mert ezzel
$(A \cap X) \cup B = (A \cap (B \cup Y)) \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap Y) \cup B = B \cup (A \cap B) \cup (A \cap Y) = = X$.

56. Az egyenletet az egyik disztributív tulajdonság figyelembevételével átírva:

$$(A \cup X) \cap (B \cup X) = B \cup X.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy $B \cup X \subseteq A \cup X$. Mivel minden A és B halmazra $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, ezért

$$(B - A) \cup (A \cap B) \cup X \subseteq A \cup X.$$

Ha egy x elem eleme a bal oldali halmaznak, akkor $x \in (B - A)$ vagy $x \in (A \cap B)$ vagy $x \in X$. Az utóbbi két esetben x nyilván eleme a jobb oldali halmaznak is, ha azonban $x \in (B - A)$, akkor $x \notin A$, tehát a fenti tartalmazás pontosan akkor áll fenn, ha $B \setminus A \subseteq X$. Tehát minden olyan X halmaz jó, melyre $B \setminus A \subseteq X$. (Ellenőrzésképpen: ha $B \setminus A \not\subseteq X$, akkor van olyan $y \in B \setminus A$ elem, melyre $y \notin X$. Ekkor $y \in B$ és $y \notin A \cap B$. Tehát a feladatbeli egyenlőség nem teljesülhet.)

57. Ha $t \in A - X$, akkor $t \in A$ és $t \notin X$. Az egyenlőség miatt $t \in X - A$ is teljesül. Ebből viszont $t \in X$ és $t \notin A$ következik. Tehát a két oldalon álló A és X halmaznak nincs közös eleme, így egyenlőség csak úgy állhat fenn, hogy mindkét oldal üres. De, ha $A - X = \emptyset$, akkor $A \subseteq X$. Az $X - A = \emptyset$ egyenlőségből viszont $X \subseteq A$ következik, azaz kell, hogy $X = A$ legyen.

58. A **D 2.7** definíció és az azt követő megjegyzés alapján:

$$P(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, H\}.$$

59. A **D 2.1** és **D 2.7** definíció és ez utóbbit követő megjegyzés alapján:

$$P(P(P(\emptyset))) = P(P(\{\emptyset\})) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

60. Ha valamely X halmazra $X \in P(A \cap B)$, akkor $X \subseteq A \cap B$, ami azt jelenti, hogy $X \subseteq A$ és $X \subseteq B$ és ezért $X \in P(A)$ és $X \in P(B)$ (**D 2.7**, **D 2.4**). Ezekből $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ következik.
Ha viszont Y olyan halmaz, amelyre $Y \in P(A) \cap P(B)$, akkor $Y \in P(A)$ és $Y \in P(B)$, ami azt jelenti, hogy $Y \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. Így $Y \subseteq A \cap B$, azaz $Y \in P(A \cap B)$. Tehát $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$. A két tartalmazás antiszimmetriájából a feladatbeli állítás helyessége következik.

61. Legyen X tetszőleges olyan halmaz, melyre $X \in P(A) \cup P(B)$. Ekkor $X \in P(A)$ vagy $X \in P(B)$, azaz $X \subseteq A$ vagy $X \subseteq B$. Ekkor azonban $X \subseteq A \cup B$, ami azt jelenti, hogy $X \in P(A \cup B)$. Ezekből (**D 2.2** miatt) az állítás helyessége következik.
Megjegyzés: A $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ tartalmazás általában nem igaz. Ha pl. $A = \{a\}$ és $B = \{b, c\}$, akkor pl. $\{a, b\} \in P(A \cup B)$, de $\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$.

62. Legyen pl. $B \subseteq A$. Ekkor a **D 2.4** és **D 2.7** definíciók alapján $P(A \cup B) = P(A)$ és $P(A) \cup P(B) = P(A)$.

Legyen A és B két olyan halmaz, amelyekre $B \not\subseteq A$ és $A \not\subseteq B$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $a \in A$ és $b \in B$ elem, amelyekre $a \notin B$ és $b \notin A$. Ekkor $\{a, b\} \in P(A \cup B)$, de $\{a, b\} \notin P(A)$ és $\{a, b\} \notin P(B)$. Ezekből $\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$ következik. Mivel $\{a, b\} \in P(A \cup B)$, ezért azt kapjuk, hogy $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.

66. Megszámlálva külön A és B elemeit, a közös részben lévőket nyilván kétszer számoljuk, így ezek számát levonva, az egyesítés elemeinek számát kapjuk.

67. Az előző feladat eredményét kétszer alkalmazva: $|(A \cup B) \cup C| =$
$|A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

68. Megoldása hasonló az előző feladathoz.

69. A **67.** feladatbeli egyenlőséget felhasználva: mindenki beszél legalább egy idegen nyelvet, és pontosan egy nyelvet beszél 26 diák.

70. $1000 - ((1000 - 250) + (1000 - 900) + (1000 - 950) + (1000 - 990)) = 90$, tehát legalább 90 házban van mind a négy eszköz.

71. 1. megoldás: Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $|P(A_n)| = 2^n$. Könnyen látható, hogy $|P(A_0)| = 1$, $|P(A_1)| = 2$. Tegyük fel, hogy $|P(A_{n-1})| = 2^{n-1}$. Legyen $A_n = A_{n-1} \cup \{x\}$, vagyis legyen x az A_n halmaz n-edik eleme. A_n minden részhalmazát megkapjuk, ha vesszük A_{n-1} minden részhalmazát, és vesszük A_{n-1} minden részhalmazának $\{x\}$-szel való egyesítettjét. Tehát $|P(A_n)| = 2 \cdot |P(A_{n-1})|$, azaz $|P(A_n)| = 2^n$.
2. megoldás: Legyen $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Az egyes részhalmazokat a következő módszerrel is kiválaszthatjuk: a halmaz elemeinek jele alá rendre a 0 vagy 1 számot írjuk, ahol a 0 azt jelöli, hogy a felette álló elemet nem választjuk be a részhalmaz elemei közé, az 1 pedig azt hogy beválasztjuk. Ekkor az A halmaznak annyi különböző részhalmazát tudjuk kiválasztani, ahány módon az elemek alá 0-kból és 1-esekből álló különböző sorozatot tudunk írni. Minden helyen két lehetőségünk van a választásra, ez összesen 2^n lehetőség.

72. (Ha A véges, akkor az előző feladat szerint az állítás nyilvánvaló, hisz $n < 2^n$). Legyen A tetszőleges halmaz, és tegyük fel, hogy $\varphi : A \to P(A)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Mivel φ kölcsönösen egyértelmű, ezért az

$$X := \{y \in A;\ y \notin \varphi(y)\}$$

halmazhoz van olyan x elem A-ban, hogy $\varphi(x) = X$. Vajon x eleme-e X-nek? Ha $x \in X$, akkor X definíciója szerint $x \notin \varphi(x)$. Ha viszont $x \notin \varphi(x)$, akkor viszont megint csak X definíciója szerint x bele kell tartozzék az X halmazba, vagyis $x \in X$. Azt kaptuk tehát, hogy $x \in X$ pontosan akkor, ha $x \notin X$, ami ellentmondás. Tehát ilyen φ leképezés nem létezhet.

73. Az $(1,3)$, $(1,4)$, $(5,3)$ és $(5,4)$ pontok által határolt zárt téglalap.

74. $A \times B \times C = \{(a,x,1), (a,x,2), (a,x,3), (a,y,1), (a,y,2), (a,y,3)\}$,
$A^3 = \{(a,a,a)\}$,
$B^3 = \{(x,x,x), (x,x,y), (x,y,x), (x,y,y), (y,x,x), (y,x,y), (y,y,x), (y,y,y)\}$.

75. a) mn, b) k^2, c) $(m+n-k)^3$, d) $(m-k)^2$, e) $(m+n-2k)^4$, f) m^2n.

3. Matematikai logika (megoldások)

1. Hamis, ugyanis P, Q és R logikai értékét behelyettesítve kapjuk: $(P \wedge Q) \wedge R = (1 \wedge 0) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$. (Ebben és a további feladatok megoldásában alkalmazzuk a **D 3.1** definícióit. A megoldást célszerű a zárójelben lévő összetett ítéletek logikai értékének meghatározásával kezdeni. Több zárójel esetén a legbelsőtől haladjunk kifelé.)

2. Hamis. 3. Igaz. 4. Igaz. 5. Hamis.
6. Igaz. 7. Igaz. 8. Igaz. 9. Igaz.
10. Hamis.

11. A **D 3.1** definíciót használjuk: $\neg P \vee S$ összetett ítélet logikai értéke igaz, hisz $0 \vee 1 = 1$, ezért a $P \Rightarrow (\neg P \vee S)$ ítélet logikai értéke is igaz, hisz $1 \Rightarrow 1 = 1$. Mivel $1 \Leftrightarrow 1 = 1$, ezért azt kapjuk, hogy a feladatbeli ítélet igaz logikai értékű.

12. $R \vee \neg S$ hamis, $P \Rightarrow (R \vee \neg S)$ hamis, $Q \wedge S$ hamis, ezért a feladatbeli ítélet igaz.

13. P implikálja Q-t. P maga után vonja Q-t. A Q szükséges feltétele P-nek. Ahhoz, hogy P teljesüljön, szükséges, hogy Q fennálljon. P elégséges feltétele Q-nak. Ahhoz, hogy Q teljesüljön, elegendő, hogy P fennálljon. A P csak akkor teljesül, ha Q is teljesül. Ha P, akkor Q.

14. 2^n. (Lásd még a **2.71**-es feladatot!)

15. p, q és r összes különböző értékhármasára vizsgáljuk meg a kifejezések logikai értékét! A **14.** feladat szerint egy $2^3 = 8$ sorból álló táblázatra lesz szükségünk:

$p\ q\ r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
1 1 1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1
1 0 1	1	1	0	1
1 0 0	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	1
0 1 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	1
0 0 0	0	0	0	0

A két kifejezés nem azonosan egyenlő, mert a $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$ és a $p = 0$, $q = 0$, $r = 1$ esetben $p \wedge (q \vee r) = 0$ és $(p \wedge q) \vee r = 1$.

16. A táblázatban vastag számokkal jelezzük a kifejezések logikai értékét. Ezekből kiolvasható, hogy a két kifejezés azonosan egyenlő.

$\neg\ (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
0 1 1 1 **1** 0 0 1
1 1 0 0 **1** 1 1 0
0 0 1 1 **0** 0 0 1
0 0 1 0 **0** 0 1 0

17. A disztributivitás (**T 3.4** (5)) és a **T 3.4** (6) és (7) felhasználásával:
$p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv 0 \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$.

18. Alkalmazzuk a **T 3.4** (5), (6) és (7) azonosságait!

19.

$p\ q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg q)$
1 1	1	1	1	0
1 0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0
0 0	1	0	1	1

Tehát mind a négy esetben $p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, vagyis az azonosság fennáll.

20. A **T 3.4** (11) és (8) azonosságok felhasználásával, vagy az előző feladathoz hasonlóan táblázattal.

29. A **T 3.4** (9) és (8) azonosságok felhasználásával:
$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv \neg(p \wedge q \wedge r) \vee s \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$,
továbbá **T 3.4** (9) többszöri alkalmazásával:
$p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \equiv \neg p \vee [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \Rightarrow s) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$.

32. $\neg$(Márta szőke).

33. $\neg(\neg$(Mátyás elég virtuóz)). Ez ekvivalens azzal, hogy „Mátyás elég virtuóz".

34. (esik az eső) $\wedge$ (meleg van) $\wedge$ (a nap elbújt) $\wedge$ (későre jár az idő).
A hétköznapi beszédben az „és", „de", „is…is", „bár", „noha",… szavak is alkalmasak lehetnek a konjunkció kifejezésére, bár e szavaknak a logika nyelvén ki nem fejezhető egyéb tartalmuk is lehet. Ha megvizsgáljuk, hogy egy mondatban szereplő elemi ítéletek igazságértékétől hogyan függ az egész mondat igazságértéke, eldönthetjük, hogy milyen műveletekről van szó. Például az e feladatbeli mondat csak akkor igaz, ha a benne szereplő négy elemi ítélet mindegyike igaz, tehát valóban konjunkciókról van szó.

35. (Éva ott volt) $\vee$ (Pista ott volt).

36. $\neg$(a hegy megy Mohamedhez) $\Rightarrow$ (Mohamed megy a hegyhez).

37. Használjuk az alábbi jelöléseket: E: esik az eső, F: fúj a szél, K: elmegyünk kirándulni. E jelölésekkel: $(\neg E \wedge \neg F) \Rightarrow K$. Ez **T 3.4** (9) és (8) felhasználásával átalakítható az alábbi módon: $(\neg E \wedge \neg F) \Rightarrow K \equiv \neg(\neg E \wedge \neg F) \vee K \equiv E \vee F \vee K$. Eszerint a mondat ekvivalens a következővel: „esik az eső vagy fúj a szél vagy elmegyünk kirándulni."

38. M: matekból elsőre átmegyek, F: fizikából elsőre átmegyek. E jelölésekkel: $\neg(\neg M \wedge \neg F)) \equiv M \vee F$, ami hétköznapi nyelven így szól: „matekból vagy fizikából elsőre átmegyek".

39. S: a szemtanú megbízható, U: az ujjlenyomatok a tettestől származnak, T: téved az írásszakértő. E jelölésekkel:
$(S \wedge U) \Rightarrow T \equiv \neg S \vee \neg U \vee T \equiv \neg(S \wedge U \wedge \neg T)$.
Azaz az ekvivalens alakok hétköznapi nyelven: „A szemtanú nem megbízható, vagy az ujjlenyomatok nem a tettestől származnak, vagy téved az írásszakértő", illetve „Az nem lehet, hogy a szemtanú is megbízható, az ujjlenyomatok is a tettestől származnak, és az írásszakértő sem téved".

40. (szivárvány van) $\Rightarrow$ [(esik az eső) $\wedge$ (süt a Nap) $\wedge$ $\neg$(dél van)].

41.

n páros	n páratlan	n vagy páros, vagy páratlan egész
1	1	nincs értelmezve (lehetetlen)
1	0	1
0	1	1
0	0	nincs értelmezve (lehetetlen)

42.

kirándulni megyünk	strandolni megyünk	vagy kirándulni megyünk vagy strandolni
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(Ezt a műveletet nevezik „kizáró vagy"nak.)

43.

Ecser következik	Maglód következik	Vagy Ecser vagy Maglód következik
1	1	nincs értelmezve
1	0	1
0	1	1
0	0	0

44. Igaz, mert a 7 prímszám.

45. Igaz, mert a 2 prímszám és páros.

46. Igaz, mert van olyan pozitív egész szám, amelyik prímszám.

47. Igaz, mert minden pozitív egész y-hoz megadható olyan pozitív egész x szám, mely osztója y-nak.

48. Igaz, mert létezik olyan pozitív egész szám, amely prímszám és páros.

49. Ez hamis állítás, mert nem minden pozitív egész szám prímszám.

50. Igaz, mert ha y osztható 2-vel, akkor páros.

51. Ez hamis, mert ha x osztója y-nak, akkor $y \geq x$.

52. Ez igaz állítás.

53. Az ítélet szavakba foglalva: van olyan pozitív egész szám, amely ha 6-tal osztható, akkor prímszám. Ha különösnek is tűnik, ennek az összetett ítéletnek a logikai értéke igaz. Vegyük például az $(S(6,5) \Rightarrow T(5))$ vagy az $(S(6,8) \Rightarrow T(8))$ ítéleteket. Az előtag mindkettőben hamis, ezért az implikáció igaz.

54. Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor téglalap. Az állítás hamis.

55. Ha egy négyszög téglalap, akkor húrnégyszög is egyben. Az állítás igaz.

56. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap. Az állítás hamis.

57. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°. Az állítás igaz, mert $p(x) \Rightarrow r(x)$ és $r(x) \Rightarrow p(x)$ is igaz (**T 3.4.** (11)).

58. Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást. Az állítás igaz.

59. Ha egy négyszög átlói nem felezik egymást, akkor a négyszög nem téglalap. Mivel a $q(x) \Rightarrow s(x)$ ítélet igaz minden x-re, ezért a $\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)$ állítás is igaz a kontrapozíciós azonosság (**T 3.4** (10)) miatt.

60. Ha egy négyszög húrnégyszög, de nem téglalap, akkor a négyszög átlói felezik egymást. Az állítás hamis.

61. Jelölje A az ajtók, K a kilincsek halmazát, és $R(x,y)$ azt az ítéletet, hogy y rajta van x-en. E jelölésekkel formalizálva: $(\forall x \in A)(\exists y \in K)R(x,y)$, aminek tagadása **T 3.4** (12) szerint $(\exists x \in A)(\forall y \in K)\neg R(x,y)$, szavakban: „van olyan ajtó, amin nincs kilincs".

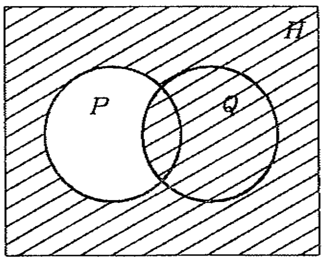
62. $S(x)$: x szekercét fog hóna alá, $M(x)$: x molnár. E jelölésekkel a közmondás formalizált alakja: $\neg\forall x\,[S(x) \Rightarrow M(x)]$. Ez **T 3.4** (12) és (9) szerint ekvivalens az alábbiakkal: $\exists x\,\neg[S(x) \Rightarrow M(x)] \equiv \exists x\,[S(x) \wedge \neg M(x)]$, ami szavakban: „van olyan, ki szekercét fog hóna alá, de nem molnár". Az eredeti állítás tagadása: $\forall x\,[S(x) \Rightarrow M(x)]$, azaz szavakban: „mind molnár, ki szekercét fog hóna alá".

63. A $b(x)$: (x nem szólt, csak bégetett), $d(x)$: (x dicséretet kapott) jelölésekkel: $\forall x\,(b(x) \Rightarrow d(x))$. Tagadása **T 3.4** (12) és (9) felhasználásával: $\neg\forall x\,(b(x) \Rightarrow d(x)) \equiv \exists x\,\neg(b(x) \Rightarrow d(x)) \equiv \exists x\,(b(x) \wedge \neg d(x))$. Ez utóbbi hétköznapi szavakkal: „volt olyan, ki nem szólt, csak bégetett, de még dicséretet sem kapott".

64. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(A \Rightarrow B)$, ahol $A : |x-a| < \delta$, $B : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Tagadása **T 3.4** (12) és (9) felhasználásával: $\neg[(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(A \Rightarrow B)] \equiv (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg(A \Rightarrow B) \equiv (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)(A \wedge \neg B)$. Szavakban: „Létezik olyan pozitív ε szám, hogy bármely δ pozitív számhoz található olyan x szám, hogy $|x-a| < \delta$, de $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$."

65. Átfogalmazva: „minden időpillanatban, amikor fúj a szél, fázom". Formalizálva: $\forall x$((az x pillanatban fúj a szél) $\Rightarrow$ (az x pillanatban fázom)). Tagadása: $\exists x$((az x pillanatban fúj a szél)$\wedge\neg$(az x pillanatban fázom)), azaz, „van, hogy fúj a szél, de nem fázom."

66. Mivel $p(x) \Rightarrow q(x) \equiv \neg p(x) \vee q(x)$, így a neki megfelelő halmaz $\overline{P} \cup Q$. Bővebben kifejtve: $p(x) \Rightarrow q(x) \equiv (x \in P) \Rightarrow (x \in Q) \equiv (x \notin P) \vee (x \in Q) \equiv (x \in \overline{P} \cup Q)$. (lásd az ábrát)



67. $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$, ami másképpen felírva $\overline{P \ominus Q}$.

68. $P \cup \overline{Q \cap R} \equiv P \cup \overline{Q} \cup \overline{R}$.

69. $P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R)$. **70.** $\overline{P} \cup \emptyset \equiv \overline{P}$.

71. $[(P \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})] \cup [(\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q})] \equiv H$.

72. $P = H$. **73.** $P = \emptyset$. **74.** $P \neq \emptyset$.

75. $P = Q$.

76. $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \forall x\,((x \in P) \Rightarrow (x \in Q))$, ami azt jelenti, hogy „ha valami eleme P-nek, akkor eleme Q-nak is", azaz „P minden eleme eleme a Q halmaznak is", azaz $P \subseteq Q$. (Egy másik igazolás az implikáció kiküszöbölésével: $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \forall x\,(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg\exists x\,\neg(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg\exists x\,(p(x) \wedge \neg q(x))$. Az utolsó formulából kiolvasható, hogy P-nek nincs $\overline{Q}$-val közös eleme, azaz $P \subseteq Q$.)

77. P és Q diszjunktak.

78. Azonosság. A bal oldal halmazelméleti megfogalmazásban: $P \cap Q = H$, a jobb oldal: $P = H$ és $Q = H$, ezek pedig ekvivalens állítások.

79. Nem azonosság. A bal oldal halmazelméleti megfogalmazásban: $P \cup Q = H$, a jobb oldal: $P = H$ vagy $Q = H$, ezek pedig nem ekvivalens állítások.

80. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Táblázatot készítve:

p	q	r	$(p \vee q)\wedge$	$(p \vee r)\wedge$	$(q \vee r)$	bal o.	$(p \wedge q)\vee$	$(p \wedge r)\vee$	$(q \wedge r)$	jobb o.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

81. $p \wedge \neg(q \wedge r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$.

85. Ha $E(x)$ jelöli az „x pillanatban esik az eső", $F(x)$ az „x pillanatban fúj a szél" ítéleteket, akkor a feladatbeli ítélet formalizálva:

$$(\forall x)(E(x) \Rightarrow F(x)) \vee (\forall x)(F(x) \Rightarrow E(x)),$$

ami valóban nem igaz, ellentétben a

$$(\forall x)[(E(x) \Rightarrow F(x)) \vee (F(x) \Rightarrow E(x))]$$

ítélettel.

86. Ha $n \leq 24$ és $m \leq 24$, akkor $n + m \leq 48$, ami — mivel n és m pozitív egészek — a kontrapozíció (**T 3.4** (9)) szerint pontosan azt jelenti, hogy ha $n + m \geq 49$, akkor $n \geq 25$, vagy $m \geq 25$. (E bizonyítás formalizálásához vezessük be a következő ítéleteket: $p:\ n + m \geq 49$, $q:\ n \geq 25$, $r:\ m \geq 25$. Azt szeretnénk bizonyítani, hogy $p \Rightarrow (q \vee r)$ igaz. Helyette a logikailag ekvivalens $\neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$ kontrapozíciós alak helyességét fogjuk belátni. A De Morgan azonosságok révén $\neg(q \vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$ adódik, vagyis $n \leq 24$ és $m \leq 24$. Utóbbiból $n + m \leq 48$ adódik, ami éppen $\neg p$. Ezzel megmutattuk, hogy $\neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$ igaz, következésképpen bizonyítottuk, hogy $p \Rightarrow (q \vee r)$ érvényes.)

87. (1) minden nap, (2) kedd kivételével minden nap.

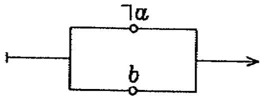
88. „Ha egy természetes szám osztható a-val is és b-vel is, akkor osztható ab-vel is" — nem igaz.

89. „Két négyszög egybevágó, ha a megfelelő oldalaik egyenlők egymással" — nem igaz.

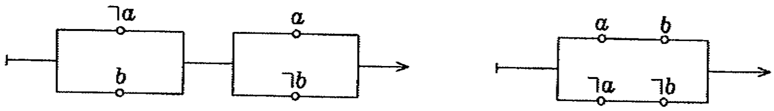
90. „Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű" — igaz.

91. A soros kapcsolású áramkör pontosan akkor vezeti az áramot, ha A és B is be van kapcsolva, azaz ha a és b is igaz. Ennek alapján a soros kapcsolásnak az $a \wedge b$ ítélet felel meg. A párhuzamos kapcsolású áramkör pontosan akkor vezeti az áramot, ha A vagy B be van kapcsolva, azaz ha a vagy b igaz. Ennek alapján a párhuzamos kapcsolásnak az $a \vee b$ ítélet felel meg.

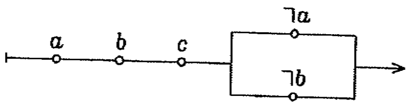
92. $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$,
ezért az áramkör:



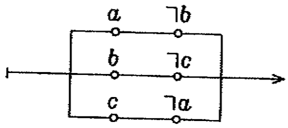
93. $a \Leftrightarrow b \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$, vagy $a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$. Az ezeknek megfelelő két áramkör:



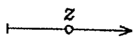
94. $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b) \equiv$
$a \wedge b \wedge c \wedge (\neg a \vee \neg b)$, így:



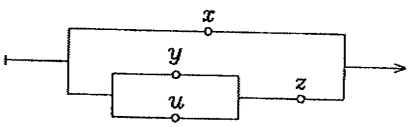
95. $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
$\equiv (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg a)$, így:



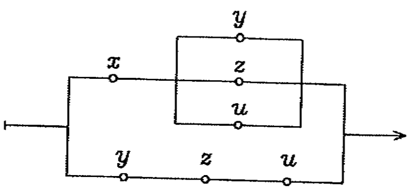
96. $(y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee \equiv z$.



97. $(x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z) \equiv x \vee [(y \vee u) \wedge z]$.

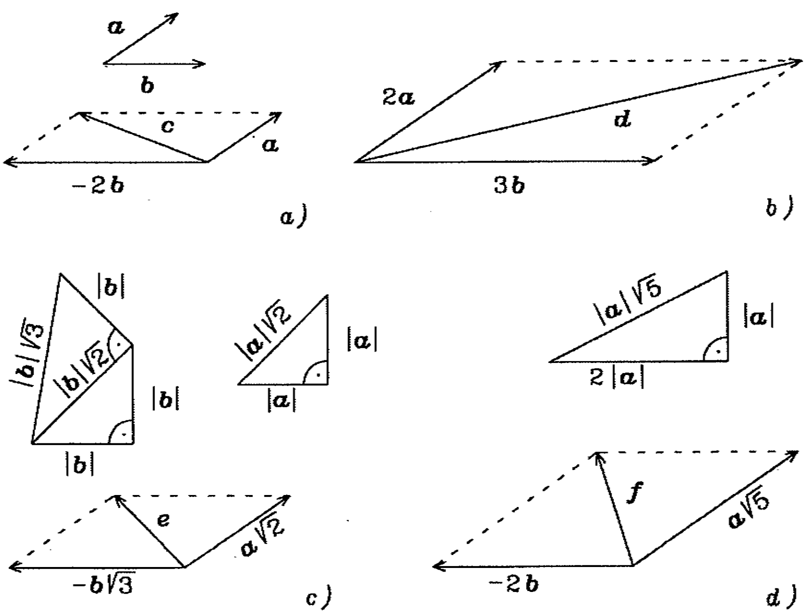


98. Legyen x az elnöki kapcsolóhoz, y, z és u a további három kapcsolóhoz rendelt logikai változó. A kapcsoló áramkör vezeti az áramot, ha x és még egy változó igaz, vagy ha y, z és u is igaz; formulával: $[x \wedge (y \vee z \vee u)] \vee (y \wedge z \wedge u)$. Így az áramkör:



4. Vektoralgebra (megoldások)

1.



2. a) $3\mathbf{m} - 3\mathbf{n} = 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - 3(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 6\mathbf{b}$ b) $4\mathbf{m} + 4\mathbf{n} = 8\mathbf{a}$;
c) $2\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{n} = \frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{5}{2}\mathbf{b}$; d) $3\mathbf{m} + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{n} = \frac{9+\sqrt{2}}{3}\mathbf{a} + \frac{9-\sqrt{2}}{3}\mathbf{b}$.

3. a) $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b} = \frac{10}{3}\mathbf{m} - \frac{11}{3}\mathbf{n}$; b) $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \frac{8}{3}\mathbf{m} - \frac{1}{3}\mathbf{n}$;
c) $-\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b} = -\frac{7}{10}\mathbf{m} + \frac{2}{5}\mathbf{n}$; d) $2\mathbf{a} - \mathbf{b}\sqrt{3} = \frac{4+\sqrt{3}}{3}\mathbf{m} - \frac{2+2\sqrt{3}}{3}\mathbf{n}$.

4. A szabályos hatszög geometriai tulajdonságaiból következik, hogy
$\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_2A_3} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_3A_4} = -\mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_4A_5} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_5A_6} = \mathbf{a}$,
$\overrightarrow{A_6A_1} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = -2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1A_5} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_6} = \mathbf{0}$.

5. a) $\overrightarrow{BA}$. b) $\mathbf{0}$. 6. $\overrightarrow{A_1A_n}$.

7. I. „akkor”: Tegyük fel először, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Rendezés után alkalmazzuk a **T 4.1** tételt:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |-\mathbf{c}| = |\mathbf{c}|.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy $|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}| \geq |\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| \geq |\mathbf{a}|$. Ha „$\geq$” helyett „$=$” jel van, akkor a háromszög szakasszá, esetleg ponttá fajul.) Ezekből következik, hogy az $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{c}|$ szakaszokkal szerkeszthető háromszög. Abban az esetben, amikor valamelyik (pl. $\mathbf{c}$) előállítható a másik két vektor (pl. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$) összegeként, az előbbihez hasonlóan járunk el!

II. „csak akkor": Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egy háromszög oldalvektorai, akkor a vektorok elhelyezkedésére az ábrán vázolt esetek lehetnek.

a) b)

Az a) esetben: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, a b) esetben a vektorok jelölésétől függően, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, vagy $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}$, vagy $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$.

8. Mivel $\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}-\dfrac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}=\mathbf{0}$, ezért az előző feladat miatt van ilyen háromszög.

9. A három vektor összege nem nullvektor. Ugyanakkor a három vektor közül semelyik kettőnek az összege sem egyenlő a harmadikkal, mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineárisak. Ezért a **7.** feladat miatt nincs ilyen háromszög.

10. $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $-\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ $(\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$.

11. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges vektorok és $\left|\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right|=\left|\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right|=1$, ezért a keresett vektor $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)$.

12. Az $|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ és $|\mathbf{b}|\mathbf{a}$ vektorok hossza egyenlő. Ezért, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ellentétes irányúak, akkor az első, ha pedig egyező irányúak, akkor a második állítás igaz.

13. A **T 4.1** és **T 4.2** tételeket alkalmazzuk.
a) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor α szögére $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$.
b) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor szögére $\frac{\pi}{2}<\alpha\le\pi$.
c) Ha a két vektor szöge $\frac{\pi}{2}$.
d) Akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ellentétes irányú és $|\mathbf{a}|\ge|\mathbf{b}|$.
e) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor ellentétes irányú.
f) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor egyező irányú.
g) Akkor és csak akkor teljesül, ha $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$.

14. Az $\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1,2,3,\ldots,5)$ vektorokat forgassuk el az O pont körül 72°-kal. Ekkor az $\overrightarrow{OA_i}$ vektorok $\mathbf{a}$ összege az elforgatott vektorok $\mathbf{b}$ összegével 72°-os szöget zár be. Az ötszög szabályossága miatt azonban $\mathbf{a}=\mathbf{b}$. Ez csak úgy lehet, ha a vektorösszeg $\mathbf{0}$.

15. Az $\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ vektorokat forgassuk el az O pont körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel. A továbbiakban a **14.** feladat megoldásához hasonlóan járunk el.

16. Legyen a keresett $A_1A_2A_3$ háromszögben F_1 az A_1A_2, F_2 az A_2A_3 és F_3 az A_2A_1 oldal felezőpontja, és O tetszőleges pontja. A **T 4.2** tétel alapján:

$\overrightarrow{OF}_1 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2)$, $\overrightarrow{OF}_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3)$, $\overrightarrow{OF}_3 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_1)$.
Ezekből $\overrightarrow{OF}_1 - \overrightarrow{OF}_2 + \overrightarrow{OF}_3 = \overrightarrow{OA}_1$. Ez alapján az A_1 csúcs megszerkeszthető; ebből pedig a másik kettő is.

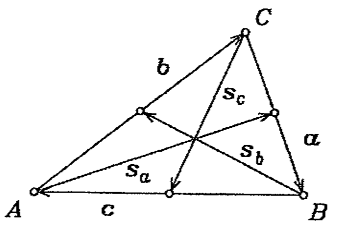
17. A keresett ötszög: $A_1A_2A_3A_4A_5$. Legyen F_i $(i = 1,2,3,4)$ az A_iA_{i+1} $(i = 1,2,3,4)$ oldal, F_5 az A_5A_1 oldal felezőpontja, az O pedig egy tetszőleges pont az ötszög síkjában. A **T 4.2** tétel alapján $\overrightarrow{OF}_i = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_i + \overrightarrow{OA}_{i+1})$ $(i = 1,2,3,4)$ és $\overrightarrow{OF}_5 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_5 + \overrightarrow{OA}_1)$. Ezekből $\overrightarrow{OF}_1 - \overrightarrow{OF}_2 + \overrightarrow{OF}_3 - \overrightarrow{OF}_4 + \overrightarrow{OF}_5 = \overrightarrow{OA}_1$. Ez alapján az A_1 (és ebből a többi) csúcs megszerkeszthető.

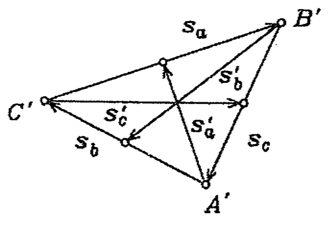
18. A keresett sokszög: $A_1A_2\dots A_{2n+1}$. Legyen F_i $(i = 1,2,\dots,2n)$ az A_iA_{i+1} $(i = 1,2,\dots,2n)$ oldal, F_{2n+1} az $A_{2n+1}A_1$ oldal felezőpontja, az O pedig egy tetszőleges pont a sokszög síkjában. Az előző feladat megoldásához hasonlóan eljárva, $\overrightarrow{OF}_1 - \overrightarrow{OF}_2 + \overrightarrow{OF}_3 - \cdots - \overrightarrow{OF}_{2n} + \overrightarrow{OF}_{2n+1} = \overrightarrow{OA}_1$ adódik.

19. Jelölje F_1 a BC, F_2 az AC és F_3 az AB oldal felezőpontját. A **T 4.2** tétel és a vektorösszeadás definíciója alapján:
$\overrightarrow{AF}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\overrightarrow{BF}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{CF}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{b}$.

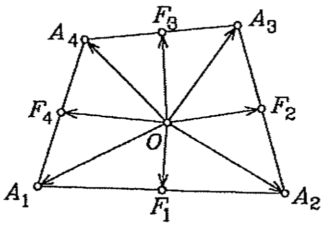
20. Az előző feladat jelöléseit alkalmazva, a három súlyvonalvektor összege $\overrightarrow{AF}_1 + \overrightarrow{BF}_2 + \overrightarrow{CF}_3 = \mathbf{0}$. A **7.** feladat alapján ez azt jelenti, hogy a három súlyvonallal, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög.

21. Az ábra szerinti ABC háromszög oldalvektorainak irányítása legyen olyan, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ teljesüljön; súlyvonalvektorai pedig $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ és $\mathbf{s}_c$. Jelöljük $A'B'C'$-vel az előbbi vektorok hosszával szerkesztett háromszöget, melynél az oldalvektorok irányítása olyan, mint az előbb, vagyis $\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_b + \mathbf{s}_c = \mathbf{0}$. Az $A'B'C'$ háromszög $\mathbf{s}'_a$, $\mathbf{s}'_b$ és $\mathbf{s}'_c$ súlyvonalvektorainak hosszával szerkesztett háromszög legyen $A''B''C''$. (Ezek a szerkesztések az előző feladat alapján elvégezhetők.)
A vektorösszeadás definíciója alapján egyrészt (az ABC háromszögből)
$\mathbf{s}_a = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s}_b = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a}$, $\mathbf{s}_c = \frac{1}{2}\mathbf{c} + \mathbf{b}$, másrészt (az $A'B'C'$ háromszögből)
$\mathbf{s}'_a = \frac{1}{2}\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_c$, $\mathbf{s}'_b = \frac{1}{2}\mathbf{s}_b + \mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}'_c = \frac{1}{2}\mathbf{s}_c + \mathbf{s}_b$. Behelyettesítés után
$\mathbf{s}'_a = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\frac{3}{4}\mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.
Mivel $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{s}'_a = -\frac{3}{4}\mathbf{a}$. Hasonlóan: $\mathbf{s}'_b = -\frac{3}{4}\mathbf{b}$ és $\mathbf{s}'_c = -\frac{3}{4}\mathbf{c}$.
Ezekből az ABC és $A''B''C''$ háromszögek hasonlósága következik.



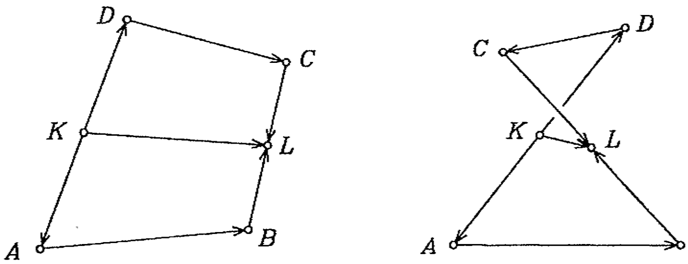


22. Jelöljön O egy tetszőlegesen felvett pontot. (L. ábra.) $\overrightarrow{OF}_1 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2)$, $\overrightarrow{OF}_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3)$, $\overrightarrow{OF}_3 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4)$, $\overrightarrow{OF}_4 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_4 + \overrightarrow{OA}_1)$.

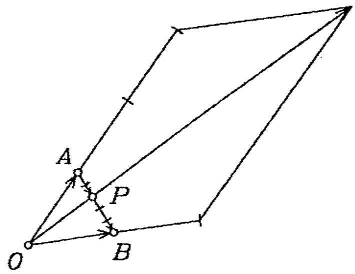


Az első két egyenletből $\overrightarrow{F_2F}_1 = \overrightarrow{OF}_1 - \overrightarrow{OF}_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_3)$, a harmadikból és a negyedikből pedig $\overrightarrow{F_3F}_4 = \overrightarrow{OF}_4 - \overrightarrow{OF}_3 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_3)$ következik. Kaptuk, hogy $\overrightarrow{F_2F}_1 = \overrightarrow{F_3F}_4$ ezért az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma.

23. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$, másrészt $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL}$. (L. ábra.) Ezt a két egyenletet összeadva és figyelembe véve, hogy $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CL} = \mathbf{0}$, a bizonyítandó állítást kapjuk.



24. $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ (l. ábra). Ezért $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AP} = \frac{n}{m+n}\mathbf{a} + \frac{m}{m+n}\mathbf{b}$.



25. Legyen F_a az ABC háromszög A csúccsal szemközti oldalának felezőpontja, és S_a az AF_a súlyvonalnak az F_a végponthoz közelebbi harmadoló pontja. Hasonló a jelentésük az S_b és S_c pontoknak. Legyen $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$. A **24.** feladatot alkalmazva az $m = 1$, $n = 2$ esetre

$$\overrightarrow{AS}_b = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2+1} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AS}_c = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Ugyanakkor a **T 4.2** tételből következik, hogy $\overrightarrow{AS}_a = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$. Így az S_a, S_b

és S_c pontok egybeesnek, és a súlyvonalak harmadolva metszik egymást.

26. $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

27. Az előző két feladat bármelyike alapján $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$, $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}(\mathbf{c} - 2\mathbf{b})$. Ezekből $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$.

28. I. rész: „csak akkor". Ha S a súlypontja az ABC háromszögnek, akkor az előző feladat eredménye szerint $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$.
II. rész: „akkor". Kontrapozíciós bizonyítást végzünk. Azt mutatjuk meg, hogy ha valamely P pont nem súlypontja az ABC háromszögnek (azaz $P \neq S$), akkor $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} \neq \mathbf{0}$.
Tekintsük a következő vektorösszegeket: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{PS}$. Ezeket összeadva és figyelembe véve az S súlypontra vonatkozó $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$ egyenlőséget, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PS} \neq \mathbf{0}$.

29. Alkalmazzuk a **26.** feladat eredményét az $O = S$ pontra és az $A_1B_1C_1$ háromszögre. Ekkor $3\overrightarrow{SS_1} = \overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SB_1} + \overrightarrow{SC_1}$. A **28.** feladat alapján $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \mathbf{0}$. E két utóbbi összefüggésből, valamint az $\overrightarrow{SA_1} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{SC_1} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{CC_1}$ egyenlőségekből a bizonyítandó állítás adódik.

30. Az előző feladat megoldása és az azt követő 2. megjegyzés alapján az ABC, illetve az $A_1B_1C_1$ háromszög S, illetve S_1 súlypontja akkor és csak akkor közös, ha $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}$.
Megjegyzés: Mivel a háromszögek csúcsainak jelölése tetszőleges, ezért ez az egyenlőség az alábbiak bármelyikével helyettesíthető:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CB_1} = \mathbf{0}, \qquad \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}, \qquad \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CA_1} = \mathbf{0}.$$

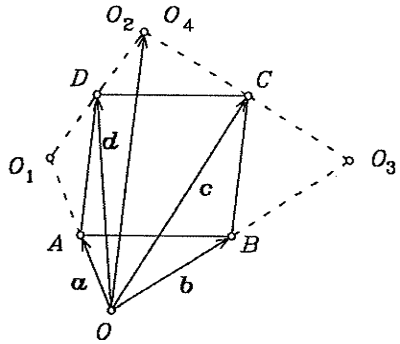
$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CB_1} = \mathbf{0},$$

A **7.** feladatból következik, hogy az előbbi vektorhármasok egy-egy háromszög oldalvektorai lehetnek, ezért három ilyen vektor komplanáris még akkor is, ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek síkjai különböznek.

31. Legyen az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának súlypontja S_D, az O pedig a tér tetszőleges pontja. Az előző feladat szerint $\overrightarrow{OS_D} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Ha S jelöli a DS_D szakasznak az S_D ponthoz közelebbi negyedelő pontját, akkor a **24.** szerint (az $m = 3$, $n = 1$ esetre alkalmazva) $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OS_D}\right)$.
Ezekből $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ következik. Ha más lap súlypontjából indulunk ki, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk. Ezek szerint az S pont mind a négy súlyvonalon rajta van, és negyedeli azokat.

32. Legyen F_A az AA_1, F_B a BB_1, F_C a CC_1 és F_D a DD_1 szakasz felezőpontja. A **23.** feladat alapján $\overrightarrow{F_AF_D} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_1D_1})$ és $\overrightarrow{F_BF_C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1})$. Mivel paralelogrammákról van szó, ezért $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{B_1C_1}$. Ezekből $\overrightarrow{F_AF_D} = \overrightarrow{F_BF_C}$ következik. Tehát az $F_AF_BF_CF_D$ négyszög paralelogramma.

33. Legyen $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$ (l. ábra). A tükrözés miatt egyrészt $\overrightarrow{OO_1} = 2\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OO_2} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{a})$, másrészt $\overrightarrow{OO_3} = 2\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OO_4} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{b})$. Mivel az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ezért $\mathbf{d}-\mathbf{a} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$. Ebből $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_4}$ következik. Tehát O_2 és O_4 egybeesik.



34. I. A feltétel szükséges. Valóban, ha A, B, C és D egy paralelogramma csúcsai, akkor az előbbi feladat szerint rendre O_2 és O_4 egybeesik.

II. A feltétel elegendő. Ha O_2 és O_4 egybeesik, akkor az ábra szerinti O_1, O_2, O_3, O_4 pontnégyes olyan, hogy az A az O_1O, a B az OO_3, a C az $O_3O_4 = (O_3O_2)$ és D az $O_2O_1 (= O_4O_1)$ szakasz felezőpontja. A **22.** feladat megoldásához hasonló gondolatmenetet követve kapjuk, hogy az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai.

35. I. Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ kollineárisak, akkor a **T 4.5** tétel alapján valamely k számra $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$, azaz $p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} = kq_1\mathbf{a} + kq_2\mathbf{b} + kq_3\mathbf{c}$. Ebből a **T 4.9** tétel alapján kapjuk, hogy $p_1 = kq_1$, $p_2 = kq_2$, $p_3 = kq_3$. Azaz $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$.

II. Ha pedig $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}(= k)$, akkor a $p_1 = kq_1$, $p_2 = kq_2$, $p_3 = kq_3$ értékekkel kapjuk, hogy
$\mathbf{v} = p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} = kq_1\mathbf{a} + kq_2\mathbf{b} + kq_3\mathbf{c} = k(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b} + q_3\mathbf{c}) = k\mathbf{w}$. Ez a **T 4.5** tétel miatt azt jelenti, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ kollineárisak.

36. A **T 4.5** tételt és a **35.** feladatot alkalmazzuk.
a) $\alpha = 6$. b) $\alpha = 0$. c) Minden valós α-ra kollineárisak.
d) Nincs olyan α, amelyre kollineárisak.
e) Csak az $\alpha = \frac{1}{9}$, $\beta = \frac{1}{3}$ esetben kollineárisak.
f) Nincs olyan α és β, amelyekre kollineárisak.
g) Csak az $\alpha = \beta = 0$ esetben kollineárisak.
h) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha $1\alpha = \beta$.
i) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\alpha\beta = 2$.
j) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\beta = -3$. Az α bármilyen valós szám lehet.

37. A **D 4.4** definíciót alkalmazzuk.
a) Az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, mert zérusvektort tartalmaz.

b) Az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, mert az $\mathbf{s}$ vektor az $\mathbf{r}$ vektornak számszorosa (-2-szerese).

c) Azt kell eldöntenünk, hogy $k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{s} + k_3\mathbf{t} = \mathbf{0}$ teljesülhet-e úgy is, hogy a k_1, k_2, k_3 számok között van zérustól különböző.

Az $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ értékeit beírva az előbbi egyenletbe, majd rendezve: $(k_1 + k_3)\mathbf{a} + (k_1 + k_2)\mathbf{b} + (k_1 + k_2 + k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineáris függetlensége miatt ez csak úgy állhat fenn, hogy

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek csak a $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ számhármas a megoldása. Ezért az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független.

d) A $k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{s} + k_3\mathbf{t} = \mathbf{0}$ egyenletből a c) részhez hasonlóan kapjuk, hogy $(k_2 + k_3)\mathbf{a} - (k_2 + k_3)\mathbf{b} + (k_1 - k_2 + k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$, azaz

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Ezekből $k_1 = -2k_3$ és $k_2 = -k_3$ következik. Ezért például a $k_3 = 1$, $k_2 = -1$, $k_1 = 2$ értékekkel $-2\mathbf{r} - \mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$. Tehát az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan függő.

e) Lineárisan függő. f) Lineárisan független.

g) Lineárisan függő. h) Lineárisan függő.

38. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = [9, 8, -5]$, $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = [10, 12, -8]$,

$\overrightarrow{AD_1} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = [6, 10, -5]$, $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [7, 7, -\frac{11}{2}]$,

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = \frac{1}{2}[11, 16, -9]$, $\overrightarrow{AK} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} = [8, 11, -\frac{13}{2}]$,

$\overrightarrow{FH} = \frac{1}{4}(-3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = [-\frac{3}{2}, 1, 1]$, $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = [\frac{5}{2}, 3, -2]$.

39. A **30.**, illetve a **31.** feladat alapján

$\overrightarrow{BS_B} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{a}) = \frac{1}{3}[-4, -6, 20]$,

$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}[-4, -6, 20]$.

40. a) Ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok egyező irányúak, akkor az aránypárból $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ következik; ellentétes irány esetén pedig $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Vegyük figyelembe, hogy $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ezeket az előbbi egyenletekbe helyettesítve kapjuk, hogy az első esetben $\mathbf{c} = \frac{5}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{a} = \frac{1}{3}[-1, 17, 31]$, a második esetben pedig $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{1}{3}[7, 13, 11]$.

A b) és c) és d) feladatok megoldását az előbbihez hasonlóan végezzük.

b) $\mathbf{c} = [1, \frac{3}{2}, 7]$ vagy $\mathbf{c} = [3, \frac{5}{2}, 1]$.

c) $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[3, 14, -1]$ vagy $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[-3, 10, 7]$.

d) Ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ egyirányúak, akkor

$\mathbf{c} = \frac{m+n}{m}\mathbf{b} - \frac{n}{m}\mathbf{a} = \frac{1}{m}\left[(m+n)b_1 - na_1, (m+n)b_2 - na_2, (m+n)b_3 - na_3\right]$.
Ha különböző irányúak, akkor
$\mathbf{c} = \frac{m-n}{m}\mathbf{b} + \frac{n}{m}\mathbf{a} = \frac{1}{m}\left[(m-n)b_1 + na_1, (m-n)b_2 + na_2, (m-n)b_3 + na_3\right]$.

41. A **T 4.2** tétel alapján: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 2\mathbf{d}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c} = 2\mathbf{e}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c} = 2\mathbf{f}$. Ezekből $\mathbf{a} = \mathbf{d}-\mathbf{e}+\mathbf{f} = [5,4,-6]$, $\mathbf{b} = \mathbf{d}+\mathbf{e}-\mathbf{f} = [3,2,2]$ és $\mathbf{c} = -\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f} = [1,0,-8]$ következik. A **30.** megoldást alkalmazva
$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{1}{3}(\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}) = [3,2,-6]$.

42. A **25.** és **31.** feladatok megoldása alapján:

$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8}(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3) = \frac{9}{4}[1,1,1]$, $\quad \overrightarrow{AS_4} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3) = [3,3,3]$,

$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_3) = [6,0,-3]$, $\quad \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3) = [3,3,15]$,

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(-\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3) = [0,6,-3]$, $\quad \overrightarrow{BC} = 3(\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_2) = [-3,3,18]$,

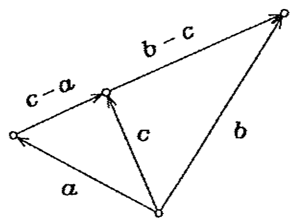
$\overrightarrow{BD} = 3(\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1) = [-6,6,0]$, $\quad \overrightarrow{CD} = 3(\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1) = [-3,3,-18]$.

43. a) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak; ezért, a **T 4.8** tétel alapján, $\mathbf{v}$ előállítható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű. Az $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ egyenletrendszerből:
$\mathbf{i} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\mathbf{k} = \mathbf{a}-\mathbf{c}$. Ezeket a $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ egyenletbe írva kapjuk, hogy $\mathbf{v} = 11\mathbf{a}-\mathbf{b}-7\mathbf{c}$.
b) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas komplanáris, és a $\mathbf{v}$ vektor nincs a síkjukban. Ezért a $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.
c) Az a) részhez hasonlóan járunk el. $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}+\mathbf{b}-3\mathbf{c}$.

44. Első megoldás. A **T 4.6** tétel alapján $\mathbf{c}$-nek

(1) $\qquad \mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$

alakú előállítása lehetséges és egyértelmű.



I. A feltétel szükséges. Tegyük fel, hogy a vektorok végpontjai egy egyenesen vannak. (**L. ábra!**) Ekkor, valamely λ számmal $\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}-\mathbf{c}$. Ebből

(2) $\qquad \mathbf{c} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{a} + \frac{1}{\lambda+1}\mathbf{b}$

következik, ha $\lambda \neq -1$. (A $\lambda = -1$ esetben $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, ami ellentmond feltevésünknek.) A (2)-ből és (1)-ből a **T 4.6** és **T 4.9** tételek alapján $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ és $\beta = \frac{1}{\lambda+1}$ adódik. Tehát $\alpha+\beta = 1$.
II. A feltétel elegendő. Tegyük fel, hogy $\alpha+\beta = 1$. Ekkor (1) miatt $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{b}$. Ebből egyrészt $\mathbf{c}-\mathbf{a} = (\alpha-1)\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{b}$, másrészt $\mathbf{b}-\mathbf{c} = -\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ következik. E két utóbbiból $\alpha \neq 0$ esetén $\mathbf{c}-\mathbf{a} = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ adódik, az $\alpha = 0$ esetben pedig $\mathbf{b}-\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Tehát (mindkét esetben) $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ kollineáris vektorok. Ezért $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ végpontjai egy egyenesen vannak.
Második megoldás. Az (1) egyenlőség mindkét oldalából vonjuk ki az $\mathbf{a}$ vektort, majd az így kapott kifejezést alakítsuk át: $\mathbf{c}-\mathbf{a} = \beta(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\alpha+\beta-1)\mathbf{a}$. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjaira illeszkedő egyenes tartalmazza a $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ vektort. Ahhoz, hogy tartalmazza a $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ vektort is, szükséges és elégséges, hogy $\alpha+\beta-1 = 0$ teljesüljön.

45. A feladatbeli vektoregyenlet alapján: $\mathbf{d}-\mathbf{a} = \beta(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{c}-\mathbf{a})+$

$+(\alpha+\beta+\gamma-1)\mathbf{a}$. A továbbiakban az előző feladat második megoldásához hasonló gondolatmenetet követünk.

46. Akkor és csakis akkor, ha $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

47. Az ABC háromszögben legyen $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$ (l. **ábra**). Messe a B-ből induló szögfelező az AC oldalt a D pontban. Az előző feladat megoldása alapján a $\overrightarrow{BD}$ szögfelező vektorral egyező irányú az $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$ vektor. Ezért valamely λ-val

(1) $$\overrightarrow{BD} = \lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}\right).$$

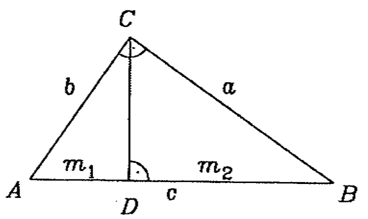
Másrészt,

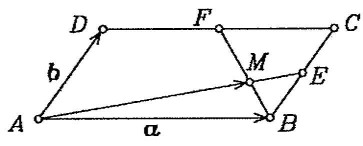
(2) $$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{c} + \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\mathbf{a} + \left(1 - \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\mathbf{c}.$$

Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ nem kollineáris, ezért (1), (2) és a **T 4.9** tétel alapján $\dfrac{\lambda}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$ és $\dfrac{\lambda}{|\mathbf{c}|} = 1 - \dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$. Ezek hányadosát véve kapjuk, hogy $\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{c}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|}$.

48. Az előző feladat szerint $|\overrightarrow{CD}| : |\overrightarrow{AD}| = |\mathbf{a}| : |\mathbf{c}|$. Alkalmazva a **24.** feladatot az $m = |\mathbf{a}|$, $n = |\mathbf{c}|$ esetre: $\overrightarrow{BD} = \dfrac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{c}|}\mathbf{a} + \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{c}|}\mathbf{c}$.

49. Ismeretes, hogy minden derékszögű háromszögben, az ábra jelölései szerint $a^2 = m_2 c$ és $b^2 = m_1 c$. Ezekből $m_1 : m_2 = b^2 : a^2$ következik. Alkalmazva a **24.** feladatot az $m = b^2$, $n = a^2$ esetre: $\overrightarrow{CD} = \frac{b^2}{c^2}\overrightarrow{CB} + \frac{a^2}{c^2}\overrightarrow{CA}$.





50. Legyen k_1 és k_2 az a két szám, amelyekre

(1) $$\overrightarrow{AM} = k_1\overrightarrow{AE}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{BM} = k_2\overrightarrow{BF}.$$

Erre a két számra az $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{BF} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$ egyenlőségek alapján $\left(k_1 + \frac{k_2}{2} - 1\right)\mathbf{a} + \left(\frac{k_1}{2} - k_2\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ adódik. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, ezért $k_1 + \frac{k_2}{2} - 1 = 0$ és $\frac{k_1}{2} - k_2 = 0$, és ebből az egyenletrendszerből $k_1 = \frac{4}{5}$. Az (1)-be helyettesítve: $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$.

51. A **D 4.13** definíciót alkalmazzuk.
a) 6. b) 9. c) 16.
d) Mivel a skaláris szorzás kommutatív és a vektorösszeadásra nézve disztributív, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = 9 + 2\cdot 6 + 16 = 37$.
e) 13. f) −13. g) 217.

52. a) −62. b) 34. c) 997.

53. Vegyük figyelembe, hogy $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)^2 = 0$ és $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$.

54. $\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{bc} = -13$.

55. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| = \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2} = 10$.

56. A bal oldalon végezzük el a négyzetre emelést, majd vonjunk össze. Geometriai jelentés: a paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

57. Az állítás helyessége a **D 4.13** definícióból következik. Az $\mathbf{ab} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ (illetve, az $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$) egyenlőség akkor teljesül, ha **a** és **b** ellentétes (ill. egyező) irányúak.

58. A **T 4.16** tétel alapján pontosan akkor, ha $\mathbf{a}^2 - \alpha^2\mathbf{b}^2 = 0$; így $\alpha = \dfrac{\pm|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

59. Skalárisan megszorozva mindkét oldalt az **a** vektorral, majd egyszerűsítve az $\mathbf{a}^2\ (\neq 0)$ számmal, a **T 4.16** tétel alapján az állítás helyessége adódik.

60. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el.

61. A **T 4.16** tétel alapján $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

62. Legyen a két vektor szöge α. A **D 4.13** definíció alapján

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{b}|}.$$

A nevező kiszámításához az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{b}|)^2$ összefüggést vegyük figyelembe. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

63. a) Négyzetre emelve mindkét oldalt, $\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2$; így $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\angle = -\dfrac{|\mathbf{b}|}{2|\mathbf{a}|}$.
b) $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\angle = 0$.

64. Az $(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(7\mathbf{a}-5\mathbf{b}) = 0$ és $(\mathbf{a}-4\mathbf{b})(7\mathbf{a}-2\mathbf{b}) = 0$ egyenletekből

$$\mathbf{ab} = \tfrac{1}{16}\left(15\mathbf{b}^2 - 7\mathbf{a}^2\right) \quad \text{és} \quad \mathbf{ab} = \tfrac{1}{30}\left(7\mathbf{a}^2 + 8\mathbf{b}^2\right).$$

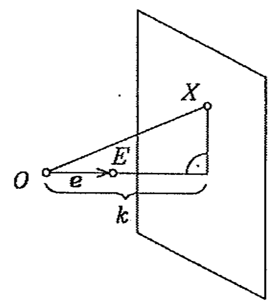
Ebből az egyenletrendszerből $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$, majd ezt felhasználva $\mathbf{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^2$ és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ következik. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor szögük tetszőleges lehet, ha pedig $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\angle = \frac{1}{2}$.

65. A **D 4.13** definíciót és a **T 4.16** tételt alkalmazva $t = 40$ adódik.

66. A **T 4.17** tétel és feltevésünk alapján

$$\left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\mathbf{a}\right| = \left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\mathbf{b}\right| \qquad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}).$$

Ez $\mathbf{ba} = \mathbf{ab}$ miatt ekvivalens azzal, hogy $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$, vagy **a** és **b** merőlegesek egymásra.



67. A **T 4.17** tétel alapján ezek az X pontok annak a síknak a pontjai, amely merőleges az e vektorra és az O ponttól k távolságra halad, mégpedig úgy, hogy metszi az O-ból induló és E-n átmenő félegyenest. (Más ilyen tulajdonságú pont nincs (L. ábra).)

68. A **D 4.13** definíciót és a **T 4.14**, **T 4.15** tételeket alkalmazzuk.
a) $\frac{7}{3\sqrt{19}}$. b) $-\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{38}}$. c) 0.

69. A **T 4.14** és a **T 4.16** tételeket alkalmazzuk.
$z = -18$.

70. a) Az $\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \cos\alpha$ képletbe helyettesítve: $\frac{2t}{\sqrt{t^2+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{2}$ egyenlethez jutunk; ebből $t = \sqrt{\frac{6}{5}}$.
b) $t = 0$. c) Nincs ilyen t.

71. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ kollineáris, ezért valamely valós t-re $\mathbf{x} = [2t, t, -t]$. Az $\mathbf{ax} = 3$ egyenletből $t = \frac{1}{2}$, ezért $\mathbf{x} = [1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

72. Legyen $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$; ekkor $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. A **D 4.13**, **T 4.14** és **T 4.15** alkalmazásával, az $\mathbf{ae}$ és $\mathbf{be}$ szorzatokból két újabb egyenletet kapunk az e_1, e_2, e_3 ismeretlenekre: $e_1 - e_3 = 1$ és $e_1 + e_2 - e_3 = 1$.
Két ilyen egységvektor van: $[1,0,0]$ és $[0,0,-1]$.

73. Jelöljük a két meghatározandó vektort $\mathbf{a}_p$-vel, illetve $\mathbf{a}_m$-mel, és alkalmazzuk a **T 4.17** tételt!

$$\mathbf{a}_p = \left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\mathbf{a}\right| \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = [2,-1,2], \qquad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p = [1,3,1].$$

74. $\mathbf{ac} = 0$. A vetületvektorok összege: $\frac{5}{9}[1,2,2]$.

75. a) Téglalap két szomszédos oldalvektora.
b) Rombusz két szomszédos oldalvektora.
c) Egyiknek sem lehet két szomszédos oldalvektora.

76. $\mathbf{x} = [-4, 2, -4]$. **77.** $\mathbf{x} = [0, \sqrt{2}, \sqrt{2}]$. **78.** $\mathbf{x} = [-3,3,3]$.

79. Legyen $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$. Az $\mathbf{x}$ egységvektor, ezért

(1) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

A feltevés miatt $(\mathbf{a},\mathbf{x})_\angle = (\mathbf{b},\mathbf{x})_\angle = (\mathbf{c},\mathbf{x})_\angle = \alpha$, ezért

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{ax}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{bx}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{cx}}{|\mathbf{c}|}.$$

Ezekből az

(2) $$7x_1 - x_2 = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3,$$

(3) $$7x_1 - x_2 = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

egyenleteket kapjuk. Az (1), (2), (3) egyenletrendszer megoldásával adódik, hogy két ilyen egységvektor van: $\frac{1}{5\sqrt{3}}[7,-1,5]$ és $-\frac{1}{5\sqrt{3}}[7,-1,5]$.
A szögek koszinuszai: $\sqrt{\frac{2}{3}}$ és $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

80. Az

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\mathbf{v}\right| = 1\,, \quad \left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\mathbf{v}\right| = \sqrt{2}$$

egyenletrendszerből a $\mathbf{v}$ vektorra a következő megoldásokat kapjuk

$$[3,-1],\ [-3,1],\ [13,-11],\ [-13,11].$$

81. Az előző feladat megoldásához hasonlóan, a $\mathbf{v}$ vektorra a következő nyolc megoldást kapjuk: $[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2]$, $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2]$, $[\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -4]$, $[-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 4]$, $[-6, -2, 7]$, $[6, 2, -7]$, $[3, 5, -1]$, $[-3, -5, 1]$.

82. Négy ilyen $\mathbf{e}$ vektor van: $[0,1,0]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $[0,-1,0]$, $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

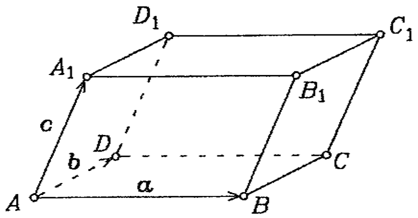
83. Két ilyen vektor van: $[3,1,0]$ és $[-3,-1,0]$.

84. Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a másik három élvektort: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ezeket a feladatbeli kifejezés jobb oldalába helyettesítve, majd elvégezve a szorzást és az összevonást, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ adódik.

85. Ha pl. az AB és CD, illetve az AD és BC merőleges élpárok, akkor $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ és $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Ekkor az előző feladat alapján $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, azaz $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DB}$ is merőleges élpár.

86. Az O középpontú kör egy átmérőjének végpontjai A és B. Legyen P a kör (A-tól és B-től különböző) tetszőleges pontja. Ha $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b}$, akkor $\overrightarrow{PB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, ezért $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0$.

87. Használjuk az ábra jelöléseit. A négy testátló-vektor: $\overrightarrow{AC}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BD}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA}_1 = \mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DB}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Ezekből: $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b})^2 = 4(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$.



88. A **T 4.8** tétel szerint a $\mathbf{v}$ vektor előállítható valamely k_1, k_2, k_3 számokkal $\mathbf{v} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c}$ alakban. Az egyenlet mindkét oldalát (skalárisan) megszorozva $\mathbf{v}$-vel, majd figyelembe véve a feltételekből következő $\mathbf{av} = \mathbf{bv} = \mathbf{cv} = 0$ egyenlőségeket, $\mathbf{v}^2 = 0$ adódik, ami csak úgy teljesülhet, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

89. Jelölje O az $ABCD$ tetraéder köré írt gömb középpontját, r a gömb sugarát; továbbá legyen $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$. Nyilvánvaló, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = r$.

I. „csak akkor": Tegyük fel, hogy a tetraéder magasságvonalai egy közös M ponton haladnak át. Kimutatjuk, hogy a szemközti élvektorok merőlegesek egymásra. Az M magasságpont rajta van mind a négy magasságvonalon, ezért

(1) $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{CB}$,

(2) $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AC}$,

(3) $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{DC}$.

Az $\overrightarrow{OM}$ vektort $\mathbf{m}$-mel jelölve, az (1) összefüggésekből következik, hogy

(4) $(\mathbf{m}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$ és $(\mathbf{m}-\mathbf{d})(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$.

II. „akkor": Kimutatjuk, hogy ha a szemközti élvektorok merőlegesek egymásra, akkor a magasságvonalak egy közös M ponton haladnak át, melyre

$$\mathbf{m}=\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}).$$

Ehhez azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$, illetve a $\overrightarrow{DM}$ vektor merőleges rendre a BCD, ACD, ABD, illetve az ABC síkra. Az $\overrightarrow{AM}=\mathbf{m}-\mathbf{a}$ vektor merőleges a BCD síkra, ha merőleges annak két, nem párhuzamos vektorára. Ez teljesül, mert a $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{DB}=\mathbf{b}-\mathbf{d}$ vektorra

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB}=(\mathbf{m}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\frac{1}{2}\left[\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2+(\mathbf{d}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c})\right]=0$ és

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DB}=(\mathbf{m}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=\frac{1}{2}\left[\mathbf{b}^2-\mathbf{d}^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})(\mathbf{a}-\mathbf{c})\right]=0$,

hiszen $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=|\mathbf{d}|$ és $\overrightarrow{AD}=(\mathbf{d}-\mathbf{a})\perp(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\overrightarrow{CB}$, illetve $\overrightarrow{CA}=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\perp(\mathbf{b}-\mathbf{d})=\overrightarrow{DB}$. Ezekből következik, hogy az M pont rajta van az A csúcshoz tartozó magasságvonalon. Ugyanígy igazolható, hogy az M pont illeszkedik a másik három magasságvonalra is.

Megjegyzés: A **31.** feladat szerint, az O pontból a tetraéder S súlypontjába mutató vektor $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Másrészt az előbb beláttuk, hogy ha az M magasságpont létezik, akkor $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Ezért igaz a következő: Ha egy tetraédernek létezik magasságpontja, akkor a tetraéder köré írt gömb O középpontja, valamint a tetraéder S súlypontja és M magasságpontja egy egyenesen van, és az OM szakasz felezőpontja az S pont.

90.

$\times$	0	i	j	k
0	0	0	0	0
i	0	0	k	−j
j	0	−k	0	i
0	0	j	−i	0

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, ami könnyen megjegyezhető, mert mindhárom egyenlőségben ciklikusan egymás után szerepelnek az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok. A fordított sorrendű szorzatok: $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$.

91. A **D 4.18** definíció és a **T 4.23** tétel alapján:

a) $-2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. b) $-3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

c) $6(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. d) $2(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+2(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

e) $\mathbf{0}$. f) $16(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-10(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+4(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

92. Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorok definíciója, ill. a **D 4.12** és **D 4.18** definíciók alapján:
a) 1. b) 36. c) 49.

93. A **T 4.23** tétel alapján: $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(4\mathbf{a}-2\mathbf{b})=-16(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, ezért $T'=16|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=16T$.

94. A **T 4.23** tétel alapján $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ felírható $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$ alakban is, ami nemcsak az $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ esetben teljesül (hanem minden olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$-re, amelyre

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = k\mathbf{c}$, így a felírt egyenlőségből általában nem következik hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

95. A feltevésből $\mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ következik. Ezt helyettesítsük a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ kifejezésekbe. A **T 4.23** és **T 4.20** tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

96. A **T 4.20** tétel alapján a $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ feltevésekből következik, hogy $\mathbf{v}$ az $\mathbf{a}$-val is és a $\mathbf{b}$-vel is egyező állású. Ebből viszont $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ esetén az adódik, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ kollineárisak. Ez ellentmond feltevésünknek.

97. A **T 4.23** tételből és az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, illetve $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ egyenlőségekből $\mathbf{0} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b}$ következik. Az előbbihez hasonlóan, a $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, illetve a $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenlőségből $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$, illetve $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ adódik. Az előbbi feladat szerint ezek egyidejűleg csak akkor állhatnak fenn, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

98. Az első egyenletből kivonva a másodikat, majd zérusra redukálva a kapott egyenleteket, a **T 4.23** tétel alapján $(\mathbf{a} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ adódik. A **T 4.20** tétel alapján ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ egyállásúak.

99. Figyelembe véve a **T 4.23** tételt és azt, hogy $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ és a $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ átalakítás után kapjuk, hogy $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$. Mivel a három vektor kezdőpontja közös, ezért ez utóbbi egyenletből, a **T 4.20** tétel alapján, következik, hogy a vektorok végpontjai egy egyenesen vannak.

100. A **D 4.18** definíció szerint az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorra, a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektor pedig a $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorra merőleges. Mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ kollineárisak, ezért az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok mindegyike merőleges az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorra. Tehát komplanárisak.

101. A szögletes zárójeles kifejezésnél kezdve, kétszer alkalmazzuk a kifejtési tételt (**T 4.22**). A szorzat értéke: $|\mathbf{a}|^4\mathbf{b}$.

102. a) A három darab hármas vektori szorzatra alkalmazzuk a **T 4.22** tételt, és vegyük figyelembe a skaláris szorzás kommutativitását.
b) A **T 4.22** és **T 4.23** tételeket alkalmazzuk.

103. **T 4.22** tétel szerint $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$. Ugyanakkor $\mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, azaz $\mathbf{ab} = \mathbf{ac}$. Mivel $\mathbf{a}$ nem merőleges $\mathbf{b}$-re, ezért $\mathbf{ab}\,(= \mathbf{ac}) \neq 0$. Legyen $\mathbf{ab} = k\ (\neq 0)$. Ekkor $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = k(\mathbf{b} - \mathbf{c})$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ egyállásúak.

104. Mivel $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|\ (= 7)$, ezért $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lehet egy kocka két élvektora. A harmadik élvektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel párhuzamos és hossza $|\mathbf{a}| = 7$. A **T 4.21** tétel szerint

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = [14, 21, 42] = 7 \cdot [2, 3, 6].$$

Két vektor elégíti ki a feladat feltételeit: $[2, 3, 6]$ és $[-2, -3, -6]$.

105. Legyen α az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok szöge. A koszinusztétel alapján $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, s így $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Tehát $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = 6 \cdot \sqrt{15}$.

106. $m_a = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{11}{5}\sqrt{2}.$

107. Ha felbontjuk az a vektort egy e-vel párhuzamos $\mathbf{a}_p$ és egy e-re merőleges $\mathbf{a}_m$ vektor összegére, akkor $|\mathbf{a}_m| = |\mathbf{a}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{a})\angle = |\mathbf{e}\times\mathbf{a}|$. Mivel $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$ merőleges e és a síkjára, $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$ az e és a síkjában van és $|(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}| = |\mathbf{a}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{a})\angle$, ezért $\mathbf{a}_m = (\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$. Ez egyébként bizonyítható a **73**. feladat és a kifejtési tétel segítségével is: $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e}$ és $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{e})\times\mathbf{e} = \mathbf{e}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{e}) = (\mathbf{ee})\mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e} = \mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e}$, tehát $\mathbf{a}_m = (\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$. A **73**. feladat számadataival:

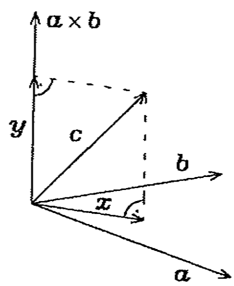
$$\mathbf{a}_m = \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\times\mathbf{a}\right)\times\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b} = [1,3,1]$$

és

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}-\mathbf{a}_m = [2,-1,1].$$

108. Legyen $\mathbf{x}$ az a, b vektorok síkjában lévő, $\mathbf{y}$ pedig erre a síkra merőleges összetevő. (L. ábra.) Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorral egyező állású egyik egységvektor:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1].$$



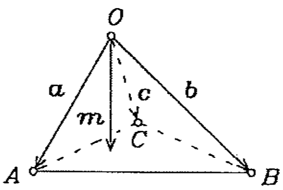
A **T 4.15** tétel és a **D 4.18** definíció alapján a síkra merőleges összetevő: $\mathbf{y} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{c})\mathbf{e} = \frac{1}{3}[1,-1,1]$. A síkban lévő összetevő: $\mathbf{x} = \mathbf{c}-\mathbf{y} = \frac{1}{3}[2,7,5]$.

109. A **T 4.19** szerint $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 3\sqrt{6}$. Ennek megoldásai: $t = 0$ és $t = -3$.

110. A négyszög területe $\frac{47}{2}$ egység.

111. Állítsuk elő a v vektort a és b lineáris kombinációjaként. A $\mathbf{v} = k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{b}$ előállításban a **T 4.9** tétel alapján: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. A terület $|2\mathbf{a}\times 3\mathbf{b}| = 6|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 18$ egység.

112. Az m magasságvektor az ábra szerinti $\mathbf{d} = (\mathbf{a}-\mathbf{c})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ vektorral egyező állású. A d-vel (tehát m-mel is) egyező állású (egyik) egységvektor: $\mathbf{d}/|\mathbf{d}| = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$. A magasság: $|\mathbf{m}| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



113. Az $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \mathbf{ab}$ feltétel ekvivalens azzal, hogy a két vektor szöge 45°.

114. a) $\mathbf{ab}(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \mathbf{abc}$.

b) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2} = \dfrac{1}{8}\big((\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})\big)(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \dfrac{1}{4}\mathbf{abc}$.

115. $\big((2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{b}-4\mathbf{c})\big)(2\mathbf{a}+5\mathbf{c}) = 6\mathbf{abc}$. Mivel a, b, c nem komplanárisak, ezért a **T 4.25** tétel szerint az adott vektorok sem komplanárisak.

116. Az egyenlet mindkét oldalát skalárisan c-vel szorozva $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{c} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{c} = 0$ miatt $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = 0$ adódik. A **T 4.25** tétel alapján ez azt jelenti, hogy a, b, c komplanárisak.

117. Az állítás helyessége a vektori, illetve a skaláris szorzat definíciója alapján belátható. Egyenlőség pontosan akkor van, ha **a**, **b** és **c** páronként merőlegesek.

118. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})\mathbf{t} = 27\mathbf{abc}$. Ezért $V' = 27V$.

119. A **T 4.27** tétel alapján a vegyes szorzat

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\alpha - 13.$$

A **T 4.25** tétel szerint a térfogat: $|\mathbf{abc}| = |-7\alpha - 13| = 10$. Ebből α lehetséges értékei: $-\frac{23}{7}$ és $-\frac{3}{7}$.

120. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha **a**, **b** és **c** komplanárisak. (L. **T 4.10** és **T 4.7**) Ennek megfelelően a **T 4.25** és **T 4.27** tételt alkalmazzuk.

a) Mivel az **abc** vegyes szorzat csak az $\alpha = -\frac{7}{4}$ értéknél zérus, ezért az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, ha $\alpha = -\frac{7}{4}$.

b) Minden α számra lineárisan függő, mert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

c) Minden α-ra lineárisan független.

d) Minden α-ra lineárisan független.

e) Minden α-ra lineárisan függő.

f) Ha α értéke 3, vagy -3, akkor lineárisan függő a vektorrendszer. Minden más esetben lineárisan független.

121. A **117.** feladat vagy a **T 4.27** tétel szerint: $\mathbf{abc} = 24$.

122. Az A csúcsból kiinduló három él: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A térfogat: $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = 8$.

123. Mivel $\overrightarrow{AD}$ és **d** egyállású vektorok, ezért valamely k számmal $\overrightarrow{AD} = k\mathbf{d} = [-k, 2k, k]$ teljesül. Az $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = 8$ egyenletből $|12k| = 48$ következik. A feltételt két vektor elégíti ki: $[-4, 8, 4]$ és $[4, -8, -4]$.

124. A feltételt két vektor elégíti ki: $[3, 1, -2]$ és $[-3, -1, 2]$. A magasság $\dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

125. $\mathbf{uvw} = \left[(u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c}) \times (v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c})\right](w_1\mathbf{a} + w_2\mathbf{b} + w_3\mathbf{c}) =.$

$$= \mathbf{abc} \cdot \left[u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)\right]$$

126. Az előző feladat szerint

$$\mathbf{abc} = \mathbf{uvw}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{uvw} = \mathbf{abc}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Szorozzuk össze ezt a két egyenletet, majd osszuk az így nyert egyenlet mindkét oldalát $(\mathbf{abc})(\mathbf{uvw})$-vel. (Ezt megtehetjük, mert mind a két vektorrendszer lineárisan független, így az **abc** és **uvw** vegyes szorzatok egyike sem nulla.) Osztás után a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

5. Analitikus térgeometria (megoldások)

1. Alkalmazzuk a **T 5.3** tételt:
$\overrightarrow{AB} = [2-1, -3+2, 0+3] = [1, -1, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [2, 3, -6]$, $\overrightarrow{AD} = [-2, 3, -9]$.

2. A P pontnak az origótól mért távolsága az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor hosszával egyenlő.
$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$, $|\overrightarrow{OB}| = 14$, $|\overrightarrow{OC}| = 13$, $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{195}$.

3. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{22}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{54}$; $|\overrightarrow{BC}| = 6$. Az ABC háromszög nem egyenlő szárú.
$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{18}$; $|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{46}$; $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{46}$. A DEF háromszög egyenlő szárú.
$|\overrightarrow{GH}| = |\overrightarrow{GK}| = |\overrightarrow{HK}| = \sqrt{2}$. A GHK háromszög egyenlő oldalú.

4. Legyen az x tengely keresett pontja $P(x, 0, 0)$. Ekkor $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x+3)^2 + 16 + 64} = 12$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -11$. Két pont elégíti ki a feladat feltételeit: $P_1(5, 0, 0)$, $P_2(-11, 0, 0)$.

5. A z tengely egy pontja: $P(0, 0, z)$. Az $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ egyenlőségből $\sqrt{1 + 9 + (z-7)^2} = \sqrt{25 + 49 + (z+5)^2}$ következik. Innen $z = -\frac{5}{3}$. A keresett pont: $P(0, 0, -\frac{5}{3})$.

6. $\overrightarrow{AB} = [-4, 8, -8]$; $\overrightarrow{AC} = [0, 2, 2]$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektor merőleges egymásra, tehát a három pont lehet egy téglalap három csúcsa.

7. A háromszög szögeit a szokásos módon jelölve

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}, \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}.$$

$\overrightarrow{AB} = [-4, 8, -8] = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC} = [-1, 2, -6] = -\overrightarrow{CA}$,
$\overrightarrow{BC} = [3, -6, 2] = -\overrightarrow{CB}$. Mivel $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} < 0$, ezért γ tompaszög.

8. a) A háromszög területe:

$$t = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}, \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [3, 2, 8], \quad t = \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

Az AB oldalhoz tartozó magasság: $m_{AB} = \dfrac{2t}{|\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{\dfrac{77}{21}} = \sqrt{\dfrac{11}{3}}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{7}{\sqrt{21 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{7}{18}}. \quad \sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}. \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{11}{7}}.$$

Megjegyzés: Mivel a feladat egyik kérdése miatt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ és $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ is kiszámolandó, kevesebb számolással jár a következő:

$t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$; $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 21$,
$\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = 6$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$ miatt $t = \frac{1}{2}\sqrt{21 \cdot 6 - 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{77}$.

b) $t = \dfrac{\sqrt{195}}{2}$, $m_{AB} = \sqrt{\dfrac{13}{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{13}{15}}$.

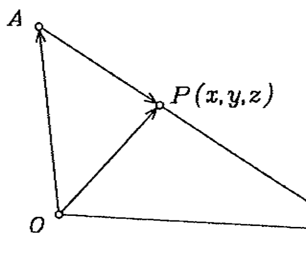
c) $t = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $m_{AB} = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{32}}$.

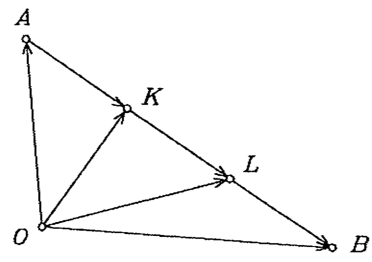
9. Emlékeztető: A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontja: $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$. A BC szakasz felezőpontja: $F_1(-1, 1, -1)$. Az AC szakasz felezőpontja: $F_2(-1, 1, 4)$. Az AB szakasz felezőpontja: $F_3(3, 2, 0)$.

Az A, B, illetve a C csúcsból kiinduló súlyvonal hossza: $|\overrightarrow{AF_1}| = \sqrt{53}$, $|\overrightarrow{BF_2}| = \sqrt{98}$, illetve $|\overrightarrow{CF_3}| = \sqrt{77}$.

10. Tekintsük a bal oldali ábrát! Itt az O pont a koordinátarendszer origóját jelöli. A feladatban megadott arányból következik, hogy $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ és ezért $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$. Ebből kapjuk, hogy
$[x, y, z] = [a_1, a_2, a_3] + \frac{m}{m+n}[b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3]$.

A kijelölt szorzásokat elvégezve: $P\left(\dfrac{na_1 + mb_1}{m+n}, \dfrac{na_2 + mb_2}{m+n}, \dfrac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$.





11. Tekintsük a jobb oldali ábrát. Itt K és L a két harmadoló pontot, az O pedig a derékszögű koordináta-rendszer origóját jelöli. Az előző feladat eredményét $m = 1$-gyel és $n = 2$-vel alkalmazva $K(2, 0, 3)$ adódik, $m = 2$-vel és $n = 1$-gyel pedig $L(0, 1, 4)$.

12. Az A pont tükörképe a B ponton legyen $A'(x', y', z')$.
a) Mivel a B pont az origó, ezért $A'(-3, -4, 1)$.

b) Az A pont az origó, ezért az $\overrightarrow{AB}$ vektor a B pontnak, az $\overrightarrow{AA'}$ vektor pedig az A' pontnak a helyvektora. Ezekből következik, hogy $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} = 2[3, 4, -1] = [6, 8, -2]$. A tükörkép: $A'(6, 8, -2)$.

c) Az AA' szakasznak felezőpontja a B pont. Ezért a **9.** megoldásnál leírtak alapján $\frac{-1+x'}{2}=2$, $\frac{-2+y'}{2}=-1$, $\frac{-5+z'}{2}=3$. Ezekből $A'(5,0,11)$.

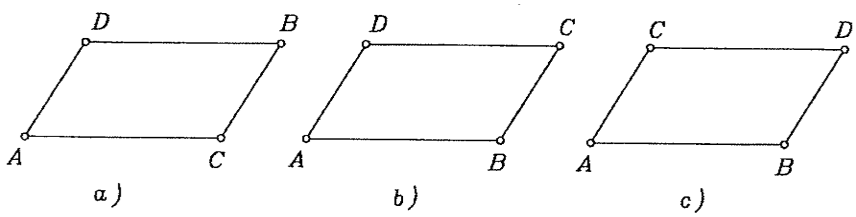
d) A c) részben leírottakhoz hasonlóan járjunk el. $A'(-5,-1,2)$.

13. a) A harmadik csúcs: $C(x,0,0)$. A háromszög területe: $t=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=5$. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[-10,x+7,9-3x]$. $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10x^2-40x+230}=10$. Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása. Ezért az x tengelyen nincs olyan C pont, amellyel az ABC háromszög területe 5 egység.

b) Két ilyen pont van: $C_1\left(0,0,\frac{51+\sqrt{261}}{18}\right)$, $C_2\left(0,0,\frac{51-\sqrt{261}}{18}\right)$.

14. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[y+1,-3,8-y]$, ezért $2t=\sqrt{2y^2-14y+74}$. Mivel a gyök alatti kifejezés az y minden értékére pozitív, mivel diszkriminánsa negatív. Így az előző egyenlet ekvivalens az $y^2-7y+37-2t^2=0$ egyenlettel. Ezért azok (és csak azok) a t értékek lesznek megfelelők, amelyekkel az előbbi másodfokú egyenletnek vannak valós megoldásai. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $49-4(37-2t^2)\geq 0$. Ebből $t\geq\sqrt{\frac{99}{8}}$ következik.

15. Legyen a negyedik csúcs $D(x,y,z)$. Három különböző eset van:



a) Az egyik átló az AB szakasz. Ekkor $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$. Áttérve koordinátás alakra: $[-4,2,0]+[x-3,y+1,z-2]=[-2,3,-6]$. Ebből a vektoregyenletből: $x=5$, $y=0$, $z=-4$. Tehát a negyedik csúcs: $D(5,0,-4)$.

b) Az egyik átló az AC szakasz. Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ egyenletből $D(1,-2,8)$.

c) Az AD szakasz az egyik átló. A negyedik csúcs: $D(-3,4,-4)$.

16. Tudjuk, hogy három vektor vegyes szorzata akkor és csak akkor 0, ha a három vektor komplanáris. Az is ismert, hogy koordinátáival adott három vektor vegyes szorzata a koordinátákból alkotott harmadrendű determinánssal egyenlő.

a) Az A, B, C, D pontnégyes akkor és csak akkor van egy síkban, ha az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorok komplanárisak. A három vektor vegyes szorzata:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -4\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-20\neq 0.$$

Tehát a négy pont nem egysíkú.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. A négy pont egysíkú.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. A négy pont egysíkú.

17. Ha a tetraéder egy csúcsából kiinduló három élvektor **a**, **b** és **c**, akkor a tetraéder térfogata $V=\frac{1}{6}|\mathbf{abc}|$. Az A csúcsból kiinduló három élvektor: $\overrightarrow{AB}=[4,0,-3]$, $\overrightarrow{AC}=[3,2,-3]$, $\overrightarrow{AD}=[4,1,-3]$. Vegyes szorzatuk: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=3$. A térfogat: $V=\frac{1}{2}$.
A felszín: $F=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|\right)=$
$=\frac{1}{2}(\sqrt{109}+\sqrt{43}+5+1)$. Az ABC lap területe $t=\frac{1}{2}\sqrt{109}$. A tetraéder térfogata $V=\dfrac{1}{3}tm$, ahol m az ABC laphoz tartozó magasság. Ezekből a magasság: $m=3/\sqrt{109}$.

18. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -5 & 6 & -3\\ 0 & 4 & u-3\end{vmatrix}=-6u-14.$

A tetraéder térfogata 4 egység, ha $\frac{1}{6}|6u+14|=4$, azaz $|6u+14|=24$. Ebből az egyenletből az u ismeretlenre két megoldást kapunk. Ugyanis vagy $6u+14=-24$, amiből $u=-\frac{19}{3}$, vagy $6u+14=24$, amiből $u=\frac{5}{3}$. A feladat feltételeit két pont elégíti ki:

$$D_1(2,0,-\frac{19}{3}),\quad D_2(2,0,\frac{5}{3}).$$

19. A pontnégyes akkor és csak akkor egysíkú, ha

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3-u\\ 1 & 0 & v-u\\ 0 & 1 & -1-u\end{vmatrix}=2-u-v=0.$$

Ebből $u+v=2$.

20. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 1\\ x-3 & y-1 & z\end{vmatrix}=2x-3y+2z-3.$

A térfogat $\frac{1}{6}|2x-3y+2z-3|=10$. Ebből egyrészt $2x-3y+2z-63=0$, másrészt $2x-3y+2z+57=0$ következik. A feladat feltételeit a $2x-3y+2z-63=0$ és a $-2x+3y-2z-57=0$ egyenletű sík pontjai elégítik ki.

21. A feladatok megoldásánál alkalmazzuk a **T 5.5** tételt.
a) $3x+2y-4z+8=0$. b) $x+2y+4z=0$. c) $2x+3z-8=0$.
d) $2y-z-4=0$. e) $x=0$. f) $y=0$. g) $z=0$. h) $y=2$.

22. Előbb számítsuk ki az adott pontok valamelyikéből kiinduló és a másik két adott pontba mutató vektor (pl. $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PR}$) vektori szorzatát. Ha ez a vektori szorzat nullvektor, akkor (a két vektor egyállású, és ezért) a P, Q, R ponthármas egy egyenesen fekszik; ha nem nullvektor, akkor a három pont által meghatározott síknak normálvektora. Az utóbbi esetben alkalmazzuk a

T 5.5 tételt. (A tételbeli P_0 pontként az adott P, Q, R pontok bármelyikét választhatjuk.)

a) $x + y + 2z - 3 = 0$. b) $x + y + z = 1$. c) $4x - 22y + 3z = 0$.

d) $y = 0$. e) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$.

23. Az adott sík (egy) normálvektora az $\mathbf{n} = [7, -1, 3]$ vektor. A párhuzamosság miatt az $\mathbf{n}$ vektor a meghatározandó síknak is normálvektora. A **T 5.5** tételből következik, hogy a sík egyenlete: $7x - y + 3z - 8 = 0$.

24. Pl. az x tengelyt abban az M_x pontban metszi, ahol $y = z = 0$. A metszéspontok: $M_x(-6, 0, 0)$, $M_y(0, -3, 0)$, $M_z(0, 0, 2)$.

25. Mivel a három egyenletből álló egyenletrendszert csak az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ számhármas elégíti ki, a $K(1, 1, 1)$ pont rajta van mindhárom síkon, de más közös pont nincs. A keresett sík egyenlete: $x + y + 2z - 4 = 0$.

26. A három sík egyenletéből összetett egyenletrendszernek nincs megoldása. Ezért a három síknak nincs közös pontja.

27. A három normálvektor vegyes szorzata:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

Ez az érték nem 0, ezért a három normálvektor nem egysíkú. Tehát a síkok metszésvonalai közül semelyik kettő nem párhuzamos, így a három síknak egy és csak egy közös pontja van. (A metszéspont meghatározásához a három egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani, de ez most nem volt kérdés.)

28. Az adott négy egyenletből minden lehetséges módon válasszunk ki hármat. Így négy háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ha a négy egyenletrendszer mindegyike egyértelműen megoldható, akkor a négy sík közrefog egy tetraédert, melynek csúcsait az egyenletrendszerek megoldásai adják. (Abban az esetben pedig, ha legalább egy az egyenletrendszerek közül nem oldható meg, vagy legalább egynek végtelen sok megoldása van, a négy sík nem határol tetraédert.) Ha P_i jelöli a S_i síkkal szemközti pontot, akkor $P_1(3, 2, 2)$, $P_2(3, -4, 2)$, $P_3(0, -1, 2)$, $P_4(1, 0, 0)$. A tetraéder térfogata 6.

29. A meghatározandó sík (egy) normálvektora $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ az adott sík normálvektora. $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n} = [-3, -12, -3]$. A sík egyenlete: $x + 4y + z - 11 = 0$.

30. A keresett sík normálvektora merőleges mindkét adott sík normálvektorára, ezért egyenlete: $x + 5y - 3z - 3 = 0$.

31. A sík normálvektora: $\overrightarrow{AB} = [2, 10, -4]$. A sík egyenlete: $x + 5y - 2z - 16 = 0$.

32. A megoldásnál a rombusznak azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy átlói felezik a csúcsnál lévő szöget.

a) Az $\overrightarrow{AB} = [1, 2, -2]$ és az $\overrightarrow{AC} = [3, 4, 0]$ vektorok egységvektorai rendre:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}[1, 2, -2], \quad \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{5}[3, 4, 0].$$

Ezek összege az A csúcsnál lévő belső szögfelezővel egyállású vektor, azaz a keresett sík normálvektora. $\frac{1}{3}[1,2,-2]+\frac{1}{5}[3,4,0]=\frac{1}{15}[14,22,-10]$.
A sík egyenlete: $7x+11y-5z-15=0$.
b) Az A csúcsnál lévő külső szögfelezővel párhuzamos az a) részben kiszámított két egységvektor különbsége. A sík egyenlete: $2x+y+5z-30=0$.

33. A síktól megköveteljük, hogy merőleges legyen az A-hoz tartozó magasságvonalra. Ezért egyrészt párhuzamosnak kell lennie a $\overrightarrow{BC}$ vektorral, másrészt merőlegesnek kell lennie a háromszög síkjára, és így párhuzamosnak kell lennie az $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ vektorral is. Ezekből kapjuk, hogy az $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})\times\overrightarrow{BC}$ vektor a sík normálvektora. A sík egyenlete: $5x+7y+2z-14=0$.

34. Az e és f egyenes egyenletrendszerét hasonlítsuk össze a **T 5.8** tételbeli egyenletrendszerrel, a g egyenesét pedig a **T 5.9** tételben lévő (1) képlettel. Az e, f és g egyenesek irányvektorai rendre: $\mathbf{u}=[3,-1,2]$, $\mathbf{v}=[-1,0,2]$, $\mathbf{w}=[-3,1,-2]$.
Az A pont rajta van az e egyenesen, mert a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, mindhárom egyenletből a t-re ugyanazt az értéket kapjuk. (Most 1-et.) Az A pont nincs rajta az f egyenesen, mert az egyenes minden pontjának y-koordinátája 4. Az A pont rajta van a g egyenesen, mert a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, helyettesítési értékként ugyanazt a számot kapjuk. (Most zérust.)
Mivel az e és g egyenesek irányvektorai egyállásúak és az A pont rajta van mindkét egyenesen, ezért ezek az egyenesek egybeesnek.
A B pont nincs rajta az e és g egyenesek egyikén sem, de rajta van az f egyenesen.

35. $e:\ \dfrac{x-5}{2}=-y=1-z;\qquad f:\ 2-x=\dfrac{z+1}{3},\ y=2;\qquad g:\ y=3,\ z=4.$

36. a) Az egyenes $x_0=16$ koordinátájú pontja: $P_0(16,24,20)$.
A keresett paraméteres egyenletrendszer: $x=16+3t$, $y=24+5t$, $z=20+4t$.
b) $P_0(3,5,2)$, $x=3$, $y=5+2t$, $z=2+t$.
c) $P_0(7,4,-3)$, $x=7+t$, $y=4$, $z=-3$.

37. Alkalmazzuk a **T 5.8** és **T 5.9** tételeket.
a) $x=-2-t$
$y=5+2t \qquad -x-2=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{3}.$
$z=1+3t$,

b) Irányvektor: $\overrightarrow{PQ}=[-4,0,1]$
$x=3-4t$
$y=1 \qquad \frac{x-3}{-4}=2-z,\ y=1.$
$z=2+t$,

c) $x=5$
$y=1 \qquad x=5,\ y=1.$
$z=4+t$,

d) Irányvektor: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=[3,4,-6]$.
$x=6+3t$

$y = -3 + 4t \qquad \frac{x-6}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{4-z}{6}.$
$z = 4 - 6t \quad ,$

e) Az irányvektor a két normálvektor vektori szorzata: $[2, -4, 2]$.
$x = 2t$
$y = 4 - 4t \qquad \frac{x}{2} = \frac{4-y}{4} = \frac{z-1}{2}.$
$z = 1 + 2t \quad ,$

38. a) $\alpha = 2$.
b) Az egyenes irányvektorának merőlegesnek kell lennie a sík normálvektorára. Ezért $\alpha = 2$ vagy $\alpha = -2$.
c) Akkor és csak akkor van metszéspont, ha az egyenes nem párhuzamos a síkkal. Ekkor az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának skaláris szorzata nem zérus. Most ez a szorzat minden α-ra zérus. Tehát nincs olyan α, amely kielégíti a leírt követelményt.
d) A követelmény olyan α-val teljesíthető, amellyel a sík normálvektora és az $\overrightarrow{AB}$ vektor egyállású, azaz, ha létezik olyan k valós szám, amellyel

$$\overrightarrow{AB} = [\alpha - 2, \alpha + 2, 4] = k[3, 5, \frac{\alpha}{4}].$$

Ez a vektoregyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\alpha - 2 = 3k$$
$$\alpha + 2 = 5k$$
$$4 = \frac{k\alpha}{4}.$$

Az $k = 2$ és $\alpha = 8$ érték mindhárom egyenletet kielégíti. Tehát az $\alpha = 8$ értékre a követelmény teljesül.

39. Az egyenesen kijelölünk egy pontot, pl. $A(2, 0, 2)$.
A sík egy normálvektora: $\overrightarrow{AP} \times [1, 3, 0] = [6, -2, -13]$.
A sík egyenlete: $6x - 2y - 13z + 14 = 0$.

40. $x - 6y - 4z + 1 = 0$.

41. $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}t, \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t \end{cases}$ ill. $\begin{cases} x = -2 + \frac{8}{3}u \\ y = u, \\ z = \frac{u}{3} \end{cases}$ ill. $\begin{cases} x = -2 + 8v \\ y = 3v \\ z = v. \end{cases}$

A paraméter kiküszöbölésével rendre

$$x = \frac{8y - 6}{3} = 8z - 2, \quad \frac{3x + 6}{8} = y = 3z, \quad \frac{x + 2}{8} = \frac{y}{3} = z$$

adódik. Könnyen ellenőrízhető, hogy a három egyenletrendszer ekvivalens.

42. a) Helyettesítsük a sík egyenletébe az egyenes egyenletrendszerében lévő x, y és z értékeket. Kapjuk, hogy $t = 1$. Egy közös pont van: $D(2, 1, 2)$.
b) Célszerű áttérni paraméteres egyenletrendszerre. Ettől kezdve úgy járunk el, mint az a) részben. Közös pont: $D(3, -1, 4)$.

c) A síknak és az egyenesnek nincs közös pontja.
d) Az a) részhez hasonlóan eljárva, a $0 \equiv 0$ azonosságot kapjuk. Az egyenes benne fekszik a síkban.

43. $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$ vagy $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-2} = z$.

44. Az AB oldal F felezőpontja: $F(-1, 4, -2)$. A súlyvonal irányvektora $\overrightarrow{FC}$; egyenletrendszere: $x = 4 - 5t$, $y = -7 + 11t$, $z = -2$.

45. A **32.** feladat megoldásánál elmondottak szerint a szögfelező irányvektora: $\mathbf{v} = \frac{1}{7}[2, -3, 6] + \frac{1}{7}[-3, 6, 2] = \frac{1}{7}[-1, 3, 8]$, egyenletrendszere: $1 - x = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}$.

46. A sík (egy) normálvektora az adott sík normálvektorának és az adott egyenes irányvektorának vektori szorzata. Egyenlete: $2x - y - 5z - 9 = 0$.

47. Az egyenesek irányvektorai: $\mathbf{v}_e = [3, -1, -2]$, $\mathbf{v}_f = [-6, 2, 4]$, $\mathbf{v}_g = [2, 0, 3]$, $\mathbf{v}_h = [2, 0, 3]$, $\mathbf{v}_k = [-3, 1, 2]$, $\mathbf{v}_l = [6, -2, -4]$. Látható, hogy az e, f, k, l egyenesek párhuzamosak, hasonlóképpen g és h. Egy pontot választva az egyik egyenesről, és koordinátáit behelyettesítve egy vele párhuzamos egyenes egyenletrendszerébe, megállapíthatjuk, hogy a két egyenes egybe esik vagy nem. Feladatunkban például a $P(2, 0, 1)$ pont rajta fekszik az e, k és l egyeneseken, ezért ezek azonosak, de nincs rajta az f egyenesen, így f különbözik az $e(= k = l)$ egyenestől. Hasonlóan, a $Q(-3, 0, 9)$ pont behelyettesítése mutatja, hogy a g és a h egyenesek azonosak. Tehát valójában csak három különböző egyenesünk van: az $e = k = l$, az f és a $g = h$ egyenesek.

Általában két egyenes kölcsönös helyzete úgy határozható meg, hogy megoldjuk a két egyenes (akár paraméteres, akár paramétermentes) egyenletrendszereiből alkotott egyenletrendszert. Ha ez egyértelműen megoldható, akkor a két egyenes metsző, ha végtelen sok megoldás van, akkor a két egyenes azonos, ha nincs megoldás, akkor az egyeneseknek nincs közös pontjuk.

Például az e és h kölcsönös helyzetét megadja az alábbi ötismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= 3t + 2 & \qquad x &= 2u - 3 \\ y &= -t & y &= -1 \\ z &= 1 - 2t & z &= 3u + 9. \end{aligned}$$

(Vigyázzunk, a két egyenes paramétere egymástól független, ezért különböző betűkkel jelöljük.) Az egyenletrendszer ellentmondó, tehát a két egyenesnek nincs közös pontja (kitérőek, mivel nem párhuzamosak). Hasonlóképp ellentmondó az e, k, l valamelyikének és g illetve h valamelyikének egyenletrendszeréből alkotott egyenletrendszer. Például k és g esetén az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{8 - x}{3} &= y + 2 & \qquad y &= -1 \\ \frac{z + 3}{2} &= y + 2 & \frac{x + 5}{2} &= \frac{z - 6}{3}. \end{aligned}$$

Végül az f és g (illetve f és h) egyenletrendszereiből alkotott egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy f és g metszéspontja a $(-5, -1, 6)$ pont.

Megjegyzés: Két különböző állású egyenes esetén egy másik módszerrel is eldönthető, hogy metszik-e egymást, vagy nem. Kijelölünk az egyeneseken egy-egy pontot; legyenek ezek A és B. Majd kiszámítjuk a két irányvektor és az $\overrightarrow{AB}$ vektor vegyes szorzatát. Ez a szorzat akkor és csak akkor 0 (különböző állású egyenesek esetén), ha a két egyenes metsző. Például az e egyenesről az $A(2,0,1)$, a h egyenesről a $B(-3,-1,9)$ pontot választva a vegyes szorzat nem 0, tehát a két egyenes kitérő.

48. A 47. feladat megoldása szerint eljárva, és megoldva a két egyenes egyenletrendszeréből kapott egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy az csak $\lambda = 11$ esetén oldható meg egyértelműen. A metszéspont: $[20/11, -41/11, 117/11]$.
Az előző feladat megoldásának végén tett megjegyzés szerinti megoldás: az e, illetve az f egyenes egy-egy pontja: $A(-2,0,1)$, $B(3,1,\lambda)$. A két irányvektor: $\mathbf{v}_1 = [2,-3,4]$ és $\mathbf{v}_2 = [1,4,2]$. A $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\overrightarrow{AB} = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $\lambda = 11$.

49. $\lambda = -\frac{34}{5}$.

50. Az x-tengely esetén: $\lambda = -\frac{3}{4}$; metszéspont: $M\left(\frac{5}{2},0,0\right)$,
Az y-tengely esetén: $\lambda = -\frac{9}{2}$; metszéspont: $M(0,-5,0)$,
Az z-tengely esetén: nincs ilyen λ.

51. Az e egyenes két sík metszésvonalaként lett megadva.
Az x-tengely esetén: $\lambda = -4$; metszéspont: $M(2,0,0)$.
Az y-tengely esetén: $\lambda = 9$; metszéspont: $M(0,-3,0)$.
Az z-tengely esetén: $\lambda = 3$; metszéspont: $M(0,0,3)$.

52. Az A ponton áthaladó és az adott síkra merőleges e egyenes egyenletrendszere: $x = 4+t$, $y = -3-t$, $z = 5+t$. Az e egyenes döféspontja a síkon: $D(3,-2,4)$.
A tükörkép: $A'(2,-1,3)$, mert $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA'}$.

53. Az A ponton áthaladó és az e egyenesre merőleges sík egyenlete: $3x + 5y + 2z - 7 = 0$. Az e egyenes döféspontja ezen a síkon: $D(3,-2,4)$. A tükörkép: $A'(4,-3,5)$.

54. Tükrözzük az egyenes két pontját (az egyik az egyenes és a sík közös pontja is lehet; ez a tükrözéskor helybenmarad). Az egyenes tükörképe:
$e' : x = -5 - 8t$, $y = 1$, $z = -5t$.

55. Meghatározzuk e-nek két különböző pontját, és mindkettőnek az $x+2y-z=0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét. A két vetületi pontot összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = x_0 + u$ $y = y_0 - 4u$ $z = z_0 - 7u$. Ezután $t = x_0 + u$ helyettesítéssel (a két pont választásától függetlenül) az f egyenes egyenletrendszere: $x = t$, $y = 1 - 4t$, $z = 2 - 7t$.

56. A metszésvonal irányvektora $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, ahol $\mathbf{n}_1$ az első, $\mathbf{n}_2$ a második sík normálvektora: $\mathbf{v} = [4,-1,-3]$.
A keresett sík normálvektora: $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{u}$, ahol $\mathbf{u}$ az egyenes irányvektora. $\mathbf{n} = \left[\frac{7}{6}, -\frac{13}{3}, 3\right]$. A metszésvonal egy pontja: $A(0,0,0)$.
A sík egyenlete: $7x - 26y + 18z = 0$.

57. a) $5x + 4y + 9z + 15 = 0$. b) $y + z = 0$. c) $x + z + 3 = 0$.
d) $x - y + 3 = 0$. e) $x - 4y - 3z + 3 = 0$.

58. Az origón és az e egyenesen átmenő sík egyenlete: $8x + 6y + 5z = 0$. A sík és az f egyenes közös pontja: $M(2, 4, -8)$. A feltételeknek a PM egyenes tesz eleget; egyenletrendszere: $x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{4}$.

59. Egyetlen ilyen egyenes van, egyenletrendszere: $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+5}{2} = 3 - z$.

60. A P ponton és az e egyenesen átmenő S sík egyenlete: $2x + 3y - z - 1 = 0$. Ez a sík tartalmazza az f egyenest. Ezért a feladatnak megoldása az S síknak minden olyan egyenese, amely átmegy P-n és nem párhuzamos az e és f egyenesek egyikével sem.

61. Nincs ilyen egyenes. (A P ponton és az e egyenesen átmenő sík egyenlete: $3x + y - 11z + 4 = 0$.)

62. $K(1, 1, -1)$. Az e egyenes irányvektora $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, az S sík normálvektora $\mathbf{n} = [1, 1, 1]$, az f egyenes irányvektora legyen $\mathbf{v} = [a, b, c]$.
Mivel az f benne van az S síkban és merőleges az e egyenesre, ezért $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ és $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 0$. Ebből $a = 0$ és $b = -c$ következik. Tehát az f egy irányvektora a $[0, 1, -1]$ vektor; paraméteres egyenletrendszere: $f:\ x = 1,\ y = 1 + t,\ z = -1 - t$.

63. A P ponton átmenő és az $\mathbf{a}$-ra merőleges sík egyenlete: $6x - 2y - 3z + 1 = 0$. Ez a sík az adott egyenest az $M(1, -1, 3)$ pontban metszi. A PM egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{6}.$$

64. A keresett egyenes $\mathbf{v}$ irányvektora a sík normálvektora, ezért $\mathbf{v} = [2, 4, -1]$. Az e egyenes irányvektora: $\mathbf{u} = [2, -1, 1]$. Az e egyenesen át vegyük fel (a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos, tehát) az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normálvektorú síkot (egyenlete: $3x - 4y - 10z = 0$). Az f egyenes döféspontja ezen a síkon

$$D\left(\frac{88}{41}, \frac{51}{41}, \frac{6}{41}\right);$$

ez a keresett egyenes egyik pontja. Az egyenes egyenletrendszere:

$$82x - 176 = 41y - 51 = 24 - 164z.$$

65. A síkok normálvektorai komplanárisak, mert vegyes szorzatuk zérus. Ugyanakkor a normálvektorok páronként nem egyállásúak. Ezekből következik, hogy bármelyik két sík különböző, de bármelyik kettőnek van metszésvonala és ezek egyező állásúak.
A metszésvonalak (közös) irányvektora: $\mathbf{v} = [1, 2, 1]$.
Három ilyen síknak akkor és csak akkor van közös pontja, ha páronkénti metszésvonalaik egybeesnek.
Válasszunk ki egy P pontot két sík metszésvonalán. A P pont akkor és csak akkor van rajta a harmadik síkon is, ha $\lambda = 3$. Eszerint:
a) Van közös pont (egyenes is), ha $\lambda = 3$. b) Nincs közös pont, ha $\lambda \neq 3$.

66. Ha E az e egyenesnek, F pedig az f egyenesnek egy-egy pontja, akkor a g egyenes átmegy az EF szakasz felezőpontján.

$$g: \frac{x-4}{4} = y - \frac{3}{2} = z - \frac{9}{2}.$$

67. Ha a $P(u, v, w)$ pont rajta van az e egyenesen, akkor

$$\frac{u-1}{2} = -v \quad \text{és} \quad -v = \frac{w+3}{3};$$

másrészt, a **T 5.11** tétel alapján $\frac{1}{3}|u + 2v + 2w + 11| = 2$. Ebből a három egyenletből a következő két megoldást kapjuk: $P_1(1, 0, -3)$, $P_2(-3, 2, -9)$.

68. A távolság: $\frac{\sqrt{6}}{12}$ egység.

69. a) A **T 5.14** tétel alapján: $\cos(e, f)\angle = \cos(e, g)\angle = \frac{5}{7}$, $\cos(f, g)\angle = \frac{3}{7}$.
b) Az (e, f), (e, g) és (f, g) síkok normálvektorai rendre: $\mathbf{n}_1 = [1, 2, -1]$, $\mathbf{n}_2 = [2, -1, -1]$, $\mathbf{n}_3 = [3, 1, 0]$. Az (e, f) és (e, g) síkok szögének koszinusza:

$$\frac{|\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{6}; \quad \text{tangense} \sqrt{35}.$$

Az (e, f) és (f, g), ill. az (e, g) és (f, g) síkok szögének tangense egyaránt $\sqrt{\frac{7}{5}}$.
c) **T 5.15** alapján a szögek szinuszai a feladatban megadott sorrendben: $\sqrt{\frac{2}{7}}$, $\sqrt{\frac{10}{21}}$, $\sqrt{\frac{10}{21}}$.

70. a) Az x tengely irányvektora $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, a sík normálvektora $\mathbf{n} = [1, t, 1]$. A **T 5.15** tétel alapján

$$\sin(x, S)\angle = \frac{|\mathbf{i}\mathbf{n}|}{|\mathbf{i}||\mathbf{n}|} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből $\frac{1}{\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ következik, aminek nincs valós t megoldása.
b) Az előbbihez hasonlóan

$$\sin(y, S)\angle = \frac{|t|}{\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Két megoldás van: $t_1 = \sqrt{6}$, $t_2 = -\sqrt{6}$.
c) Nincs ilyen t érték.

71. Legyen a keresett sík: $S: Ax + By + Cz + D = 0$. A P és Q pont rajta van az S síkon, ezért $A + B + \sqrt{2}C + D = 0$ és $2B + \sqrt{2}C + D = 0$. Ezekből $A = B$ következik. Az adott sík és az S sík hajlásszögének koszinusza:

$$\frac{|[A, A, C][1, 1, 0]|}{\sqrt{2A^2 + C^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ebből $C^2 = 2A^2$. A $C = A\sqrt{2}$ értékkel számolva kapjuk, hogy a keresett sík normálvektorai $\mathbf{n} = [A, A, A\sqrt{2}]$ alakúak és $D = -4A$, ahol az A tetszőleges (nem zérus) valós szám lehet. Ekkor a sík egyenlete: $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$. A $C = -A\sqrt{2}$ esetben pedig $x + y - \sqrt{2}z = 0$.

72. A keresett egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = [a, b, c]$. Az adott sík, illetve az xy sík normálvektora $\mathbf{n} = [1, -2, 0]$, illetve $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$.
Az e egyenes benne van az adott síkban, ezért $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = a - 2b = 0$. Ez utóbbi és a **T 5.15** tétel alapján

$$\frac{|c|}{\sqrt{5b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből $c^2 = 15b^2$. Két megoldás van:

$$e_1: \frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z-4}{\sqrt{15}}; \quad e_2: \frac{x-2}{2} = y - 1 = -\frac{z-4}{\sqrt{15}}.$$

73. Legyen a keresett egyenes e irányvektora $\mathbf{v} = [a, b, c]$. A **T 5.14** tétel alapján egyrészt

$$\cos(x, e)\angle = \frac{|\mathbf{iv}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

másrészt

$$\cos(y, e)\angle = \frac{|\mathbf{jv}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezekből $b^2 = a^2$ és $c^2 = 2a^2$. A feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x = y = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad x = y = -\frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x = -y = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad x = -y = -\frac{z}{\sqrt{2}}.$$

74. a) Legyen a keresett egyenes g, irányvektora: $\mathbf{v} = [a, b, c]$. **T 5.14** alapján

$$\cos(e, g)\angle = \frac{|2a + c|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}, \quad \cos(f, g)\angle = \frac{|-a + 2c|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezekből $|2a + c| = |-a + 2c|$ következik.
A $2a + c = -a + 2c$, illetve $2a + c = a - 2c$ felbontásból $b^2 = 10a^2$, illetve $b^2 = 10c^2$ adódik. Az $a = 1$, illetve $c = -1$ választással kapjuk, hogy a feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x - 3 = \frac{y-4}{\sqrt{10}} = \frac{z+1}{3}, \quad x - 3 = -\frac{y-4}{\sqrt{10}} = \frac{z+1}{3},$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{\sqrt{10}} = -(z+1), \quad \frac{x-3}{3} = -\frac{y-4}{\sqrt{10}} = -(z+1).$$

b) Két ilyen egyenes van ($b^2 = 0$); egyenletrendszereik:

$$x - 3 = \frac{z+1}{3}, \ y = 4 \quad \text{és} \quad -\frac{x-3}{3} = z + 1, \ y = 4.$$

c) Nincs ilyen egyenes (mert $b^2 < 0$ adódik).

75. A keresett sík egyenlete: $Ax+By+Cz+D=0$. A metszésvonal irányvektorára $[1,-3,-5]$, az együtthatókra, A, B, C, D-re pedig az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$A+B+C+D=0$$
$$A-3B-5C=0$$
$$|A+2B-C|=|2A-B+C|\,.$$

Az utolsó egyenlet a **71.** feladat megoldása szerint nyerhető. Két megoldás van:

$$x-3y+2z=0,\ \text{a szög koszinusza: } \sqrt{\tfrac{7}{12}}.$$
$$3x+y-4=0,\ \text{a szög koszinusza: } \sqrt{\tfrac{5}{12}}.$$

76. A keresett egyenes irányvektora: $\mathbf{v}=[a,b,c]$. A **73.** feladat megoldásához hasonlóan eljárva a következő egyenletrendszert kapjuk: $|a|=|b|=|c|$. A feltételeket négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x=y=z\,,\qquad x=-y=z\,,\qquad -x=y=z\,,\qquad -x=-y=z\,.$$

A szög koszinusza mind a négy esetben: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

77. Legyen a keresett egyenes irányvektora $\mathbf{v}=[a,b,c]$. Az e, f és a g egyenes egy-egy irányvektorát jelölje rendre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és a $\mathbf{v}_3$ vektor. A **T 5.14** tétel alapján

$$\frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_1|}=\frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_2|}=\frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_3|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_3|}\,.$$

Ebből $|2a+3b+c|=|3a-2b-c|=|-a+3b+2c|$. A feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik és a szögek koszinuszai:

$$x-1=2-y=\tfrac{z+1}{3};\quad \sqrt{\tfrac{2}{77}}.\qquad x-1=\tfrac{2-y}{5}=\tfrac{z+1}{3};\quad \tfrac{\sqrt{10}}{7}.$$
$$x-1=\tfrac{2-y}{5}=\tfrac{3z+3}{29};\quad \sqrt{\tfrac{2}{301}}.\qquad \tfrac{x-1}{3}=\tfrac{y-2}{5}=-\tfrac{z+1}{11};\quad \sqrt{\tfrac{10}{217}}.$$

78. Legyen $P(x,y,z)$ valamelyik szögfelező sík tetszőleges pontja. A **T 5.11** tétel alapján minden ilyen pontra

$$\frac{|x-3y+2z-2|}{\sqrt{14}}=\frac{|2x+y+3z-5|}{\sqrt{14}}$$

teljesül. A két szögfelező sík egyenlete: $x+4y+z-3=0$ és $3x-2y+5z-7=0$.

79. Legyen a másik végpont $B(x,y,z)$.
Ekkor $6=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$. Figyelembe véve, hogy a B pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletrendszerét, a B paramétereként $t=\pm 2$ adódik. Megoldások: $B_1(2,7,3)$ és $B_2(-6,-1,-1)$.

80. Két ilyen pont van: $P_1(0,0,\frac{4}{5})$, $P_2(0,0,2)$.

81. Két ilyen pont van: $P_1(0,0,-2)$, $P_2(0,0,\frac{-82}{13})$.

82. A metszésvonal egyenletrendszere: $\frac{3-x}{3}=\frac{y+1}{2}=z$. Olyan $P(u,v,w)$ pontot keresünk, amely rajta van a metszésvonalon és amelyre

$$\frac{|u+2v+w+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|u+2v+w-3|}{\sqrt{6}}\,.$$

Ebből és a metszésvonal egyenletrendszeréből kapjuk, hogy a megoldás: $P(3,-1,0)$.

83. a) A P ponton áthaladó és az e-merőleges sík egyenlete: $3x-y+9=0$. Az e egyenes metszéspontja ezen a síkon: $M(-2,3,2)$. A távolság 5 egység.
2. megoldás. Az **T 5.12** képletébe az e egyenes két pontját, például $Q(1,2,2)$ és $R(4,1,2))$ pontokat helyettesítve a keresett távolság: $\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|}=5$.
b) A távolság: $6\sqrt{3}$ egység. c) A távolság: $\sqrt{17}$ egység.
d) A távolság: $\frac{\sqrt{315}}{7}$ egység. e) A távolság: $\sqrt{\frac{17}{18}}$ egység.

84. a) Az e, illetve az f egyenes (egy) irányvektora $\mathbf{v}_1=[2,-1,-2]$, illetve $\mathbf{v}_2=[4,-3,-5]$. A két egyenes egy-egy pontja: $A(-4,4,-1)$, ill. $B(-5,5,5)$. Az $\overrightarrow{AB}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ vegyes szorzat értéke -9. Ez nem zérus, tehát a két egyenes kitérő. A távolság a **T 5.13** tétel alapján 3 egység.
b) A távolság: $2\cdot\frac{23}{\sqrt{762}}$ egység.
c) A távolság: 3 egység.

85. a) Az e, illetve az f egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_1=[-3,4,1]$, illetve $\mathbf{v}_2=[1,-1,-1]$. A két egyenes távolsága: $d(e,f)=\sqrt{14}$. A normáltranszverzális irányvektora: $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=[-3,-2,-1]$. A továbbiakban az **64.** feladat megoldásában leírt módon járunk el. A t normáltranszverzális egyenletrendszere:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{2}=z-2\,.$$

b) $d(e,f)=\sqrt{41}$. $\quad t: x=6t+9, y=-2t, z=-t+2$.

c) $d(e,f)=2\sqrt{17}$. $\quad t:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

d) $d(e,f)=\sqrt{14}$. $\quad t:1-x=\dfrac{2-y}{3}=\dfrac{z-1}{2}$.

86. Legyen S_1 a P_1P_2 szakasz felezőpontján átmenő és a P_1P_2 szakaszra merőleges sík, S_2 pedig a P_1P_3 szakasz felezőpontján átmenő és a P_1P_3 szakaszra merőleges sík; G az S_1 és S_2 metszésvonala. S_1 egyenlete: $6x+4y+z=47{,}5$; S_2 egyenlete: $4x+y+4z=30{,}5$. $G: x=3t$, $x=\frac{149}{20}+15t$, $y=\frac{7}{10}-20t$, $z=-10t$.

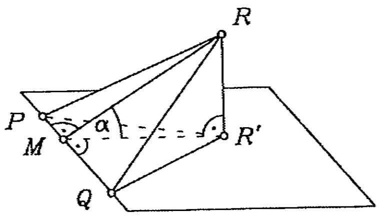
87. Két ilyen sík van, mert $d(e,P)=\sqrt{2}$ és ez nagyobb 1-nél. Legyen a keresett S sík egyenlete: $Ax+By+Cz+D=0$. Mivel $d(P,5)=1$, a **T 5.11** szerint

$$(*)\qquad \frac{|2A+B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1\,.$$

Az e egyenesen felvéve két pontot, két további egyenletet kapunk az A, B, C, D együtthatókra.
Legyen ez a két pont pl. a $Q(1,3,4)$ és $R(1,0,3)$; ekkor az $A+3B+4C+D=0$ és $A+3C+D=0$ egyenleteket kapjuk, ezekből C és $A+D$ értékét B-vel kifejezhetjük: $C=-3B$ és $A+D=9B$ (a Q és R más választása esetén is ezt kapjuk.) A $(*)$ egyenletbe helyettesítve $|A+B|=\sqrt{A^2+10B^2}$ adódik. Ebből

$2AB = 9B^2$ következik. A $B = 0$ esetben $A \neq 0$, és ezért A-t választhatjuk 1-nek, ezzel a keresett sík egyenlete $x - 1 = 0$. A $B \neq 0$ esetben pedig $B = 2$ választással $9x + 2y - 6z + 9 = 0$. A síkok szögének koszinusza: $\frac{9}{11}$.

88. Előzetes megjegyzés: Egy T területű háromszöget vetítsünk merőlegesen egy síkra. Ha ez a sík és a háromszög síkja α szöget zár be, akkor a vetületi háromszög T' területére $T' = T\cos\alpha$. Az ábra alapján ezt könnyen beláthatjuk. Itt az RM szakasz a PQ oldalhoz tartozó magasság a PQR háromszögben, $R'M$ pedig ennek merőleges vetülete. A feladatban $T' = \frac{1}{2}T$; ezért $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.



A keresett S sík tartalmazza az x tengelyt, ezért egyenlete $By + Cz = 0$ alakú. A $P_1P_2P_3$ sík normálvektora: $[-2, -1, 3]$. Az S sík és a $P_1P_2P_3$ sík szögének koszinuszát a normálvektorokkal kifejezve, a $\dfrac{|3C - B|}{\sqrt{14}\sqrt{B^2 + C^2}} = \dfrac{1}{2}$ egyenletet kapjuk, ebből pedig azt, hogy $5B^2 + 12BC - 11C^2 = 0$. C^2-tel osztva: $5\left(\frac{B}{C}\right)^2 + 12\frac{B}{C} - 11 = 0$. (Sem C, sem B nem lehet 0, mert akkor a keresett sík normálvektora nullvektor lenne.) Két sík elégíti ki a feltételeket; egyenleteik:

$$S_1: \frac{-6 + \sqrt{91}}{5}y + z = 0 \quad \text{és} \quad S_2: \frac{-6 - \sqrt{91}}{5}y + z = 0.$$

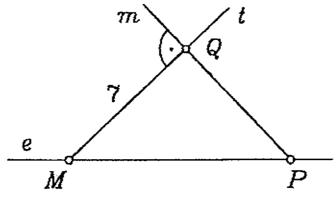
A P_1 és P_2 csúcs távolsága ezektől a síkoktól:

$$d(S_1, P_2) = 2d(S_1, P_1) = \frac{-1 + \sqrt{91}}{2\sqrt{38 - 3\sqrt{91}}}.$$

$$d(S_2, P_2) = 2d(S_2, P_1) = \frac{1 + \sqrt{91}}{2\sqrt{38 + 3\sqrt{91}}}.$$

89. Az A, B, C ponthármas akkor és csak akkor nem kollineáris, ha $t \neq 9$. A síkok közös pontja: $K(2, 1, 4)$. Ha $t \neq 9$, akkor az ABC sík egyenlete a t paraméter értékétől függetlenül $x - y - 1 = 0$, és így a K pont távolsága az ABC síktól $\sqrt{2}$ egység.

90. A P ponton áthaladó és az e egyenesre merőleges S sík tartalmazza a meghatározandó m egyenest (ha létezik ilyen), továbbá az m és e egyenesek t normáltranszverzálisát. Ezt mutatja az ábra, ahol az e egyenes merőleges a rajz síkjára. Az S sík egyenlete: $3x - 6y + 2z - 1 = 0$. Az e egyenes és az S sík M metszéspontjára: $M(7, 5, 5)$. Az



$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{98} > 7$, ezért két olyan egyenes van, amely kielégíti a feladat feltételeit.
Feltevésünk szerint az e és m egyenesek távolsága ($MQ =$) 7 egység. Ebből és az $MP = \sqrt{98}$ értékből következik, hogy az MPQ egyenlőszárú derékszögű háromszög: $PQ = 7$. Ez utóbbiak és az **5.14** tétel alapján

(1) $$\cos(\overrightarrow{MP}, m) = \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{m}|}{\sqrt{98}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ahol az $\mathbf{m} = [a, b, c]$ vektor az m egyenes irányvektora. Válasszuk az $\mathbf{m}$ vektort úgy, hogy

(2) $$|\mathbf{m}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 7$$

legyen. Ez utóbbi és $\overrightarrow{MP} = [-8, -5, -3]$ miatt az (1) összefüggésből

(3) $$8a + 5b + 3c = 49$$

következik. Az m egyenes merőleges az e egyenesre, ezért

(4) $$3a - 6b + 2c = 0\,.$$

A (2), (3) és (4) egyenletekből kapjuk, hogy a keresett egyenesek irányvektorai: $\mathbf{m}_1 = [2, 3, 6]$ és $\mathbf{m}_2 = [6, 2, -3]$. A két egyenes egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + 6t \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t\,. \end{cases}$$

91. A **63.** feladat megoldásához hasonlóan járunk el. $2 - x = y - 1 = z - 2$.

92. A szög koszinusza: $\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$. A feltételt két pont elégíti ki: $D_1\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ és $D_2\left(\frac{79}{34}, \frac{79}{34}, -\frac{11}{68}\right)$.

93. $B\left(\frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$.

94. A C csúcs lehetséges értékei: $C_1(0, 0, 0)$ és $C_2(6, 4\sqrt{3}, 0)$. Az ABC lap területe: $7\sqrt{3}$ egység.
A tetraéder magassága: 4 egység. A negyedik csúcs (D) rajta van az adott egyenesen és vagy a $z = 4$, vagy pedig a $z = -4$ egyenletű síkon van. A D csúcs lehet: $D_1(2, 1, 4)$ és $D_2(2, 5, -4)$.
Négy tetraéder van: ABC_1D_1, ABC_1D_2, ABC_2D_1, ABC_2D_2.

95. a) Az r lehetséges értékei: 2 és -2. A távolság mindkét esetben: $\frac{7}{\sqrt{26}}$.
b) Nincs olyan r szám, amelynél az e egyenes merőleges az α síkra.

96. A három tükörkép a feladatbeli sorrendben: $A(-3, 7, 1)$, $B\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, $C\left(-\frac{13}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}\right)$. Az ABC sík egyenlete: $35x + 4y + 6z + 71 = 0$. Távolság: $\frac{120}{\sqrt{1277}}$ egység.

97. A négy tetraéder csúcsai:
a) $A(5, 4, 2)$, $B(3, 2, 1)$, $C(3, 4, 2)$, $D(-3, 2, -1)$.
b) $A(5, 4, 2)$, $B(3, 2, 1)$, $C(3, 4, 2)$, $D(9, 6, 5)$.
c) $A(5, 4, 2)$, $B(7, 6, 3)$, $C(3, 4, 2)$, $D(-3, 2, -1)$.
d) $A(5, 4, 2)$, $B(7, 6, 3)$, $C(3, 4, 2)$, $D(9, 6, 5)$.
Mind a négy tetraéder térfogata $\frac{4}{3}$ egység.

98. Ha létezik ilyen, d hosszúságú szakasz, legyen $\mathbf{v} = [x, y, z]$ olyan vektor, amelyre $|\mathbf{v}| = d$ teljesül. Az egyenesek egységnyi hosszúságú irányvektorai a feladatbeli sorrendben:
$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right]$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{9}[1, 4, -8]$ és $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}[-1, 8, 4]$.
A $\mathbf{v}_1\mathbf{v} = 2$, $\mathbf{v}_2\mathbf{v} = 3$, $\mathbf{v}_3\mathbf{v} = 1$ egyenletrendszerből származó

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z = 14 \\ x + 4y - 8z = 27 \\ -x + 8y + 4z = 9 \end{cases}$$

egyenletrendszert csak az $x = -5$, $y = 2$, $z = -3$ számhármas elégíti ki. Ezért egy és csak egy olyan d hosszúságú szakasz létezik, amely kielégíti a feladatbeli feltételeket. Hosszúsága: $\sqrt{38}$.

99. A P pont és az adott egyenes távolsága: 6. Két sík elégíti ki a feltételt. Egyenleteik: $2x - y + 2z + 9 = 0$ és $2x - y + 2z - 27 = 0$.

100. A négy metszéspont: $E(2, -1, 5)$, $F(3, -2, 3)$, $G(5, 5, 1)$, $H(4, 2, 3)$. A hajlásszög koszinusza: $\frac{1}{\sqrt{21}}$.

101. A felbontás lehetséges, mert az egyenesek irányvektorai nem komplanárisak. Az e, f, g, illetve a g egyenesekkel párhuzamos összetevők rendre: $\mathbf{v}_1 = [8, 4, -6]$, $\mathbf{v}_2 = [-1, 10, -4]$, illetve $\mathbf{v}_3 = [3, -8, 2]$.

102. A meghatározandó sík legyen $S: Ax + By + Cz + D = 0$. A hasáb éleinek metszéspontjai az S síkon: $M_1\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$, $M_2\left(0, 1, -\frac{B+D}{C}\right)$, $M_3\left(1, 0, -\frac{A+D}{C}\right)$ $(C \neq 0)$. (A $C = 0$ esetben az S sík párhuzamos az élekkel.) Ha a kimetszett háromszög egyenlő oldalú, akkor $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$. Vegyük még figyelembe azt is, hogy az adott P és Q pont rajta van az S síkon. A feladat feltételeit két sík elégíti ki; egyenleteik: $x + y + z + 1 = 0$ és $x + y - z + 3 = 0$.

103. A páronkénti metszésvonalak egyenletrendszerei:

$$e_1: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}, \quad e_2: \begin{cases} x = u + 1 \\ y = u + 3 \\ z = u \end{cases}, \quad e_3: \begin{cases} x = v + 4 \\ y = v + 4 \\ z = v\,. \end{cases}$$

Ebből leolvasható, hogy a páronkénti metszésvonalak párhuzamosak. A sík általános egyenlete: $Ax + By + Cz + D = 0$. A P ponton átmenő és az a vektorral párhuzamos síkokra teljesülni kell a következőknek: $A + B + C + D = 0$ és $A = B$. Ebből következik, hogy a metsző síkok általános egyenlete:

(1) $\quad Ax + Ay - (2A + D)z + D = 0\,,$ ahol $D \neq 0\,.$

(A $D = 0$ esetben az $Ax + Ay - 2Az = 0$ egyenletű síkot kapjuk, amely párhuzamos a hasáb éleivel.) Az (1) egyenletű síkok és az e_1, e_2, e_3 egyenesek közös pontjai legyenek rendre M_1, M_2 és M_3. Kapjuk, hogy $\overrightarrow{M_1M_2} = [2, 2, 0]$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \left[\frac{4A}{D} + 1, \frac{4A}{D} + 3, \frac{4A}{D} + 4\right]$, $\overrightarrow{M_2M_3} = \left[\frac{4A}{D} + 3, \frac{4A}{D} + 1, \frac{4A}{D} + 4\right]$, valamint $M_1M_2 = 2\sqrt{2}$ és $M_1M_3 = M_2M_3$. Ezzel állításunkat igazoltuk. Az $M_1M_2M_3$ háromszögek között nincs derékszögű, mert ha lenne, akkor $M_1M_3 = M_2M_3 = 2$-nek teljesülni kellene. Könnyen belátható, hogy ez lehetetlen.

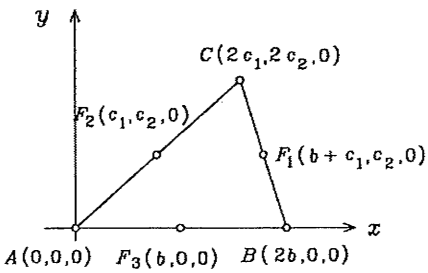
104. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el. Egyetlen ilyen sík létezik. Egyenlete: $y - z + 1 = 0$.

105. Legyen a metsző sík S, az általa lemetszett kisebb tetraéder pedig $AB'C'D$. Az $ABCD$ tetraéder A csúcsához tartozó m és az $AB'C'D'$ tetraéder A csúcsához tartozó m' magasságára $m' = m/\sqrt[3]{2}$ adódik. E feladatnál $m = 2/\sqrt{3}$, és a BCD sík egyenlete: $x+y+z-1 = 0$. A felező sík egyenlete: $x+y+z+d = 0$ alakú; d értéke a $|3+d|/\sqrt{3} = 2/(\sqrt{3}\sqrt[3]{2})$ egyenlet alapján vagy $-3 + 2/\sqrt[3]{2}$, vagy $-3 - 2/\sqrt[3]{2}$. De az S síknak a BCD sík és az A-n átmenő, vele párhuzamos ($x+y+z-3 = 0$) egyenletű sík között kell haladnia; tehát $-3 < d < -1$. A felező sík egyenlete: $x + y + z - 3 + 2/\sqrt[3]{2} = 0$.

106. A $t = u = 0$ paraméterekhez tartozó pont az e, illetve az f egyenesen $E(x_1, y_1, z_1)$, illetve $F(x_2, y_2, z_2)$; irányvektoruk $\mathbf{v}_1 = [a_1, b_1, c_1]$, illetve $\mathbf{v}_2 = [a_2, b_2, c_2]$. A két egyenes akkor és csak akkor egysíkú, ha $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\overrightarrow{EF} = 0$. Ez a vegyes szorzat a feladatbeli determinánssal egyenlő.

107. Az e egyenest tartalmazó és az S síkra merőleges sík normálvektora $\mathbf{n} = \mathbf{v}\times\mathbf{u}$, ahol $\mathbf{v}$ az e egyenes irányvektora, az $\mathbf{u}$ pedig a keresett S' sík normálvektora. Tekintsük az egyenes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontját, és legyen $P(x, y, z)$ a tér tetszőleges pontja. A P pont akkor és csak akkor van rajta az S' síkon, ha a $\overrightarrow{P_0P}\cdot\mathbf{n}$ skaláris szorzat zérus.

108. A bizonyítandó tulajdonság csak a négy csúcs egymáshoz viszonyított helyzetétől függ. Ezért a koordináta-rendszert úgy célszerű megválasztani, hogy a számolás lehetőleg kevés fáradsággal járjon és áttekinthető legyen. A tetraéder csúcsai: A, B, C, D. Az ABC háromszöget az xy tengelysíkban, az ábra szerinti elrendezésben vesszük fel. A D csúcs: $D(2d_1, 2d_2, 2d_3)$. Az AB, AC és CB élre merőleges felező síkok egyenlete rendre:



$$x = b, \quad c_1x + c_2y - c_1^2 - c_2^2 = 0, \quad (b - c_1)x - c_2y - b^2 + c_1^2 + c_2^2 = 0.$$

Ez a három sík egy közös e egyenesen halad át, melynek egyenletrendszere: $e:\ x = b,\ y = \frac{c_1^2+c_2^2-bc_1}{c_2}$. Az AD él felező merőleges síkja: $S:\ d_1x + d_2y + d_3z - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 0$. Bevezetjük a következő jelöléseket: $L = (c_1^2 + c_2^2 - bc_1)/c_2$ és $K = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$. Az e egyenes és az S sík metszéspontja: $M = \left(b, L, \frac{K-d_1b-d_2L}{d_3}\right)$. Kimutatjuk, hogy a DM és AM szakaszok egyenlő hosszúságúak.

$$\overline{AM}^2 = b^2 + L^2 + \left(\frac{K - d_1b - d_2L}{d_3}\right)^2,$$

$$\overline{DM}^2 = (b - 2d_1)^2 + (L - 2d_2)^2 + \left(\frac{K - d_1b - d_2L}{d_3} - 2d_3\right)^2.$$

A műveletek és az összevonás elvégzése után kapjuk, hogy valóban $DM = AM$. Mivel az e egyenes minden pontja egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től, ezért $DM = BM = CM$ is teljesül. Ezekből következik, hogy az M pont rajta van a BD és DC élek felező merőleges síkjain is.

109. 1. megoldás. Az előző feladat megoldásának elején mondottakat itt is alkalmazhatjuk. Legyen az egyik egyenes az x tengely, a másik pedig legyen párhuzamos az xy tengelysíkkal. Tegyük fel, hogy a két egyenes szöge $\alpha\,(\neq 0)$. Legyen $A(a,0,0)$ és $B(b,0,0)$ az x tengely két, egymástól adott r távolságra levő (különben tetszőleges) pontja. A másik egyenesen pedig a $C(c_1,c_2,k)$ és a $D(d_1,d_2,k)$ pontot tűzzük ki úgy, hogy távolságuk adott s legyen. A két szakaszra $r = |a-b|$ és

(1) $$s^2 = (c_1-d_1)^2 + (c_2-d_2)^2$$

áll fenn. Az $ABCD$ tetraéder térfogata:

(2) $$V = \tfrac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}| = \tfrac{1}{6}|a-b||k||c_2-d_2|\,.$$

A CD egyenes egy irányvektora $\mathbf{v} = [\cos\alpha\,, \sin\alpha\,, 0]$; egyenletrendszere

$$CD:\ x = c_1 + t\cos\alpha,\ \ y = c_2 + t\sin\alpha,\ \ z = k\,.$$

A D pont rajta van ezen az egyenesen, ezért $(d_1-c_1)\sin\alpha = (d_2-c_2)\cos\alpha$. Ez utóbbiból és az (1) egyenletből kapjuk, hogy $|c_2-d_2| = s\sin\alpha$. Ezt (2)-be helyettesítve: $V = \frac{1}{6}r|k|s\sin\alpha$. Tehát a térfogat csak az egyenesek egymáshoz viszonyított helyzetétől és a két szakasz hosszától függ, ezért (adott egyenesek esetén) konstans.

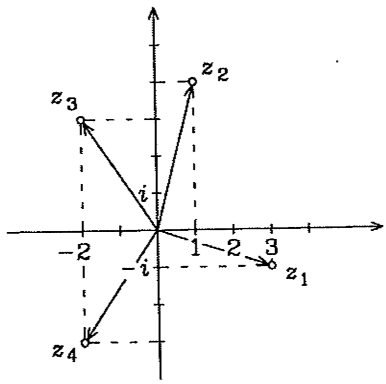
2. megoldás. Legyen e és f a két egyenes; AB, illetve CD a rajtuk felvett r, ill. s hosszúságú szakasz (r és s adott pozitív számok). Továbbá legyen $\alpha = (e,f)\angle$. Ismeretes, hogy

$$d(e,f) = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|}{rs\sin\alpha} =$$
$$= \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}|}{rs\sin\alpha} = \frac{6V}{rs\sin\alpha}\,,$$

ahol V az $ABCD$ tetraéder térfogata. Ebből már következik az első megoldás utolsó mondataként megfogalmazott állítás.

6. Komplex számok (megoldások)

1. Lásd ábra.



2. $z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -3 + 2i,$
$z_3 = 4 - 2i, \quad z_4 = -1 - i.$

3. $\overline{z}_1 = 2 - 7i,\ \overline{z}_2 = -3 + 5i,$
$\overline{z}_3 = -5i,\ \overline{z}_4 = i,\ \overline{z}_5 = -9,\ \overline{z}_6 = 0.$

4. Teljes indukcióval. **5.** Teljes indukcióval.

6. Az előző feladatból következik $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ esetén.

7. $6 + 2i, \quad -2 + 8i.$ **8.** $-2 - 2i, \quad 8 - 6i.$ **9.** $2 - 4i, \quad 6 - 2i.$

10. $-7 + 23i.$ **11.** $-3 - i.$ **12.** $23 + 14i.$

13. A nevező kojugáltjával bővítjük a törtet, majd elvégezzük a szorzásokat:
$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{3+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(3-2)+(2+3)i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

14. $\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i.$ **15.** $\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i.$

16. A nevezőbeli szorzás elvégzése és a konjugálttal való bővítés, vagy a nevezőbeli tényezők konjugáltjaival való bővítés és a szorzások elvégzése után: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$

17. $-\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i.$ **18.** $-\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i,$ **19.** $\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i.$

20. $-\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i.$ **21.** $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i.$

22. $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{17}{25} - \frac{19}{25}i, \quad \frac{\overline{z}_1}{z_2} = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i, \quad \frac{z_1}{\overline{z}_2} = \frac{23}{25} - \frac{11}{25}i,$
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{17}{25} + \frac{19}{25}i, \quad \frac{z_1}{|z_2|} = \frac{1}{5} - i, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{26}}{5}.$

23. $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i, \ -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \ \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i, \ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$

24. $\sqrt{157} + 1$ (l. **T 6.6**). **25.** $-7 + 3i.$ **26.** 1.

27. $\frac{|3+4i||2+i|}{|1+2i||4+3i|} = 1.$ **28.** $\frac{\left|\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}\right|}{\left|(x-y) + 2i\sqrt{xy}\right|} = 1.$

29. A $3x+5y=7$, $2y-x=5$ egyenletrendszert megoldva: $x=-1$, $y=2$.

30. $|z-(-2+i)|=4$, azaz $|z+2-i|=4$.

31. Vagy csak annyit írunk, hogy $\operatorname{Im} z = m \operatorname{Re} z + b$, vagy a következőt tesszük: ha $z=x+iy$, akkor $x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ és $y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$, amiből behelyettesítés után kapjuk, hogy $(1-mi)z-(1+mi)\overline{z}-2bi=0$.

32. $|z+3|+|z-3|=10$.

33. A 0 középpontú 1 és 2 sugarú körök közti körgyűrű, a körvonalak nélkül.

34. Az origó középpontú, 2 sugarú körvonal.

35. Az valós tengely pontjai.

36. A $-i$ középpontú 1 sugarú körlap, a határoló körvonallal együtt.

37. $|2z-4i|<1$, ekvivalens azzal, hogy $|z-2i|<\frac{1}{2}$. Így a tartomány a $2i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú körlap (a körvonal nélkül).

38. Az egyenlőtlenséget a $z=x+yi$ behelyettesítésével átalakítva: $x^2+y^2 \leq x^2+(y+1)^2$, azaz $0 \leq 2y+1$, tehát a megoldás $Imz \leq -\frac{1}{2}$ (félsík).

39. $z=x+yi$ behelyettesítése és átalakítás után kapjuk, hogy $(x+5)^2+y^2=16$, ami a -5 közepű, 4 sugarú kör egyenlete. Ennek komplex alakja: $|z+5|=4$.

40. Ismeretes, hogy az xy koordináta-sikon bármely kör vagy egyenes egyenlete felirható $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ $(A,B,C,D \in \mathbf{R})$ alakban. (Ez az egyenlet akkor lehet egyenes egyenlete, ha $A=0$.) Ha $z=x+iy$, akkor $x^2+y^2=z\overline{z}$, $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ és $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, amiből $Az\overline{z}+\left(\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2i}\right)z+\left(\dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2i}\right)\overline{z}+D=0$.

41. $x_1=\sqrt{2}i$, $x_2=-\sqrt{2}i$,

42. $x_1=1+i$, $x_2=1-i$.

43. $x_1=3+2i$, $x_2=3-2i$.

44. $x_1=-4+i$, $x_2=-4-i$.

45. $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{2}i$, $x_4=-\sqrt{2}i$.

46. $x_1=\sqrt{2}i$, $x_2=-\sqrt{2}i$, $x_3=\sqrt{3}i$, $x_4=-\sqrt{3}i$.

47. A $z=x+yi$ helyettesítéssel a $\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=2+i$ (komplex) egyeletet kapjuk, amely ekvivalens a $\sqrt{x^2+y^2}+x=2$, $y=1$ valós egyenletrendszerrel. Ez utóbbiból $y=1$, $x=\frac{3}{4}$, tehát $z=\frac{3}{4}+i$.

48. $z_1=i$, $z_2=-i$.

49. $z_1=1+i$, $z_2=1-i$.

50. $z_1=1-i$, $z_2=i$.

51. $z_1=-iz_2$, z_2 tetszőleges.

52. $z_1=-2i$, $z_2=-3$.

53. $z_1=-1+i$, $z_2=-2-i$.

54. $z_1=i$, $z_2=1-i$.

55. $z_1=-1$, $z_2=2-i$.

56. Ha megszorozzuk a $z^2+z+1=0$ egyenlet mindkét oldalát $z-1$-gyel, akkor $z^3=1$ adódik. Így $z^{65}+z^{-65}=(z^3)^{21}z^2+(z^3)^{-21}z^{-2}=z^2+z^{-2}=z^2+z=-1$.

57. $(-1)^8\binom{16}{8}\left(\dfrac{a}{x}\right)^8(\sqrt{x})^8=12870\dfrac{a^8}{x^4}$.

58. $\dfrac{40095}{4096}a^{22/3}$.

59. A hatodikban.

60. A kilencedikben.

61. $\dfrac{455}{x^3}(m=15)$.

62. $3003a^{10}$ $\left(\binom{m}{3}=\binom{m}{12}\right.$ miatt $12=m-3$, azaz $m=15$).

63. $35x^5$. **64.** $n=7$. **65.** $x_1=10,\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{10^5}}$.

66. $x_1=10,\ x_2=10^{-4}$.

67. Alkalmazzuk a binomiális tételt az $a=1,\ b=1$ esetre.

68. Alkalmazzuk a binomiális tételt az $a=1,\ b=-1$ esetre.

69. Útmutatás: Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et, és használjuk fel a $k!+k\cdot k!=k!(k+1)=(k+1)!$ összefüggést.

70. $\binom{n}{1}=n\binom{n-1}{0},\quad 2\binom{n}{2}=n\binom{n-1}{1},\dots,n\binom{n}{n}=n\binom{n-1}{n-1}$, ezért
$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n}=n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\dots+\binom{n-1}{n-1}\right]$,
ami **67.** szerint egyenlő $n\cdot 2^{n-1}$-nel.

71. Bontsuk fel az egyes tagokat a $(k+1)\binom{n}{k}=\binom{n}{k}+k\binom{n}{k}$ összefüggés alapján. Ezzel visszavezetjük a feladatot a **67.** és **70.** feladatokra.

72. Kiegészítve az egyenlet bal oldalát az $1-\binom{n}{0}+\binom{n}{1}-\binom{n}{1}$ összeggel és felhasználva a $(k-1)\binom{n}{k}=k\binom{n}{k}-\binom{n}{k}$ összefüggést, visszavezetjük a feladatot a **67.**, és **70.** feladatokra.

73. Induljunk ki az egyenlet jobb oldalából. A binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}=$$
$$=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-3}{k-3}=\dots$$
$$=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}+\dots+\binom{n-k}{0}.$$

74. Az $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ összefüggés miatt a bal oldal első két tagjának összege: $\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+2}{1}$, ezért az első három tag összege: $\binom{n+2}{1}+\binom{n+2}{2}=\binom{n+3}{2}$, és így tovább, a bal oldal első k tagjának összege $\binom{n+k}{k-1}$, így a teljes bal oldal $\binom{n+k}{k-1}+\binom{n+k}{k}$, ami valóban egyenlő a jobb oldallal.

75. Lásd a **73.** feladat megoldását. **76.** Lásd a **73.** feladat megoldását.

77. A binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján
$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$, $\binom{n}{4} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}$, ...
Beírva ezeket a megfelelő tagok helyébe, visszavezettük a feladatot a **67.** feladatra.

78. Lásd az előző feladat megoldását.

79. Hasonlítsuk össze az $(a+b)^{2n}$ binomiális kifejtésében és az $(a+b)^n(a+b)^n$ szorzatban az a^nb^n-es tagok együtthatóit és vegyük figyelembe a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát.

80. Ha $n = 2m-1$, akkor a szimmetriatulajdonság miatt
$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{n}^2 = 0$, $-\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{n-1}^2 = 0, \ldots, (-1)^{m-1}\binom{2m-1}{m-1} + (-1)^m\binom{2m-1}{m} = 0$,
tehát az összeg valóban 0.
Az $n = 2m$ eset vizsgálatához szorozzuk össze az $(a+b)^n$ és $(a-b)^n$ binomiális kifejtését, és adjuk össze az a^nb^n-es tagok együtthatóit. Akkor éppen az egyenlet bal oldalát kapjuk. Az $(a^2-b^2)^n$ kifejtésében pedig az a^nb^n-es tag együtthatója $(-1)^m\binom{2m}{m}$.

81. Egyrészt írjuk fel $(1+i)^{8n}$-t a binomiális tétel alapján, másrészt mutassuk meg, hogy $(1+i)^8 = 16$.

82. $72(\sqrt{3}i - 1)$. **83.** $-128(1+i)$. **84.** $-8(1+i)$.

85. -27.

86. $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = 0$, $r = 3$, $\varphi_0 = 0$. **87.** $\operatorname{Re} z = -8, \operatorname{Im} z = 0, r = 8, \varphi_0 = \pi$.

88. $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -2$, $r = 2$, $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$.

89. $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 1$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.

90. $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = 1$, $\varphi_0 = \frac{4\pi}{3}$.

91. $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -2\sqrt{3}$, $r = 4$, $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$.

92. $\operatorname{Re} z = 4\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = -4$, $r = 8$, $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$.

93. $\operatorname{Im}(x+iy+i) = y+1 > 2$, $\operatorname{Im} z > 1$. **94.** $\operatorname{Im}(ix - y) = x \geq 1$, $\operatorname{Re} z \geq 1$.

95. Az $x = 1$ számot ábrázoló ponton átmenő és a valós tengelyre merőleges egyenes.

96. $\operatorname{Re}(2x + 2iy) = 2x < 4$, $x < 2$, $\operatorname{Re} z < 2$.

97. Annak a szögtartománynak a pontjai, amelyet az $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \geq 0$ feltételekkel meghatározott félegyenes és a képzetes tengely pozitív fele határol, az előbbi félegyenes pontjait kizárva, az utóbbi pontjait hozzászámítva a tartományhoz.

98. $\arg[(1+i)z] = \arg(1+i) + \arg z$ miatt a feltétel átírható a $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ alakra; azok a pontok elégítik ki, amelyek az $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$ egyenletű egyenestől "jobbra" eső félsíkban vannak (az egyenest kizárva).

99. $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **100.** $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

101. $4(\cos\pi + i\sin\pi)$.

102. $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

103. $12\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

104. $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

105. $\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

106. $4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

107. $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$.

108. $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$.

109. $2i$.

110. $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

111. $-2i$.

112. $-3 - \sqrt{3}i$,

113. $x^2 + y^2 = a^2$. Origó középpontú, a sugarú kör.

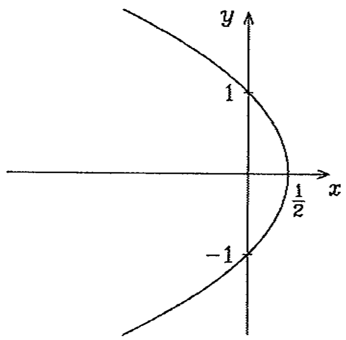
114. $x^2 + (y-a)^2 = a^2$. A $(0,a)$ középpontú, a sugarú kör.

115. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. Az $(a,0)$ középpontú, a sugarú kör.

116. $\cos\varphi$-vel való beszorzás után kapjuk, hogy $r\cos\varphi = 2$, tehát a görbe az $x = 2$ egyenletű egyenes.

117. $y = a$ egyenletű egyenes.

118. $(1+\cos\varphi)$-vel való beszorzással kapjuk, hogy $r + r\cos\varphi = 1$, azaz $\sqrt{x^2+y^2} + x = 1$, ahonnan átalakítás után az $y^2+2x-1 = 0$ ill. $y^2 = 2(\frac{1}{2} - x)$ egyenlethez jutunk, melynek képe az ábrán látható parabola.



119. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis.

120. $y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ egyenletű parabola.

121. $y^2 = 4a(4 - x)$ egyenletű parabola.

122. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ egyenletű parabola.

123. $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. Ellipszis, amelynek a középppontja a $(3,0)$ pont, tengelyei az x, illetve y tengellyel párhuzamosak, a tengelyek félhossza 5, illetve 4.

124. $\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$. A görbe $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ középpontú ellipszis, melynek az x, ill. y tengellyel párhuzamos tengelyei vannak; a tengelyek félhossza: $a = \frac{4}{3}$, ill. $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

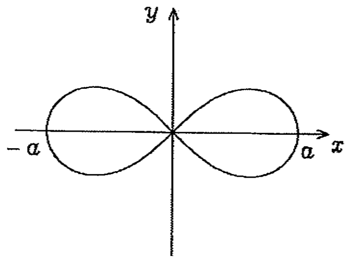
125. Mivel r csak nemnegatív lehet, alkalmas feltételt kell keresnünk arra, hogy a jobb oldal pozitív legyen. $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ helyettesítéssel $r = \frac{16}{3 - 5\frac{x}{r}}$, amiből

$3r = 16 + 5x$. Emiatt $16 + 5x \geq 0$, azaz $x > -\dfrac{16}{5}$. Az r helyébe $\sqrt{x^2+y^2}$-et írva a $3r = 16 + 5x$ egyenletből átalakítások után az

$$\frac{(x+5)^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ez olyan hiperbola egyenlete, melynek valós tengelye az x tengelyen, képzetes tengelye az $x = -5$ egyenletű egyenesen van és a tengelyek és félhossza 3 ill. 4; ezek miatt a hiperbola egyik fókusza az origóban van. Az $x > -\dfrac{16}{5}$ feltétel miatt a hiperbolának csak a jobb oldali ágát vehetjük figyelembe.

126. Négyzetreemelés és átalakítás után $r^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Felhasználva a **T 6.11** tétel egyenleteit: $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$, amiből a keresett egyenlet, az ábrán is látható un. **lemniszkáta** egyenlete: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.



127. $6(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$.

128. $6\sqrt{2}(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$.

129. $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$.

130. $6\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i \sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

131. $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$.

132. $-\cos\varphi + i\sin\varphi = (-1)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = (\cos\pi + \sin\pi)(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)$.

133. $\cos(\pi + \varphi) + i\sin(\pi + \varphi)$.

134. Forgassuk el a $z_2 - z_1$ helyvektorát 60°-kal, ill. −60°-kal és adjuk a z_1 helyvektorához. A két megoldás:

$z_3 = (4-3i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1+4i) = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}) \approx 5,59807 + 5,96410i$,

$z_3' = (4-3i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1+4i) = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{5}{2} - 2\sqrt{3}) \approx 0,401924 - 0,964101i$.

135. A $z_2 - z_1$ helyvektorának 90°-os (ill. −90°-os) elforgatásával kapott vektort hozzáadva a z_1 és a z_2 helyvektorához kapjuk az első (ill. második) megoldást. A $z_2 - z_1$ helyvektorát 45°-kal ill. −45°-kal elforgatva, a kapott vektorokat $\frac{1}{\sqrt{2}}$- vel szorozva és z_1 helyvektorához adva kapjuk a harmadik megoldást. A három megoldás:

$$z_3 = 8i, \qquad z_4 = 7 + 4i;$$
$$z_3' = -8 - 6i, \qquad z_4' = -1 - 10i;$$
$$z_3'' = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i, \qquad z_4'' = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}i.$$

A harmadik megoldás egyszerűbben úgy is megkapható, hogy $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ helyvektorához hozzáadjuk a $z_2 - z_1$ helyvektorára merőleges vektor $\frac{1}{2}$-szeresét.

136. Három megoldás van: $z_4 = z_2 + z_3 = 3 + i$, $z_4' = z_3 - z_2 = 1 + 5i$, $z_4'' = z_2 - z_3 = -1 - 5i$.

137. $z_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right)$, $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

138. $z_{k+1} = i + (3 - 5i)\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$.

139. $\frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos 103^\circ + i\sin 103^\circ)$.

140. $\frac{3}{4}(\cos 62^\circ + i\sin 62^\circ)$.

141. $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$.

142. $\frac{-4}{19} - \frac{\sqrt{3}}{19}i$.

143. -64.

144. $-i$.

145. $-64(\sqrt{3} + i)$.

146. $-\frac{1 + \sqrt{3}i}{2024}$.

147. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$.

148. $\frac{i}{4^9}$.

149. $-8(1 + \sqrt{3}i)$.

150. -256.

151. $-16\sqrt{3} + 16i$.

152. $1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

153. $-1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

154. $1,\quad i,\quad -1,\quad -i$.

155. $1,\quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -1,$
$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

156. $2i,\quad -\sqrt{3} - i,\quad \sqrt{3} - i$.

157. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

158. $3\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right),\ 3\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right),\ 3\left(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}\right),$
$3\left(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}\right),\ 3\left(\cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}\right)$.

159. $\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7},\quad \cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7},\quad \cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7},$
$\cos\pi + i\sin\pi = -1,\quad \cos\frac{9\pi}{7} + i\sin\frac{9\pi}{7},$
$\cos\frac{11\pi}{7} + i\sin\frac{11\pi}{7},\quad \cos\frac{13\pi}{7} + i\sin\frac{13\pi}{7}$.

160. $\sqrt{2}(\cos\varphi + i\cos\varphi)$, ahol $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$, ill. $\varphi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$. Algebrai alakba is felírható az eredmény, hisz a $\frac{\pi}{4}$-hez tartozó gyök $1 + i$, a másik két gyök például a harmadik egységgyökökkel való beszorzás útján kapható meg: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})i$.

161. Kalkulátorral legalább négy tizedes pontossággal számolva $2 + i$, $-2 - i$ adódik. A következő meggondolás szerint — amely bármely komplex szám négyzetgyökének kiszámítására használható — ezek pontos értékek. Legyen $u^2 = (x + yi)^2 = z$, akkor $x^2 - y^2 = 3$, $2xy = 4$, az utóbbiból $y = \frac{2}{x}$, és ennek felhasználásával $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ adódik, amiből, $x_{1,2}^2 = 4$, $x_{3,4}^2 = -1$, s mivel x valós, ez utóbbi hamis gyök. Tehát $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$; a megoldás: $2 + i$, $-2 - i$.

162. $3+4i$, $-3-4i$, lásd az előző feladat megoldását.

163. Az $\sqrt[n]{c^n z} = c\sqrt[n]{z}$ egyenlőség mindkét oldalán n különböző szám szerepel, és mindkét oldal n-edik hatványa $c^n z$, így az egyenlőség valóban fennáll.

164. Ekvivalens átalakításokkal $\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} = 0$, és ebből

$z + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ adódik.

Az előző feladat szerint $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Így $z = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

165. $z_1 = 2+i$, $z_2 = -2+i$.

166. $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1+i$.

167. $z_1 = -3+i$, $z_2 = -2+i$.

168. $z_{1,2} = \dfrac{-1+2i+\sqrt{(1-2i)^2+8i}}{2} = \dfrac{-1+2i+\sqrt{-3+4i}}{2} =$

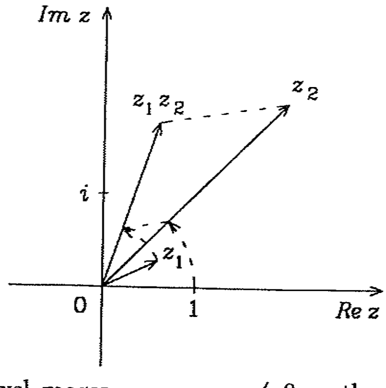
$= \dfrac{-1+2i\pm(1+2i)}{2}$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -1$.

169. A Moivre-képlet és a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk, hogy
$\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5 =$
$\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x + i(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x)$.
Amiből
$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.

170. l. az előző feladat megoldását!

171. 1.megoldás: A **161.** feladat megoldásában leírt módon $-1+4i$ és $1-4i$.
2.megoldás: Legyen $-15-8i = 17(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $\cos\varphi = -\frac{15}{17}$ és $\sin\varphi = -\frac{8}{17}$, $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}(< 2\pi)$. A $-15-8i$ szám négyzetgyökei: $\pm\sqrt{17}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$. Mivel $\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \pi$, ezért $\cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ és $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Ezekből a négyzetgyökök: $-1+4i$ és $1-4i$.

172. Ha $z_1 = 0$ vagy $z_2 = 0$, akkor a z_1z_2-höz tartozó helyvektor a $\mathbf{0}$. Ha $z_1, z_2 \neq 0$, akkor $\dfrac{|z_1z_2|}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{1}$, továbbá ha z_1 argumentuma φ_1 és z_2 argumentuma φ_2, akkor z_1z_2 argumentuma $\varphi_1+\varphi_2$. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő ábráról leolvasható.



173. Ha két komplex szám egyenlő, akkor abszolút értékük is, ezért $|z|(|z|^{n-1}-1) = 0$. Ebből következik, hogy $|z| = 0$ vagy $|z|^{n-1} = 1$, azaz $z = 0$ vagy $|z| = 1$. Az eredeti egyenlet mindkét oldalát z-vel megszorozva, a $z \neq 0$ esetben az $|z|^2 = z^{n+1}$ egyenletet kapjuk. Ebből a $|z| = 1$ miatt $z^{n+1} = 1$ adódik. Összegezve, az egyenlet megoldásai: 0 és a $\cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$ $(k = 0,1,2,\dots,n)$ $(n+1)$-edik egységgyökök.

174. Jelöljük az összeget $s_{n,j}$-vel. Könnyen belátható, hogy $e_k = e_1^k$ $(k = 0,1,\dots,n)$, ezért $s_{n,j} = 1+e_1^j+e_1^{2j}+\cdots+e_1^{nj}$. Ha $e_1^j = 1$, akkor $s_{n,j} = n+1$. Ha $e_1^j \neq 1$, akkor $s_{n,j} = \frac{1-(e_1^j)^{n+1}}{1-e} = \frac{1-(e_1^{n+1})^j}{1-e} = \frac{1-1^j}{1-e} = 0$.

175. Ha $e = 1$, akkor az összeg: $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ha $e \neq 1$, akkor $1 + 2e + 3e^2 + \cdots + (n+1)e^n = (1 + e + e^2 + \cdots + e^n) + (e + e^2 + \cdots + e^n) + \cdots + (e^{n-1} + e^n) + e^n = \frac{1-e^{n+1}}{1-e} + e\frac{1-e^n}{1-e} + \cdots + e^{n-1}\frac{1-e^2}{1-e} + e^n\frac{1-e}{1-e} = \frac{(1+e+e^2+\cdots+e^n)-(n+1)e^{n+1}}{1-e}$. Mivel $1+e+e^2+\cdots+e^n = 0$ és e^{n+1}, ezért a végeredmény $\frac{n+1}{e-1}$.

176. $|(1+i)z^3 + iz| \leq |(1+i)z^3| + |iz| = |1+i||z|^3 + |i||z| = \sqrt{2}|z|^3 + |z| < \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} < 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

177. Az egyenlőség bal oldalát írjuk fel trigonometriai alakban.

178. Az egyenlőség bal oldalát írjuk fel trigonometriai alakban.

179. Írjuk fel az $(1+i)^n$ kifejezést a binomiális tétel segítségével. A keresett összeg: $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ (l. a **177.** feladatot!).

180. A keresett összeg: $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$ (l. az előbbi feladatot!).

181. Használjuk fel, hogy a -1 komplex n-edik egységgyökeinek összege 0. Továbbá azt, hogy ha n páratlan szám, akkor a komplex egységgyökök a komplex számsíkon olyan szabályos n-szög csúcsai, amely középpontja a 0, körülírt köre egységsugarú és szimmetrikus a valós tengelyre. Ezeket az észrevételeket alkalmazzuk az $n = 11$ esetre.

182. L. az előző feladat megoldását!

183. L. **181.** feladat megoldását!

7. Sorozatok (megoldások)

1. $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$.

2. $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}$.

3. $1, \sqrt{6}, \sqrt{7}-1, \sqrt{2}, 3-\sqrt{3}, \sqrt{10}-2$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $1, 4, 9, 16, 25$.

6. $3, 9, 18, 30, 45$.

7. $-2, 2, -4, 4, -6$.

8. $-1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{8}$.

9. $a_1 = \sum_{k=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) = \sum_{j=1}^{1} j = 1, a_2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) = \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j = 1 + (1+2) = 4$, hasonlóan $a_3 = 10, a_4 = 20, a_5 = 35$.

10. $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n = i^n$, ezért: $1, i, -1, -i, 1$.

11. $\left(\frac{(i-1)^3}{2}\right)^n = (i+1)^n$, így: $1, i+1, 2i, 2(i-1), -4$.

12. $a_n = 2n$.

13. $a_n = -8-5n$.

14. $a_n = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{10^n-1}{3\cdot 10^n}$.

15. $a_n = (-0,1)^n$.

16. $a_n = 235\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{3k}} = \frac{235}{999}\left(1 - \frac{1}{10^{3n}}\right)$.

17. $1 + \frac{1}{2^n - 1}$.

18. $a_n = 1 + (-1)^n$.

19. $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ vagy "utasítással" $a_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } n = 4k-3 \text{ vagy } 4k-2; \\ 1, & \text{ha } n = 4k-1 \text{ vagy } 4k\,. \end{cases}$

20. $a_n = \frac{n^2+1}{5n-2}$.

21. $a_n = \cos\frac{n\pi}{3}$.

22. $a_n = \begin{cases} k, & \text{ha } n = 2k-1; \\ \frac{1}{k+1}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$

23. $a_n = i^{2n-1}$.

24. $a_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbf{N}$.

25. $(i-1)^{n+4} = -4(i-1)^n$, ezért $a_n = (i-1)^n, n \in \mathbf{N}$.

26. A sorozat minden tagja -1.

27. $2, \frac{3}{2}, 1, 0$; az 5.elem már nem létezik.

28. $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{8}$.

29. $1, 2, \frac{5}{2}, \frac{29}{10}, \frac{941}{290}$.

30. $-1, i+1, 3i, i-9, 80-17i$.

31. $2i, i-3, 9-5i, 57-89i, -4671-10145i$.

32. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$.

33. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{0}, \mathbf{0}$.

34. Ha $u = u_1 + iu_2$ és $v = v_1 + iv_2$, akkor $|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$.

35. Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} (\in M)$ vektorokra

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \\ 0, & \text{ha } \mathbf{a} = \mathbf{b}; \end{cases}$$

ezért csak a háromszög-egyenlőtlenséggel kell részletesebben foglalkozni. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$. Ha van köztük két egyenlő vektor, akkor a háromszög-egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, mégpedig egyenlőséggel. Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ között nincsenek egyenlők, akkor $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 2 > 1 = d(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

36. Ha H korlátos, akkor van olyan Q pont a térben és olyan v pozitív valós szám hogy a H minden P pontjára $d(Q,P) < v$. Ebből $d(O,P) \leq d(O,Q) + d(Q,P) < d(O,Q) + v$, azaz H minden pontja benne van az O középpontú $d(O,Q) + v$ sugarú gömb belsejében. Az állítás megfordítása nyilvánvaló. A feladat komplex számokra vonatkozó része hasonlóan bizonyítható.

37. Csak a háromszög-egyenlőtlenség bizonyítását vázoljuk. Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ komplanáris egységvektorok. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge α, a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok szöge β, akkor

$$d(\mathbf{a},\mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{c}||\sin(\alpha \pm \beta)| = |\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta| \leq$$

$$|\sin\alpha\cos\beta| + |\cos\alpha\sin\beta| = |\sin\alpha||\cos\beta| + |\cos\alpha||\sin\beta| \leq$$

$$|\sin\alpha| + |\sin\beta| = d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

38. Csak a háromszög-egyenlőtlenség bizonyítását adjuk meg. Ha $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ és $C(c_1,c_2)$ az $\mathbf{R}^2$ metrikus tér tetszőleges pontjai, akkor

$$d(A,C) = |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| = |a_1 - b_1 + b_1 - c_1| + |a_2 - b_2 + b_2 - c_2|$$

$$\leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1| + |a_2 - b_2| + |b_2 - c_2| = d(A,B) + d(B,C).$$

Az $(1,0)$ pont 1 sugarú környezete a $(0,0),(1,-1),(2,0),(1,1)$ csúcspontú négyzet belső pontjainak halmaza az $(1,0)$ pont kivételével.

39. Az előző feladathoz hasonló módon járhatunk el. Az $(1,-1)$ ponttól 1 távolságra lévő pontok halmaza a $(0,0),(2,0),(2,-2),(0,-2)$ csúcspontú négyzet határpontjai.

40. Minden $x(\in A)$ elemre $\inf A \leq x$, s így $-\inf A \geq -x$. Ez azt jelenti, hogy $-\inf A$ a B egy felső korlátja. Ha w a B egy felső korlátja, akkor minden $x(\in A)$ elemre $-x \leq w$, azaz $x \geq -w$. Következésképpen $-w \leq \inf A$, s így $w \geq -\inf A$, tehát $-\inf A = \sup B$.

41. A metrikától megkövetelt első három tulajdonság teljesülését könnyen beláthatjuk. A háromszög-egyenlőtlenség a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséggel (**1.85**) a következőképpen bizonyítható: Legyenek $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ és $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ az $\mathbf{R}^n$ halmaz tetszőleges pontjai.

$$(d(A,B) + d(B,C))^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k - c_k)^2}\right)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|b_k - c_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 \sum_{k=1}^{n}|b_k - c_k|^2} \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k||b_k - c_k|\right)^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k - b_k| + |b_k - c_k|)^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(|a_k - b_k + b_k - c_k|)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2 = d(A,C)^2.$$

42. Bármely $p(\in X)$ és $q(\in X)$ esetén $d(p,p) = 0$ és $d(p,q) = d(q,p) \geq 0$. Legyen most r az X halmaz egy tetszőleges további eleme. Ha $p = r$, akkor $d(p,q) + d(q,r) \geq 0 = d(p,r)$. Ha $p \neq r$ és $p = q$, akkor $q \neq r$, s így $d(p,q) + d(q,r) = 1 = d(p,r)$. Ha $p \neq r$ és $p \neq q$, akkor $d(p,q) + d(q,r) \geq 1 = d(p,r)$.

43. Legyen $H \subseteq X$ és $p \in H$. Például a p pont 1 sugarú teljes környezete H-hoz tartozik (a p pont 1 sugarú teljes környezetében ugyanis csupán a p pont van), azaz H minden pontja belső pont. Ez azt jelenti, hogy H nyílt halmaz. Hasonlóan látható be, hogy $X - H$ minden pontja H-nak külső pontja. Mivel, így H-nak határpontja nincs, H zárt is.

44. Nem. Például: $(3-2)^2 + (2-1)^2 \not\geq (3-1)^2$.

45. Igen. $d(x,y) \geq 0,\quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y;\quad d(x,y) = d(y,x)$.

$$\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|} \geq \sqrt{|x-z|} \Longleftrightarrow$$

$$|x-y| + |y-z| + 2\sqrt{|x-y||y-z|} \geq |x-z|,$$

de $|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$, s ebből már adódik a háromszög-egyenlőtlenség.

46. Nem. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$.

47. Igen.

48. A sorozat nem korlátos, mert a pontok második koordinátáiból alkotott sorozat nem korlátos.

49. A sorozat korlátos, mert minden n-re:

$$0 < \frac{3n+1}{2n} \leq \frac{3n+n}{2n} = 2;\quad 0 < \frac{n-1}{n} < 1.$$

50. Korlátos.

51. Korlátos.

52. $|z_n| = \left(\dfrac{|1+i|}{\sqrt{2}}\right)^n = 1$, ezért a sorozat korlátos.

53. A rekurzív definícióról áttérhetünk a sorozat egyetlen képlettel való megadására: $z_n = (1+i)^n \quad (n \in \mathbf{N})$. Bármely v pozitív valós számra: $|z_n| \geq v$, ha $n \geq \dfrac{\lg v}{\lg \sqrt{2}}$, ezért a sorozat nem korlátos.

54. A sorozat korlátos, mert a koordinátákból alkotott mind a két sorozat korlátos.

55. Korlátos.

56. Bármely $\varepsilon > 0$ esetén:

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \frac{2}{2n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Ha $\varepsilon = 10^{-2}$, akkor $n_0 = 99,5$; azaz a 100. elemtől kezdve esnek a sorozat elemei az 1-nek 10^{-2} sugarú teljes környezetébe, tehát $n_1 = 100$.

57. $n_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1, n_1 = 1000.$

58. Ha $n > 2$, akkor $\left|\dfrac{n+2}{3n-8} - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{14}{3(3n-8)}$. Ebben az esetben $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > \dfrac{14}{9\varepsilon} + \dfrac{8}{3}$. $n_1 = 1403$.

59. $n_0 = \dfrac{1}{\log_3(\varepsilon+1)}, \quad n_1 = 100.$

60. Mivel $0 < a_n < \frac{1}{3}$, ezért $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$ esetén a sorozat minden tagja benne van az 1 szám $\frac{1}{3}$ sugarú környezetében, ezért küszöbszámnak választható bármely 1-nél kisebb valós szám. Ha $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, akkor

$a_n \in (\frac{1}{3} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon)$ akkor és csak akkor, ha $n > n_0 = \log_4 \dfrac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$. $n_1 = 1$.

61. $|a_n - a| = \left|\lg \dfrac{n+1}{n+2}\right| = \lg \dfrac{n+2}{n+1} < \varepsilon$. Ebből $n_0 = \dfrac{2-10^\varepsilon}{10^\varepsilon - 1}$. $n_1 = 500$.

62. $n_0 = \dfrac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}, \quad n_1 = 20.$ **63.** $n_0 = \log_3 \dfrac{2}{\varepsilon}, \quad n_1 = 101.$

64. $|a_n - a| = \left|\dfrac{9(-1)^{n-1}}{5(5n + (-1)^{n-1})}\right| = \begin{cases} \frac{9}{5(5n-1)}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ \frac{9}{5(5n+1)}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

$$\frac{9}{5(5n-1)} < \varepsilon \iff \frac{9}{25\varepsilon} + \frac{1}{5} < n,$$

$$\frac{9}{5(5n+1)} < \varepsilon \iff \frac{9}{25\varepsilon} - \frac{1}{5} < n.$$

Ezek szerint $n_0 = \dfrac{9}{25\varepsilon} + \dfrac{1}{5}$. $n_1 = 37$.

65. Az $|a_n - a| = \dfrac{n}{n^3+1} < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldása elég nehézkes. Helyette a következő becslést végezhetjük el:

$$\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Ha $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, akkor az eredeti egyenlőtlenség is biztosan teljesül. Így viszont n_1-et is csak becsülni tudjuk, azaz az 32. elemtől kezdve minden elem biztosan benne van a 0 szám 10^{-3} sugarú teljes környezetében.

66. Az állítást valós számsorozatra bizonyítjuk (azaz $m = 1$ esetre), de $m > 1$-re hasonlóan bizonyítható. Legyen az $[a_n]$ valós sorozat korlátos, akkor van olyan $k \in \mathbf{R}^+$, hogy $|a_n| < k$. Tegyük fel, hogy a sorozatnak a torlódási helye, de nem határértéke, akkor választható olyan $\delta \in \mathbf{R}^+$, hogy $(a-\delta, a+\delta) \subset [-k, k]$ és a $(-k, a-\delta)$ vagy a $(a+\delta, k)$ intervallumba a sorozatnak végtelen sok eleme esik. A Bolzano-Weierstrass-tétel (**T 7.17**) szerint kiválasztható a $(-k, a-\delta)$ vagy a $(a+\delta, k)$ intervallumba eső konvergens részsorozat, azaz a sorozatnak legalább két torlódási helye van.

67. Legyen például $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy nincs olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$ minden p pozitív egész számra teljesül. Tegyük fel, hogy létezik az n_0 küszöbszám, és legyen n az a pozitív egész szám, amelyre $n_0 < n \leq n_0 + 1$. Mivel

$$\frac{1}{2} > |a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$$

(minden tört nevezője helyett $n+p$-t írva), ezért minden $p \in \mathbf{N}^+$-ra: $\frac{p}{n+p} < \frac{1}{2}$. Ebből: $p < n$, ami lehetetlen.

68. Nem. Az előző feladat nem konvergens sorozata teljesíti ezt a feltételt: $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$, ha $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

69. $\lg(n+1) > k \iff n > 10^k - 1, \quad n_0 = 10^{10}$.

70. $\frac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n} - 1 > k \iff n > (k+1)^2, \quad n_0 = 10^6 + 1$.

71. 1. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2} > k, \text{ ha } n > 2k.$$

2. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1} > n - 1 \geq k, \text{ ha } n \geq k+1.$$

3. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} > k \iff n^2 - kn - k > 0 \iff n > \frac{k + \sqrt{k^2+4k}}{2}. \quad n_0 = 21.$$

72. Bármely $\varepsilon (\in \mathbf{R}^+)$-hoz van olyan $n_1 \in \mathbf{N}^+$, hogy ha $n > n_1$, akkor $0 \leq a_n < \varepsilon$. Ha $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ és $n > n_2$, akkor $|b_n - 0| = |b_n| \leq a_n < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

73. Jelölje $|z|$ egészrészét szokásosan $\operatorname{Ent}|z|$, és legyen $n_0 = \operatorname{Ent}|z| + 1$. Akkor $n \geq n_0$ esetén $\frac{|z|}{n} < 1$ és

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|}{1}\frac{|z|}{2}\cdots\frac{|z|}{n_0}\frac{|z|}{n_0+1}\cdots\frac{|z|}{n} \leq \frac{|z|^{n_0}}{n_0!}\frac{|z|}{n} = \frac{|z|^{n_0+1}}{n_0!}\frac{1}{n},$$

ha $n > n_0$, amiből már **72.** feladat alapján adódik az állítás.

74. A $k = 0$ esetben a **T 7.27** tétel szerint igaz az állítás. Legyen $k \geq 1$. A sorozat alulról korlátos (0 például egy alsó korlátja). A sorozat valamilyen indextől kezdve szigorúan monoton csökkenő:

$$\frac{n^k}{a^n} > \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \iff a > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \iff \frac{1}{\sqrt[k]{a} - 1} < n.$$

($\sqrt[1]{a}$ legyen egyenlő a-val.) A **T 7.22** tételt felhasználva kapjuk, hogy a sorozat konvergens. Tekintsük a sorozat páros indexű elemeinek részsorozatát. A **T 7.15** tétel szerint:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^k}{a^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2^k\left(\frac{1}{a}\right)^n\frac{n^k}{a^n}=2^k\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,$$

mivel $a>1$ miatt $0<\dfrac{1}{a}<1$.

75. Használjuk fel az $\dfrac{n^k}{n!}=\dfrac{a^n}{n!}\dfrac{n^k}{a^n}$ azonosságot és az előző két feladat eredményét.

76. Ha $q=0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyen $0<|q|<1$, akkor $\left|\dfrac{1}{q}\right|>1$. Alkalmazzuk a **74.** feladat állítását az $a=\left|\dfrac{1}{q}\right|$ és $k=1$ esetre. Ezután a **72.** feladat segítségével kapjuk az állítást, ha $a_n=|nq^n|$ és $b_n=nq^n$. (Megjegyezzük, hogy a feladat a **74.** feladat nélkül is megoldható. Ehhez először megmutatjuk, hogy $[|nq^n|]$ sorozat valamilyen indextől kezdve szigorúan monoton csökken, ha $q\neq 0$: $n|q|^n>(n+1)|q|^{n+1}\iff n>n_0=\dfrac{|q|}{1-|q|}$. Mivel az $[|nq^n|]$ $(n>n_0)$ sorozat alulról korlátos (0 egy alsó korlátja), így konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart. Tegyük fel,hogy a sorozatnak van egy k pozitív alsó korlátja, azaz minden $n>n_0$ esetén:$1>|q|\geq\dfrac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{n}}>0$.

Ismert, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{n}}=1$. Ez azt jelenti, hogy 1 bármely környezetéből a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja marad ki, ami ellentmond az előbbi egyenlőtlenségnek. Ezért $\lim_{n\to\infty}|nq_n|=0$. ($n_0$-nál kisebb vagy egyenlő indexű elemek nem változtatják meg a határértéket!))

77. Először mutassuk meg, hogy az $[\sqrt[n]{n!}]$ sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért a reciproka szigorúan monoton csökkenő. Mivel a sorozat pozitív tagú, ezért 0 egy alsó korlátja. A **73.** feladat segítségével mutassuk meg, hogy nincs a sorozatnak pozitív alsó korlátja.

78. Van olyan $0\leq\varphi<2\pi$, hogy $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. A Moivre-képlet szerint $z^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. Legyen $\lim_{n\to\infty}\cos n\varphi=a$ és $\lim_{n\to\infty}\sin n\varphi=b$. Akkor $a=\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)\varphi=\lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi\cos\varphi-\sin n\varphi\sin\varphi)=a\cos\varphi-b\sin\varphi$ és $a=\lim_{n\to\infty}\cos(n-1)\varphi=a\cos\varphi+b\sin\varphi$. Ha $\cos\varphi\neq 1$, akkor $a=0$ és $b=\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\varphi=b\cos\varphi$ miatt, $b=0$; Így $\lim_{n\to\infty}z^n=0$, amiből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}|z|^n=0$, ami azonban lehetetlen. Így $\cos\varphi=1$, azaz $z=1$. Ebben az esetben a sorozat konvergens.

79. 1.megoldás: $0\leq\left|\sin n\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}\right|\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\longrightarrow 0,\quad$ ha $\quad n\to\infty$.

2.megoldás: Egy korlátos és egy nullasorozat szorzata szintén nullasorozat.

80. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(1+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}},\quad 1\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq 2^{\frac{1}{n}}$ és $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. A rendőrelv miatt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$, ezért $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

81. A Bernoulli-egyenlőtlenség (T 7.34) szerint: $a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+\sqrt{n}$.
Ebből: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

82. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{(-1)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \frac{5}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = -\frac{3}{2}$ $(k \in \mathbf{N}^+)$. $\frac{5}{2}$ és $-\frac{3}{2}$ a sorozat torlódási helyei.

83. $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+1}, & \text{ha } n = 2k-1; \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2, & \text{ha } n = 2k \ (k \in \mathbf{N}^+). \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 1.$
A sorozat egyetlen torlódási helye 1, de a sorozat nem konvergens.

84. $a_n = \dfrac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}2^n} \longrightarrow 0$, ha $n \to \infty$.

85. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

86. $-\infty$.

87. A sorozatnak három torlódási helye van : $0, 1, \frac{1}{2}$.

88. $\dfrac{n^3+1}{n^2+1} > \dfrac{n^3}{n^2+1} \geq \dfrac{n^3}{2n^2} = \dfrac{n}{2} \Longrightarrow -\dfrac{n^3+1}{n^2+1} < -\dfrac{n}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

89.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_{q-1}}{n^{q-1}} + \frac{b_q}{n^q}\right)} =$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{p-q}\frac{a_0}{b_0} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

90. **48.**: divergens; **49.**: $\lim_{n\to\infty} P_n = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$; **50.**: divergens, **51.**: divergens; **52.**: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}$, a sorozat divergens; **53.**: divergens; **54.**: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{i}+\mathbf{j}$; **55.**: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{i}+\mathbf{j}$.

91. A törtet (n^2+i)-vel bővítve kapjuk, hogy $\dfrac{n^4+n^2-1}{n^4+1} + i\dfrac{-n^4+2n^2}{n^4+1}$. A **T 7.28** tétel szerint: $\lim_{n\to\infty} z_n = 1-i$. A feladat egyszerűbben is megoldható: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n} = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} \frac{1-i\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{i}{n^2}} = 1-i$.

92. $\lim_{n\to\infty} z_n = i$.

93. Divergens.

94. $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

95. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{\left(\frac{i}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{i}{3}\right)^n} = 0$, mert $\left|\frac{i}{3}\right| < 1$.

96. A sorozatnak csak két eleme van: $0, -i$.

97. A sorozat divergens, mert $|1-i| = \sqrt{2}$.

98. Alkalmazzuk a Moivre-képletet, $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

99. $\sum_{k=1}^{n} i^k = \frac{1-i^{n+1}}{1-i}$; a sorozat divergens, négy torlódási pontja van.

100. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{i+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{i+1}} = \left(1-\left(\frac{1}{i+1}\right)^{n+1}\right)\frac{i+1}{i}$; $\lim_{n\to\infty} z_n = 1-i.$

101. $\lim_{n\to\infty} z_n = i.$

102. A sorozat divergens, mert $\frac{|1-3i|}{|1+2i|} = \sqrt{2}.$

103. $a_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1} = a_n \iff 6n^2+5n+1 > 6n^2+5n-4$. Az utóbbi egyenlőtlenség minden $n(\in \mathbf{N}^+)$-re teljesül, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}$, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{4}$.

104. Az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel is dolgozhatunk, de most kevesebb számolással jár a következő: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{20n^2-5} > 0$ minden pozitív n-re, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$, $\inf[a_n] = a_1 = -\frac{3}{5}$.

105.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} \begin{cases} > 0, & \text{ha } n > 2; \\ = 0, & \text{ha } n = 2; \\ < 0, & \text{ha } n < 2. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy $a_1 > a_2 = a_3$, és a harmadik elemtől a sorozat kezdve szigorúan monoton nő. $\inf[a_n] = a_2 = a_3 = \frac{5}{6}$, $\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

106. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ minden n-re, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = 2$, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{3}$.

107. A sorozat szigorúan monoton csökkenő, $\inf[a_n] = \lim_{n\to\infty} = -25$, $\sup[a_n] = a_1 = -\frac{124}{25}$.

108. A sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = 3$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3$, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

109. $a_2 < a_1$, a sorozat a második elemtől szigorúan monoton nő. Ha $n \geq 2$, akkor $\frac{n!}{n^2} = \frac{(n-1)!}{n} > \frac{(n-1)(n-2)}{n} \geq \frac{n^2-3n+2}{n} > \frac{n^2-3n}{n} = n-3$, azaz a sorozat felülről nem korlátos, alulról korlátos. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\inf[a_n] = a_2 = \frac{1}{2}$.

110. A sorozat nem monoton, nem konvergens, alulról korlátos, $\inf[a_n] = 0$.

111. A **73.** feladat alapján $(z = k)$ a sorozat határértéke 0.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k}{n+1} \begin{cases} > 1, & \text{ha } n < k-1; \\ = 1, & \text{ha } n = k-1; \\ < 1, & \text{ha } n > k-1. \end{cases}$$

$k \geq 3$ esetén a sorozat a $(k-1)$-edik elemig szigorúan monoton nő, a k-adik elemtől pedig szigorúan monoton csökken, $a_{k-1} = a_k$. A $k = 2$ esetben $a_1 = a_2$, s a második elemtől a sorozat szigorúan monoton csökken. A $k = 1$ esetben a sorozat szigorúan monoton csökken. A $k \geq 2$ esetben $\sup[a_n] = a_{k-1} = a_k = \dfrac{k^k}{k!}$. A $k = 1$ esetben $\sup[a_n] = a_1 = 1$.

112. A sorozat nem monoton, nem konvergens. Az $[a_{2k}; k \in \mathbf{N}^+]$ részsorozat pozitív elemű, szigorúan monoton csökkenő, alulról korlátos, tehát konvergens (határértéke 0). Az $[a_{2k-1}; k \in \mathbf{N}^+]$ részsorozat negatív elemű, szigorúan monoton növekvő, felülről korlátos, azaz konvergens. Ez azt jelenti, hogy a sorozat korlátos, $\inf[a_n] = a_1 = -1$, $\sup[a_n] = a_2 = 3$. (Torlódási helyei 0 és 2.)

113. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2(n+1)(n+10)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n+10-10}{n+10} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{10}{n+10}\right)$. Ebből látható, hogy a sorozat szigorúan monoton nő, és $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. A sorozat korlátos, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{22}$, $\sup[a_n] = \frac{1}{2}$.

114. A sorozat nem monoton, váltakozó előjelű (oszcilláló). Az $[|a_n|]$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ebből következik, hogy $\inf[a_n] = a_1 = -\dfrac{1}{2}$ és $\sup[a_n] = a_2 = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}+1}$.

115. Mivel $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{5^{n+1}}$, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right)$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$. A sorozat korlátos, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{5}$, $\sup[a_n] = \frac{1}{4}$.

116. Szigorúan monoton csökkenő, korlátos; $\inf[a_n] = \lim_{n\to\infty} = 0, \sup[a_n] = a_3 = 3$.

117. A határérték $(\frac{-4}{3})$ kiszámításakor használjuk fel a **74.** feladat eredményét $k = 2$ és $a = 4$ esetben.

118. A határérték 1 (kiszámításakor használjuk fel a **74.** feladat eredményét $k = 1$ és $a = 2$, illetve $k = 0$ és $a = 2$ esetben).

119. $a_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \sin\dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, mert egy egy nullasorozat és korlátos szorzata. $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\pi}{2}$, ezért $0 < \sin\frac{1}{n+1} < \sin\frac{1}{n}$. Továbbá $\dfrac{2^n}{3^n+1} > \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}$ minden n-re teljesül. Így

$$\frac{2^n}{3^n+1}\sin\frac{1}{n} > \frac{2^n}{3^n+1}\sin\frac{1}{n+1} > \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}\sin\frac{1}{n+1},$$

azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat korlátos, $\inf[a_n] = 0$, $\sup[a_n] = a_1 = \frac{1}{2}\sin 1$.

120. A nevező gyöktelenítésével és $\sqrt{n}$-nel egyszerűsítve kimutatható, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. A sorozat szigorúan monoton csökkenő és felülről korlátos, $\sup[a_n] = a_1 = -1$.

121. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1000}{n} + \frac{20}{n^2}}{0,001 - \frac{100}{n^2}} = 0.$ **122.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^2 - 1}{n^2 + 1} = -3.$

123. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$.

124. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{32}$. **125.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \dfrac{1}{3}.$

126. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

127. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. **128.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. **129.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

130. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{2n^2+3} = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{1-5n^2}{5n+1} = -\infty$, ezért a sorozat határértékét tagonként nem számíthatjuk. Összevonva $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3} = \frac{1}{5}$.

131. Egyszerűsítsük a törtet $n^{\frac{3}{2}}$-del; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

132. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. **133.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$. **134.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

135. $\lim_{n\to\infty} a_n = 5^{-5}$.

136. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)} - \dfrac{n}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{-n}{n+1} = -\dfrac{1}{2}.$

137. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)-(2+4+\cdots+2n)}{\sqrt{n^2+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}} = -1.$$

138. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{2}.$

139. Felhasználva, hogy a számláló
$1(1+1)+2(2+1)+\cdots+n(n+1) = (1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$, azt kapjuk, hogy a határérték $\frac{1}{3}$.

140. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(na+k)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n^2a^2+2kna+k^2) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left((n-1)n^2a^2 + 2na\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) = a^2 + a + \frac{1}{3}.$$

141. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-b}{1-a}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \dfrac{1-b}{1-a}.$

142. Alkalmazzuk a binomiális tételt; $\lim_{n\to\infty} a_n = 1980$.

143. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$

144. Megmutatható (pl. teljes indukcióval), hogy $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = \sqrt[2^n]{2^{2^n-1}}$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$.

145. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})^2-(\sqrt{2k-1})^2} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{2n+1}-1) = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$.

146. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} = -\infty.$ **147.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

148. Felhasználva az $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ azonosságot:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2} = \frac{1}{3}.$$

149. Használjuk az $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ azonosságot. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

150. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

151. Felhasználva azt, hogy a számláló első tényezője egy számtani sorozat kezdő elemeinek összege, ismert átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-7}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}} = \frac{5}{2}.$$

152. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n-1} = 0$ és
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n} = \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3(2n+\sqrt{4n^2-1})} = \frac{1}{6}$, továbbá $|\sin n!| < 1$.

153. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

154. A **74.** feladat alapján azonnal adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. A feladat a rendőr-elv alkalmazásával is megoldható: $0 < \frac{n}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

155. $1 < \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{n}$; alkalmazzuk a rendőr-elvet; $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

156. $1 < \sqrt[3n^2]{n^2+2n+4} < \sqrt[n]{7n^2} = \sqrt[n]{7}(\sqrt[n]{n})^2$ miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

157. $1 \le 5n^2-30n+21 \iff n \ge 6$. Így, ha $n \ge 6$, akkor $1 \le \sqrt[n]{5n^2-30n+21} < \sqrt[n]{5n^2}$; a rendőr-elvet alkalmazva $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. A feladat megoldható az alábbi **166.** feladat alapján is:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2(5-\frac{30}{n}+\frac{21}{n^2})^{\frac{1}{n}} = 1.$$

158. $\frac{1}{3} \le \frac{2n-1}{2n+1} < 1$, ebből a rendőr-elv segítségével $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Alkalmazhatjuk az alábbi **160.** vagy a **166.** feladat eredményét is.

159. $1 < \sqrt[n^2]{n} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{n}$, ebből a rendőr-elv segítségével kapjuk, hogy a határérték 1.

160. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{p-q} \sqrt[n]{\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}} = 1$. (l. még az **89.** és **166.** feladatot.) Megjegyezzük, hogy ez alapján a **155.** — **159.** feladatok egyszerűen megoldhatók.

161. Először nemnegatív k egész számokra mutatjuk meg a feladat állítását teljes indukcióval. $k = 0$ esetben nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely $k \geq 0$ egész számra $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1+k}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n+1+k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n+1}} = e^k e^1 1 = e^{k+1}.$$

(Felhasználtuk azt, hogy $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n$;
ez igaz, mivel $\left[\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]$ részsorozata az $\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozatnak).
Legyen most k negatív egész szám, akkor az

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+k-k}{n+k}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{-k}{n+k}\right)^{-k} \left(1 + \frac{-k}{n+k}\right)^{n+k}}$$

átalakítást az $n > |k|$ esetben elvégezve kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = \dfrac{1}{1 \cdot e^{-k}} = e^k$.

162. Mivel az $\left[\left(1 + \dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n}\right]$ sorozat az e^k-hoz konvergáló $\left[\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n\right]$ sorozat részsorozata, ezért igaz az állítás.

163. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \dfrac{p}{qn}\right)^{qn}\right)^{\frac{1}{q}} = (e^p)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{p}{q}}$ (az előző feladat alapján).

164. Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, feltehető, hogy $a_n \neq 0, b_n \neq 0$. (A legfeljebb véges sok 0 elem elhagyható, a konvergenciát nem befolyásolja.) Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $r \in \mathbf{Q}$. Ha $\operatorname{Ent} a_n = k_n$ és $r > 0$, akkor

$$\frac{k_n+1}{k_n+r+1} \left(1 + \frac{r}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = \left(1 + \frac{r}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n}$$

$$< \left(1 + \frac{r}{k_n}\right)^{k_n+1} = \left(1 + \frac{r}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{r}{k_n}\right).$$

Az nyilvánvaló, hogy $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, ezért a **162.** és **163.** feladatok, valamint a rendőr-elv alapján kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$. Ha $r = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. $r < 0$ esetben a **161.** feladat bizonyítását szószerint megismételve (k helyett r-rel és n helyett a_n-nel) kapjuk az állítást. Mivel $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, így $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = \infty$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-r}{-b_n}\right)^{-b_n}\right)^{-1} = (e^{-r})^{-1} = e^r.$$

Legyen most már $r \neq 0$ tetszőleges valós szám. Akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r} = \begin{cases}\infty, & \text{ha } r > 0;\\ -\infty, & \text{ha } r < 0.\end{cases}$$

Ez alapján

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{r}}\right)^{\frac{a_n}{r}}\right)^r = e^r.$$

165. Ha $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ vagy a_n felbontható két olyan részsorozatra, amelyek határértéke ∞ illetve $-\infty$, ezért az előző feladat szerint az állítás igaz.

166. Mivel $0 < a$, ezért az $[a_n]$ sorozatnak csak véges sok eleme lehet 0. Ezeket az elemeket hagyjuk el, azaz tegyük fel, hogy minden n-re $a_n > 0$. Így a **T 7.41** tétel alapján:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} = e^{b\ln a} = a^b.$$

167. Például $a_n = n$ és $b_n = \dfrac{r}{n}$.

168. $a_n = 2^n$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n}$ (l. még a **74.** feladatot!).

169. $a_n = 2^n$, $\quad b_n = -\dfrac{1}{n}$.

170. Ha $r > 1$, akkor legyen például $a_n = r^n$ és $b_n = \dfrac{1}{n}$. Ha $0 < r < 1$, akkor $a_n = r^{-n}$ és $b_n = -\dfrac{1}{n}$. Ha $r = 1$, akkor például $a_n = 2^n$ és $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ (l. még a **166.** feladatot!).

171. $a_n = 2^{n^2}$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n}$.

172. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{r}{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ $\quad b_n = n$. $\qquad$ **173.** $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $\quad b_n = n^2$.

174. Ha $0 \le r < 1$, akkor legyen például $a_n = r^n$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n}$. Ha $r > 1$, akkor $a_n = r^{-n}$, $\quad b_n = -\dfrac{1}{n}$. Ha $r = 1$, akkor $a_n = b_n = \frac{1}{n}$.

175. $a_n = 2^{-2^n}$, $\quad b_n = -\frac{1}{n}$.

176. Ha $a_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = \infty$, ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

177. e. $\qquad$ **178.** $\sqrt{e}$.

179. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{2n}{3n+2}} = \left(e^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-2}$.

Megjegyezzük, hogy a feladat megoldható a **161.** — **166.** feladatok alkalmazása nélkül is, de ebben az esetben bonyolultabb átalakítások szükségesek:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\frac{3n+1}{3n}\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\frac{3n+1}{3n+2}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\frac{3n}{3n-1}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{e\cdot 1\cdot e\cdot e\cdot 1}\right)^2} = e^{-2},$$

felhasználva azt, hogy konvergens sorozat határértéke megegyezik részsorozatainak határértékével.

180. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < \frac{1}{2}$, így valamely n-től $0 < \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \le \frac{1}{2}$. Ezért a rendőr-elv miatt

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

181. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0\cdot(e^{-1})^2 = 0.$

182. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$

183. 1. $\qquad$ **184.** 1. $\qquad$ **185.** e^{-2}.

186. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{20}{3}}$. $\qquad$ **187.** $e^{-9}+1$. $\qquad$ **188.** $-\infty$.

189. Először teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő. $a_1 > a_2 = 4$. Tegyük fel, hogy $a_n > a_{n+1}$. Akkor $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n} > 5 - \frac{6}{a_{n+1}} = a_{n+2}$. Például teljes indukcióval az is megmutatható, hogy a sorozat alulról korlátos; minden n-re $a_n > 3$. Az a_1-re ez igaz. Tegyük fel, hogy $a_n > 3$. Ezt felhasználva $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n} > 5 - \frac{6}{3} = 3$. Ezzel megmutattuk, hogy a sorozat konvergens. A **T 7.15** tétel szerint bármely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n = x$. Ezért $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \frac{6}{a_n}\right) = 5 - \frac{6}{x}$. Ebből: $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Mivel minden $a_n > 3$, a sorozat határértéke nem lehet 2; tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

190. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy $a_{n+1}^2 - a = (a_n - a_{n+1})^2$, azaz $a_{n+1} \geq \sqrt{a}$. Most megmutatjuk, hogy a második elemtől kezdve a sorozat monoton csökkenő:

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}^2 + a}{a_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2}{a_{n+1}} = a_{n+1}.$$

Tehát a sorozat konvergens. Határértéke:

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right);$$

mivel $x > 0$, ebből $x = \sqrt{a}$ adódik.

191. Felhasználva a számtani és mértani közép közötti azt az összefüggést, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \leq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

először megmutatjuk, hogy minden n-re $a_{n+1} \geq \sqrt[k]{a}$:

$$a_{n+1} = \frac{(k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}}{k} \leq \sqrt[k]{a_n^{k-1}\frac{a}{a_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{a}.$$

A sorozat a második elemtől kezdve monoton csökkenő, mert

$$a_{n+2} = \frac{1}{k}\frac{(k-1)a_{n+1}^k + a}{a_{n+1}^{k-1}} \leq \frac{1}{k}\frac{(k-1)a_{n+1}^k + a_{n+1}^k}{a_{n+1}^{k-1}} = a_{n+1}.$$

A sorozat konvergens. Mivel

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right),$$

ezért $x = \sqrt[k]{a}$.

192. Határérték csak olyan x szám lehet, amelyre teljesül az

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2a_n^2 + a_n) = 2x^2 + x$$

egyenlet, azaz $x = 0$. A sorozat monoton növekvő, ezért akkor és csak akkor konvergens, ha felülről korlátos, s ebben az esetben a határérték a sorozat legkisebb felső korlátja. Ha tehát a sorozat konvergens, akkor minden n-re $a_n \leq 0$. Mivel $a_{n+1} = a_n(2a_n + 1)$ és $a_n, a_{n+1} \leq 0$, ezért a $2a_n + 1 \geq 0$ feltételnek teljesülni kell, s így $a_n \geq -\frac{1}{2}$. Kaptuk, hogy konvergencia esetén minden n-re $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 0$, ezért szükségképpen $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. Most megmutatjuk, ha

$-\frac{1}{2} \le a \le 0$, akkor a sorozat konvergens (és természetesen a határérték 0). Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy akkor minden n-re: $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$. Az $n = 1$-re a feltétel miatt teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$. Akkor $-a_n \ge 2a_n^2 \ge 0$, azaz $0 \ge 2a_n^2 + a_n \ge a_n \quad (\ge -\frac{1}{2})$, tehát $0 \ge a_{n+1} \ge -\frac{1}{2}$. Mivel a sorozat monoton növekvő, ezért valóban konvergens. Tehát az $[a_n]$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $-\frac{1}{2} \le a \le 0$, s ebben az esetben $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ha $a < -\frac{1}{2}$ vagy $a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, mivel a sorozat monoton növekvő, de felülről nem korlátos.

193. A sorozat divergens, mert az $x = x + \dfrac{1}{x^3+1}$ egyenletnek nincs megoldása. Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

194. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}} = a_2$ nyilván igaz és könnyen belátható, hogy az $a_n < a_{n+1}$ feltevésből következik a $a_{n+1} < a_{n+2}$ egyenlőtlenség. A sorozat felülről korlátos. Igazoljuk ezt is teljes indukcióval. Ekkor olyan k számot kell keresni, amelyre $a_n \le k$-ból $a_{n+1} \le k$ következik. Ehhez az $a_{n+1} = \sqrt{a+a_n} \le \sqrt{a+k}$ egyenlőtlenség miatt elegendő, ha $\sqrt{a+k} \le k$ vagyis $a \le k^2 - k$ igaz. Ha $k = a+1$, akkor az előző egyenlőtlenség biztosan teljesül, továbbá $a_1 \le k$ is igaz lesz. A sorozat tehát bármely pozitív a-val konvergens. Az x határérték a következő egyenletnek tesz eleget: $x = \sqrt{a+x}$, ahonnan $x > 0$ miatt: $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

195. $a_n = \dfrac{n-1}{n}a_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}a_{n-2} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2}a_1 = \dfrac{1}{n}$.

196. l. az **1.56** feladatot!

197. $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$, ezért minden n-re $a_nb_n = ab$.

198. $0 \le a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n} \le \dfrac{a_n-b_n}{2}$.

199. Az előbbi feladat alapján $0 \le a_n - b_n \le \dfrac{a-b}{2^{n-1}}$, azaz $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Jelöljük a közös határértéket x-szel, akkor

$$x^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab,$$

így $x = \sqrt{ab}$. (l. **197.** feladatot!)

200. Az $n = 1, 2$ esetekre közvetlenül ellenőrizhető az állítás. Mivel $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} + 1$, ezért

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

Ezekből pedig azonnal következik, hogy ha valamely n-re és $(n+1)$-re igaz az állítás, akkor $(n+2)$-re is igaz.

201. Mivel $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

202. Az általánosság megszorítása nélkül az AB szakasz hossza választható 1-nek. Legyen $AC = 1 - x$ és $CB = x$. Így $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$, azaz $x^2 + x - 1 = 0$, amelynek egyetlen pozitív megoldása: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

203. Legyen r olyan szám, hogy $|\lim_{n\to\infty} a_n| < r < 1$. Van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n| \le r$, ezért $0 \le |a_n|^n \le r^n$, amiből a rendőr-elv segítségével adódik az állítás.

204. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = q > 1$, akkor van olyan r, hogy $1 < r < q$. Ehhez az r-hez van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $1 < r < a_n$, s így $r^n < a_0^n$, amiből már adódik az állítás.

205. Először teljes indukcióval mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{m+1}n^{m+1} < 1^m + 2^m + \cdots + n^m < \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}.$$

Ebből a rendőr-elv alkalmazásával adódik az állítás.

206. l. **166.** feladatot! **207.** 1.

208. $\left(1-\dfrac{1}{n^k}\right)^n = \left(\cdots\left(\left(1-\dfrac{1}{n^k}\right)^{n^k}\right)^{1/n}\cdots\right)^{1/n}$ felhasználásával.

209. A **203.** feladatot alkalmazhatjuk $a_n = \sqrt[n]{b_n}$-nel.

210. Ha $a_n \ge 0$, akkor $1 \le \sqrt[k]{1+a_n} \le 1 + a_n = 1 + |a_n|$.
Ha $-1 \le a_n < 0$, akkor $1 \ge \sqrt[k]{1+a_n} \ge 1 + a_n = 1 - |a_n|$.
Így minden $a_n \ge -1$-re: $1 - |a_n| \le \sqrt[k]{1+a_n} \le 1 + |a_n|$.
Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, s így a rendőr-elv miatt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+a_n} = 1$.

211. A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (**T 7.18**) alkalmazzuk $(p \in \mathbf{N}^+)$:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \le$$

$$\frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{3^n}.$$

Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, ezért van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $\dfrac{1}{3^n} < \varepsilon$, s így $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

212. A sorozat szigorúan monoton nő. Továbbá:

$$a_n < \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) < \frac{1}{a-1}.$$

213. Jelöljük az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok közül a legnagyobbat A-val. Becsüljük a sorozatot alulról és felülről is:

$$A \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq A\sqrt[n]{k}.$$

Mivel rögzített k-ra $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, ezért a rendőr-elv szerint $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = A$.

214. $s_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$, így a beszínezett rész területe: $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$. $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

215. Legyen $[a_n]$ tetszőleges sorozat. 1.eset: A sorozatnak nincs legnagyobb eleme, akkor könnyen látható, hogy a sorozatból kiválasztható egy szigorúan monoton növekvő részsorozat. 2.eset: A sorozatnak van legnagyobb eleme, de véges sok elem elhagyásával olyan sorozatot kapunk, amelynek már nincs legnagyobb eleme. Erre a maradék sorozatra alkalmazzuk az 1. esetbeli meggondolást. 3.eset: Akárhogyan hagyunk is el véges sok elemet a sorozatból, a megmaradt elemek között mindig van legnagyobb. Ekkor egy monoton csökkenő részsorozatot tudunk kiválasztani a következő módon. Legyen a sorozat legnagyobb eleme a_{n_1}. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ elemek elhagyásával kapott sorozatnak is van legnagyobb eleme, legyen ez a_{n_2}. Nyilvávalóan $a_{n_1} \geq a_{n_2}$. Ezt az eljárást folytatva – miután kiválasztottuk az a_{n_k} elemet – az n_k-nál nagyobb indexű elemek között is van legnagyobb, így $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \ldots$ a sorozat egy monoton csökkenő részsorozata.

216. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \quad (n > 1)$, ezért $1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1}$.
Az eredmény a rendőr-elv alkalmazásával kapható meg.

217. Tudjuk, hogy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ebből egyrészt $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, másrészt $1 < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, s így $\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, amiből a rendőr-elv alkalmazásával adódik az eredmény. Megjegyezzük, hogy a **T 7.41** tétel alkalmazásával azonnal adódik az állítás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

218. Felhasználva az $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)$ azonosságot: $a_n = -\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. A **T 7.41** tétel szerint: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = -\ln 2$.

8. Függvényhatárérték és folytonosság (megoldások)

1. $2, 1, \sqrt{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{17}$. **2.** $4\sqrt{2}+1, \frac{\sqrt{2}+1}{2}, 2\sqrt{10}-5$.

3. A területet a következő függvény határozza meg:

$$T(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \le x \le \sqrt{2}; \\ -x^2 + 4x\sqrt{2} - 4, & \text{ha } \sqrt{2} < x \le 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$T(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$, $T(2) = 8(\sqrt{2}-1)$.

4. $f(x+1) = \left|\dfrac{x}{2+x}\right|$, ha $x \neq -2$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$, ha $x \neq -1, 0$; $\dfrac{1}{f(x)} = \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$, ha $x \neq \pm 1$; $f(x^2) = \dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}$.

5. $f(x) = f(x+2-2) = \dfrac{1}{x+3}, x \neq -3$.

6. $f(x) = f\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{x^2} + 1, \quad x \neq 0$.

7. x-et állítsuk elő $\dfrac{a-1}{a+1}$ $(a \neq -1)$ alakban; ebből $a = \dfrac{x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$. Ezért:

$$f(x) = f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\frac{x+1}{x-1} + 1}\right) = \frac{x+1}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

8. $\dfrac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$, ezért az $f(x) = x^2 - 2$ függvény megfelel a követelménynek.

9. $1 - |x|^3 = 1 - \left(\sqrt{x^2}\right)^3$ miatt az $f(x) = 1 - x^{\frac{3}{2}}$ függvény teljesíti a feltételt.

10. $\operatorname{Dom} f = (-1, 1)$. Számítsuk ki $f(a) + f(b)$, illetve $f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ értékeket.

11. Az $f(0) = 2$ feltételből azonnal adódik, hogy $d = 2$. A

$$\begin{aligned} 0 &= f(-1) = -a + b - c + 2 \\ -3 &= f(1) = a + b + c + 2 \\ 5 &= f(2) = 8a + 4b + 2c + 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert megoldva: $a = \frac{10}{3}, b = -\frac{7}{2}, c = -\frac{29}{6}$.

12. $a = 10, b = 5, c = 2$.

13. $x^3 + ax^2 + 2x = (2x-1)(bx^2 + cx + d)$ $(x \neq \frac{1}{2}) \iff x^3 + ax^2 + 2x = 2bx^3 + (2c-b)x^2 + (2d-c)x - d$, azaz ha $2b = 1, 2c - b = a, 2d - c = 2, d = 0$, s így $b = \frac{1}{2}, c = -2$ és $a = -\frac{9}{2}$.

14. $a = b = -1$. **15.** $\{x \in \mathbf{R};\quad x \neq -1\}$. **16.** $(-\infty, \frac{5}{2}]$.
17. $\mathbf{R}$. **18.** $\emptyset$. **19.** $\{0\}$.
20. $\{x \in \mathbf{R};\quad x \neq \pm 10\}$. **21.** $\{x \in \mathbf{R};\quad x > \frac{4}{3}\}$. **22.** $\{x \in \mathbf{R};\ |x| > 2\}$.
23. $(4, \infty)$. **24.** $\{x \in \mathbf{R};\quad x > 2\}$.
25. $\{x \in \mathbf{R};\quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
26. $\{x \in \mathbf{R};\quad x < 2 \text{vagy} x > 3\}$.
27. $\{x \in \mathbf{R}; \dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
28. $(\frac{8}{3}, 3)$.
29. $(2; 3)$.
30. $\{x \in \mathbf{R};\quad -1 < x < 0 \text{vagy} x > 1, x \neq 2\}$.
31. $e^{2k\pi} < x < e^{(2k+1)\pi},\quad k \in \mathbf{Z}$. **32.** $x < 1 - \dfrac{1}{e}$.
33. $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \frac{1}{f} = \mathbf{R}$.
34. $\operatorname{Dom} f = [-2; \infty)$; $\operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = [-2; -1) \cup (-1; \infty)$.
35. $\operatorname{Dom} f = [-\dfrac{1}{2}; \infty)$; $\operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = [-\dfrac{1}{2}; 0) \cup (0; \infty)$.
36. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$; $\operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = \{x \in \mathbf{R};\quad x \neq \dfrac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}\}$.
37. $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = \mathbf{R}$.
38. $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbf{R};\quad x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}; \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = \{x \in \mathbf{R};\quad x \neq k\pi, x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
39. $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \iff 1 \geq -\cos 3x \geq -1 \iff 3 \geq 2 - \cos 3x \geq 1 \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos 3x} \leq 1$, ezért $\operatorname{Ran} f = \left[\frac{1}{3}; 2\right]$; $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$.
40. $f(0) = 0$. Legyen $x \neq 0$, akkor $f(x) \neq 0$. Oldjuk meg az $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ egyenletet x-re, azaz $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4(f(x))^2}}{2f(x)}$. Mivel $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$, ezért az egyenletnek minden $x(\neq 0)$ esetén megoldhatónak kell lenni, tehát $1 - 4(f(x))^2 \geq 0$. Az $f(0) = 0$ esetet is figyelembe véve: $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
41. Az $1 - 2\cos x > 0$ feltétel miatt az értelmezési tartomány: $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\quad k \in \mathbf{Z}$. $-1 \leq \cos x \leq 1 \iff 2 \geq -2\cos x \geq -2 \iff 3 \geq 1 - 2\cos x \geq -1$, de $1 - 2\cos x > 0$, így $3 \geq 1 - 2\cos x > 0$, ezért $f(x) \leq \lg 3$.
42. $\operatorname{Dom} f = [-1; 2]; f(x) = \sqrt{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$. Mivel $-1 \leq x \leq 2$, ezért $-\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$; $0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}; 0 \geq -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq -\frac{9}{4}; \frac{9}{4} \geq -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \geq 0; \frac{3}{2} \geq f(x) \geq 0$.

43. $0 \le x - 5 \le 1$, azaz $5 \le x \le 6$.

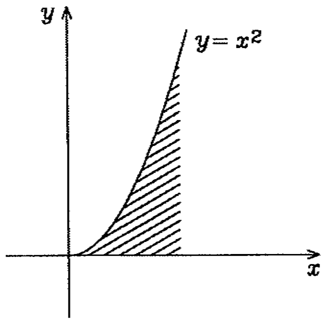
44. $0 \le x \le \frac{1}{4}$. **45.** $-1 \le x \le 0$. **46.** $-\frac{1}{2} \le x \le 0$.

47. $0 \le 3x^2 \le 1$, azaz $-\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

48. $k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

49. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$; az $x^2+y^2 \le 1$ körlap pontjainak halmaza.

50. Egyrészt $y \ge 0$, másrészt $x - \sqrt{y} \ge 0$. Az utóbbiból adódik, hogy $x \ge 0$ és $x^2 \ge y$. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \le x, 0 \le y \le x^2\}$ (1. **ábra**)



51. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\quad x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\quad x < 0, y < 0\}$.

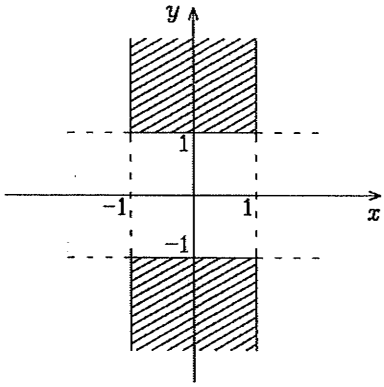
52. Azon $P(x, y)$ pontok halmaza, amelyek ordinátájára az $x \ge 0$ esetben $2k\pi \le y \le (2k+1)\pi$, az $x \le 0$ esetben pedig $(2k+1)\pi \le y \le (2k+2)\pi$ teljesül, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

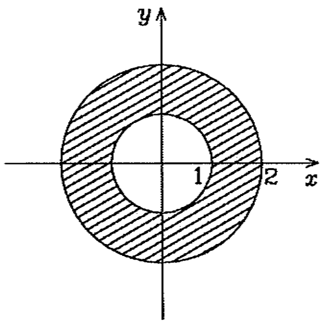
53. $\ln(\sin x \cos y) \ge 0$ miatt $\sin x \cos y \ge 1$, azaz $\sin x = \cos y = 1$ vagy $\sin x = \cos y = -1$. Így az értelmezési tartományt a $P\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}; 2m\pi\right)$ és a $Q\left(\frac{(4r-1)\pi}{2}; (2s+1)\pi\right)$ pontok halmaza ábrázolja, ahol $k, m, r, s \in \mathbf{Z}$.

54. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad x > 0, y > 0, z > 0\}$

55. Az origó középpontú egységsugarú gömbtartomány belső pontjainak halmaza.

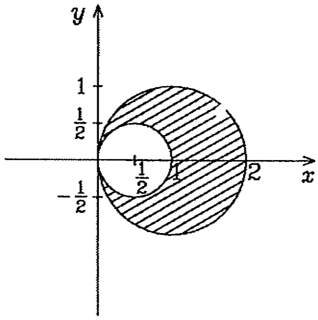
56. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\quad |x| \le 1, |y| \ge 1\}$.

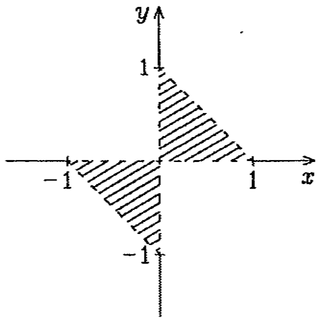




57. $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ körgyűrű.

58. Az $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\ge\frac{1}{4}$ körkülső és az $(x-1)^2+y^2\le 1$ körlap közös része.

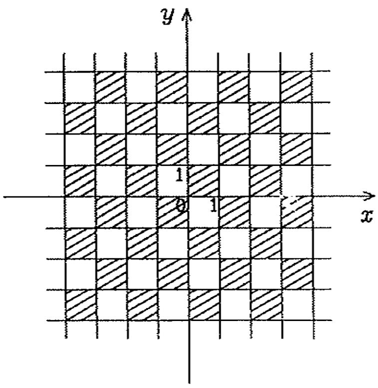


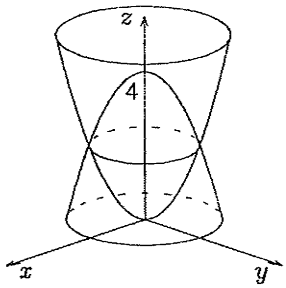


59. $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ akkor van értelmezve, ha $xy>0$. Ez az első és harmadik síknegyedben igaz (a tengelyeken lévő pontok kivételével). A második tagban az $|x+y|<1$ teljesülése szükséges, azaz $-1<x+y<1$. Ez az $y=-1-x$ és az $y=1-x$ párhuzamos egyenesek közötti nyílt sávot jellemzi. Az értelmezési tartomány képe a két alakzat közös része. (l. a fenti ábrán).

60. $x=ky,\quad y\ne 0,\quad k\in\mathbf{Z}$. Az origón átmenő egyenessereg (az origó nem tartozik bele a tartományba). Megjegyezzük, hogy $\operatorname{Ran} f=\{0\}$.

61. A feltétel: $\sin\pi x\sin\pi y\ge 0$. A kifejezés pontosan akkor 0, ha $\sin\pi x=0$ vagy $\sin\pi y=0$, azaz $x=k$ vagy $y=l\quad(k,l\in\mathbf{Z})$; az előjelváltási pontok tehát az egész koordinátájú helyeken vannak. Ha $0<x<1$ és $0<y<1$, akkor mindkét tényező pozitív; ezért az értelmezési tartomány képe a következő ábrán látható sakktáblaszerű nemkorlátos zárt halmaz.

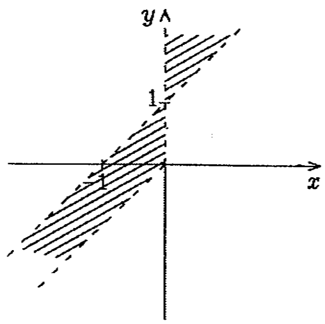




62. $\operatorname{Dom} f=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\quad x^2+y^2\le z\le 4-x^2-y^2\}$; két forgási paraboloid közös része.

63. Egyrészt $y>x$, másrészt $x\ne 0$, mégpedig

x és $\ln(y-x)$ egyező előjelű. Ha tehát $x > 0$, akkor $y > x+1$; ha $x < 0$, akkor $x < y < x+1$. Az értelmezési tartomány képe a következő ábrán látható.



64. A két koordináta-tengely.

65. $\sin \pi x = \sin \pi y = 0 \Longrightarrow x, y \in \mathbf{Z}$. Az értelmezési tartomány $\mathbf{Z}^2$.

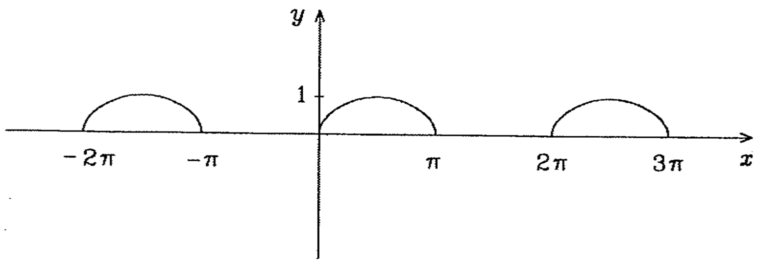
66. Ha $c < 1$ akkor a számlálót, illetve a nevezőt 0-val egyenlővé téve a következő köregyenletekhez jutunk:

$$k_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1 - c$$
$$k_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 - c,$$

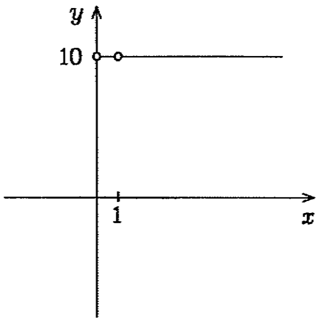
és így az értelmezési tartomány képe a két kör belsejének közös részéből, a két kör külsejének közös részéből és a k_1 kör pontjaiból áll. (Ha $0 \le c < 1$, akkor a két kör belsejének közös része üres.) Ha $c = 1$, akkor az értelmezési tartomány az xy-koordinátasík, kivéve az $(1,0)$ pontot. Ha $c > 1$, akkor az xy-koordinátasík.

67. r sugarú z-tengelyű henger, kizárva belőle az s sugarú origó középpontú gömbtartomány pontjait.

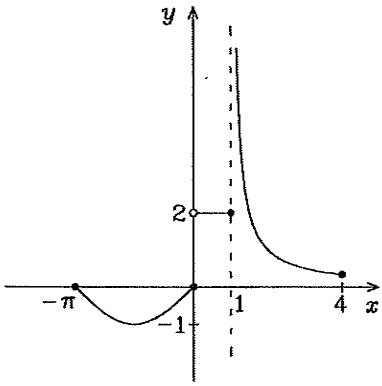
68.



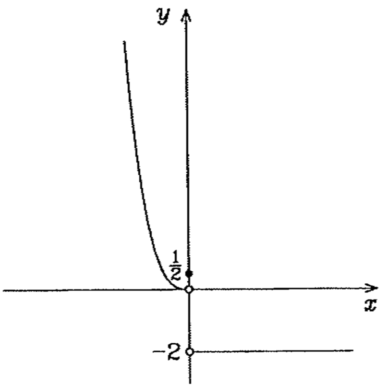
69. $x^{\frac{1}{\lg x}} = x^{\log_x 10} = 10,\ x > 0, x \neq 1.$



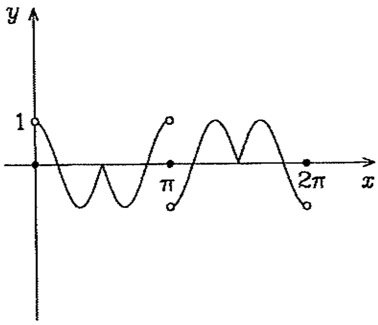
70.



71.

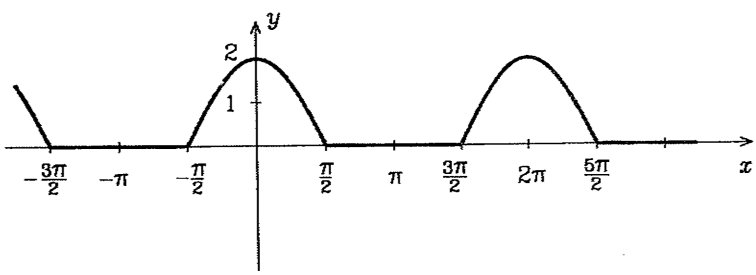


72.

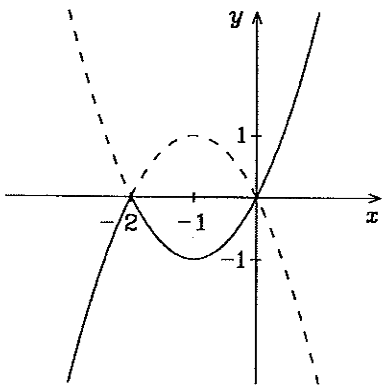


73. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

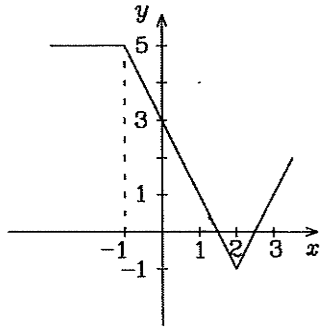
74.



75.

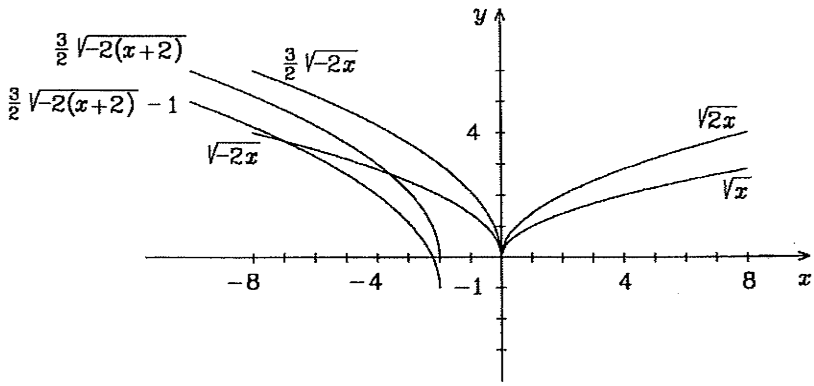


76.



77. $f(x+a)$ és $f(x)+b$: Eltolás $[-a;0]$ illetve $[0;b]$ vektorral.
$f(kx)$: Ha $0 < k$, akkor az y-tengelyre vonatkoztatott $\frac{1}{k}$ arányú nyújtás, ha $k < 0$, akkor az y-tengelyre vonatkoztatott $\frac{1}{|k|}$ arányú nyújtás és az y-tengelyre vonatkozó tükrözés.
$lf(x)$: Ha $0 < l$, akkor az x-tengelyre vonatkoztatott l arányú nyújtás, ha $l < 0$, akkor az x-tengelyre vonatkoztatott $|l|$ arányú nyújtás és az x-tengelyre vonatkozó tükrözés.
$|f(x)|$: Ha $f(x) \geq 0$, akkor $|f(x)| = f(x)$, ha $f(x) < 0$, akkor $|f(x)| = -f(x)$, ez pedig az x-tengelyre való tükrözést jelent.
$f(|x|)$: Ha $x \geq 0$, akkor $f(|x|) = f(x)$, ha $x < 0$, akkor $f(|x|) = f(-x)$, ez pedig az y-tengelyre való tükrözést jelent. Eszerint $f(|x|)$ grafikonja $f(x)$ grafikonjának azon részéből áll amelyre $x \geq 0$ és ennek y-tengelyre vonatkozó tükörképéből.

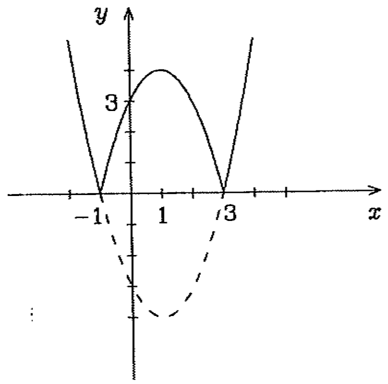
78. Egy lehetséges sorrend: $f(kx), lf(kx), lf(k(x+a)), lf(k(x+a))+b$.



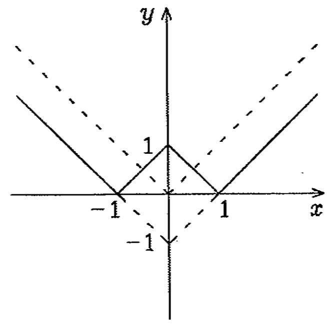
79. $\dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+3}{x+1} = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

80. $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

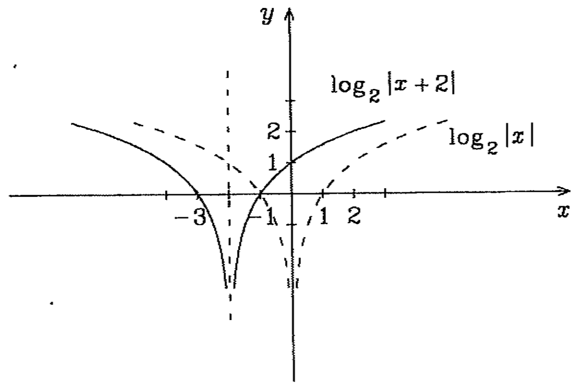
81. $|x^2 - 2x - 4| = |(x-1)^2 - 4|$.



82.



83.



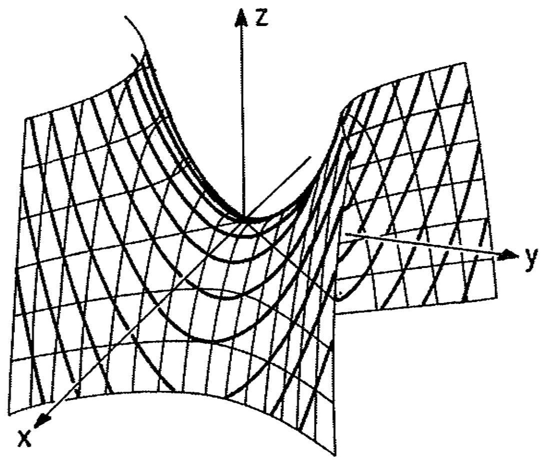
84. Az x-nívóvonalak a $z = a^2 + y^2 (a \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák, az y-nívóvonalak a $z = x^2 + b^2$ $(b \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák, a z-nívóvonalak pedig az $x^2 + y^2 = c$ $(c \geq 0)$ egyenletü körök. A függvény grafikonja z-tengelyű forgási paraboloid.

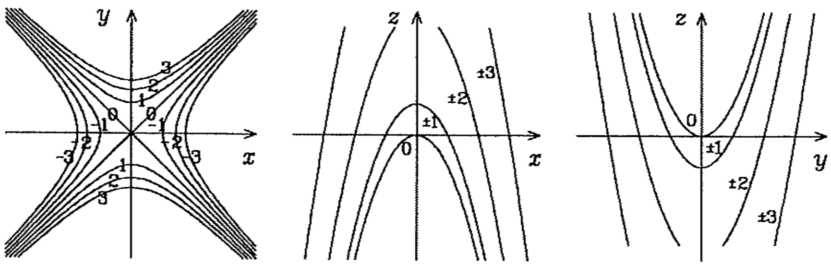
85. A z-nívóvonalak $c^2 = x^2 + y^2$ $(c \in \mathbf{R})$ egyenletű körök. A felületet messük el a z-tengelyre illeszkedő síkokkal. Ezen síkok egyenlete $ax + by = 0$ $(a, b \in \mathbf{R}; a^2 + b^2 \neq 0)$ alakú. A metszésvonalak egyenletrendszerét a

$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$0 = ax + by$$

egyenletrendszer megoldása adja. Ha $b = 0$, akkor $x = 0$ és $z = \pm y$. Ha $b \neq 0$, akkor $y = -\frac{a}{b}x$ és $z = \pm\frac{a^2+b^2}{b}x$. A metszésvonalak tehát minden esetben az origón átmenő, merőleges, z-tengelyre szimmetrikus egyenespárok. A függvény grafikonja z-tengelyű kettős körkúp (forgáskúp). Megjegyezzük, hogy az x- illetve y-nívóvonalak hiperbolák.

86. Az x- illetve y-nívóvonalak parabolák. A z-nívóvonalak $y^2 - x^2 = c$ $(c \in \mathbf{R})$ egyenletű hiperbolák. (Ha a felületet az yz síkkal metszük, a metszésvonal a $z = y^2$ egyenletű parabola. Az xz síkkal való metszéskor a $z = -x^2$ egyenletű parabolát kapjuk. A felületet úgy képzelhetjük el szemléletesen, hogy a $z = y^2$ egyenletű parabolán "végigcsúszik" a $z = -x^2$ egyenletű parabola.) A felület egy úgynevezett nyeregfelület.

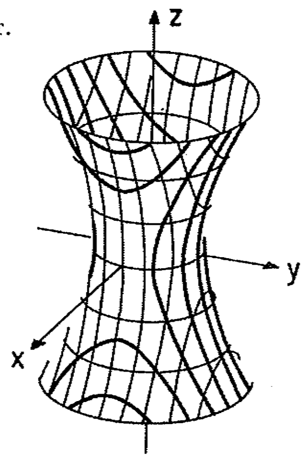




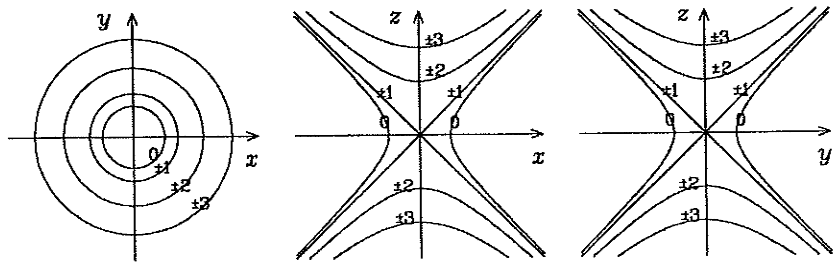
87. Az x- illetve y-nívóvonalak parabolák. A z-nívóvonalak $y = -x \pm c$ $(c \geq 0)$ egyenletű párhuzamos egyenesek. A felület parabola alapú, azaz parabolikus henger.

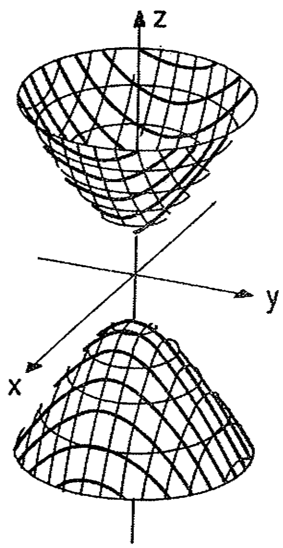
88. Az x-nívóvonalak a $z = a^2 + y$ $(a \in \mathbf{R})$ egyenletű párhuzamos egyenesek, az y-nívóvonalak a $z = x^2 + b$ $(b \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák, a z-nívóvonalak az $y = c - x^2$ $(c \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák. (Az yz síkban a metszésvonal a $z = y$ egyenletű egyenes, az xz síkban pedig a $z = x^2$ egyenletű parabola. A felületet a $z = x^2$ egyenletű parabolának a $z = y$ egyenesen való "csúsztatásával"

származtathatjuk.) A felület parabolikus henger.

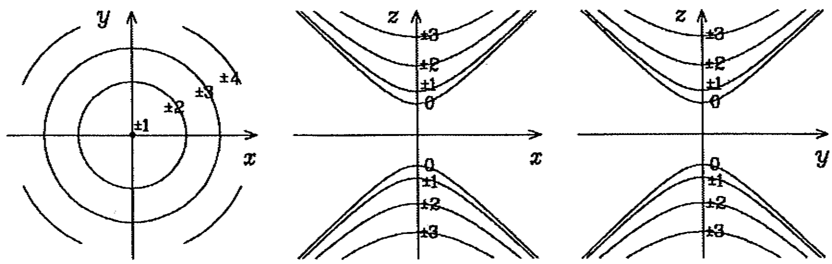


89. Az $y = 0$ egyenletű síkkal (xz sík) metszve a metszésvonal az $x^2 - z^2 = 1$ egyenletű hiperbola. Az yz síkkal metszve a felületet szintén hiperbola adódik. A z-nívóvonalak az $x^2 + y^2 = c^2 + 1$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletű körök. A felület egy úgynevezett egyköpenyű forgáshiperboloid, amely például az $x^2 - z^2 = 1$ egyenletű hiperbola z-tengely körüli forgatásával adódik.





90. Az xz síkkal metszve a metszésvonal az $z^2 - x^2 = 1$ egyenletű hiperbola. Az yz síkkal metszve, metszésvonalként szintén hiperbola adódik. A z-nívóvonalak az $x^2 + y^2 = c^2 - 1$ $(|c| \geq 1)$ egyenletű körök. A felület egy úgynevezett kétköpenyű hiperboloid, amely például az $z^2 - x^2 = 1$ egyenletű hiperbola z-tengely körüli forgatásával adódik.



91. $y = 2x - \frac{x^2}{9}$. **92.** $y = x - 2$.

93. $y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$.

94. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **95.** $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

96. $\sin 2t = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, t}{1 + \mathrm{tg}^2 t}$, $\cos 2t = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 t}{1 + \mathrm{tg}^2 t}$; $y = \dfrac{2x + 1 - x^2}{1 + x^2}$.

97. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$. **98.** $x^2 + y^2 = a^2$.

99. $x^2 - y^2 = 4$, $x \geq 2$.

100. Az $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x+4}$ függvény értelmezve van 2 valamely (pl. 1 sugarú) környezetében, mivel $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} - \{-\frac{4}{5}\}$. Legyen $[x_n]$ tetszőleges olyan sorozat, amely benne van ebben a környezetben és $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3 \lim_{n\to\infty} x_n + 1}{5 \lim_{n\to\infty} x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a Heine-féle definíció értelmében igaz az állítás.
Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Azt kell megmutatni, hogy 2-nek van olyan δ sugarú környezete, amelyre, ha $0 < |x-2| < \delta$, akkor $\left|\dfrac{3x+1}{5x+4} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, azaz $\left|\dfrac{x-2}{2(5x+4)}\right| < \varepsilon$. Elég csak azokkal az x-ekkel foglalkozni, amelyekre $x > -\frac{4}{5}$; ekkor az előző egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$-2\varepsilon(5x+4) < x - 2 < 2\varepsilon(5x+4).$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert megoldva $\varepsilon < \frac{1}{10}$ esetben, kapjuk a következőket:

$$\frac{2 - 8\varepsilon}{1 + 10\varepsilon} < x < \frac{2 + 8\varepsilon}{1 - 10\varepsilon}.$$

Mivel $2 - \frac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon} = \frac{28\varepsilon}{1+8\varepsilon}$ és $\frac{2+8\varepsilon}{1-10\varepsilon} - 2 = \frac{28\varepsilon}{1-8\varepsilon}$, ezért a $\delta = \frac{28\varepsilon}{1+10\varepsilon}$ választással teljesül az első egyenlőtlenség $\varepsilon < \frac{1}{10}$ esetben. (Ha $\varepsilon \geq \frac{1}{10}$, akkor egy tetszőleges $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{10}$ számra az előző meggondolások teljesülnek, s így ε-ra is.) Kaptuk, hogy a Cauchy-féle definíció értelmében is a határérték $\frac{1}{2}$.

101. Heine: Mivel $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} - \{0; 4\}$, ezért például ha $x_n \in (3;5)$ és $x_n \neq 4$ $(n = 1, 2, \ldots)$, továbbá $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n + 4}{x_n} = 2$.

Cauchy: Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $x \neq 4$, akkor $\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \left|\frac{x-4}{x}\right|$, és az előző feladatnál látott módon adódik, hogy $\varepsilon < 1$-re $\delta = \frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$ megfelelő. De kevesebb számolással is célhoz érhetünk. Ha most azt is feltesszük, hogy $x \in (2;5)$, kapjuk a következő egyenlőtlenséget: $\left|\frac{x-4}{x}\right| < \frac{|x-4|}{2}$. Ha tehát $\delta = 2\varepsilon$, akkor minden $x \in (2;5)$ $(x \neq 4)$ szám, amely teljesíti a $0 < |x-4| < \delta$ egyenlőtlenségrendszert, teljesíti az $\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget is.

102. Heine: Legyen $[x_n]$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5x_n + 1}{3x_n + 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{x_n}}{3 + \frac{9}{x_n}} = \frac{5}{3}.$$

103. Cauchy: Bebizonyítjuk, hogy bármely k pozitív számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x-1| < \delta$, akkor $\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| = \frac{1}{(1-x)^2} > k$. Oldjuk meg az előbbi egyenlőtlenséget: $|1-x| < \frac{1}{\sqrt{k}}$, azaz $\delta = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

104. Heine: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$.
Cauchy: Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k negatív valós számhoz van olyan M pozitív valós szám, hogy ha $M < x$, akkor $\log_a x < k$. Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $x > a^k$, azaz $M = a^k$.

105. Heine: Válasszuk ki a következő két nullasorozatot: $[x_n] = \left[\frac{1}{n}\right]$, $[x'_n] = \left[\frac{2}{4n+1}\right]$. Nyilvánvaló, hogy $\frac{1}{n}, \frac{2}{4n+1} \in \mathrm{Dom}\, f$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Azonban $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{x'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Cauchy: Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{x} = a \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha $|x| < \delta$, akkor $\left|\sin\frac{\pi}{x} - a\right| < \varepsilon$, azaz $a - \varepsilon < \sin\frac{\pi}{x} < a + \varepsilon$. legyen $0 < \varepsilon < 1$. Ha most $-1 < \sin\varphi < -\varepsilon$ és $x = \frac{\pi}{\varphi + 2n\pi}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$, akkor $\sin\frac{\pi}{x} = \sin\varphi$ miatt bármely $\delta > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}^+$, hogy $|x| < \delta$, de $\sin \frac{\pi}{x} < -\varepsilon \le a - \varepsilon$. Ellentmondás. Hasonlóan, $a < 0$ esetben is ellentmondásra jutunk.

106. A Heine-féle definíció alapján hasonlóan bizonyítható, mint a **7.89** feladat állítása.

107. Az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

108. 0. **109.** $\frac{1}{2}$. **110.** ∞.

111. 3. **112.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **113.** 3.

114. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^3+5x^2-4x-2}{(2x+1)(1-2x^2)} = -\dfrac{9}{4}$.

115. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$. **116.** $\frac{7}{3}$.

117. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{x+1} = 3$.

118. 1. **119.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+5x^3+1}{x^4+2} = \dfrac{1}{2}$.

120. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x-x^2}{(1-x)(x^2+x+1)} = 1$.

121. $\dfrac{p}{q}$. **122.** $-\frac{1}{2}$. **123.** 10.

124. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}} = 1$. **125.** 1.

126. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

127. 1.

128. $x \ne 1$ miatt $(x-1)^2$-nel egyszerűsithetünk. Ezután a keresett határérték $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+2}{x+1} = 2$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}} - x^{\frac{3}{5}}\sqrt[5]{1+\frac{4}{x^3}}}{x^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[15]{x^{11}}}\sqrt[5]{1+\frac{4}{x^3}}}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} = 0$

130. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2} = \lim \dfrac{}{\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}} = \dfrac{1}{4}$.

131. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)} = 1$.

132. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(6-x-1)(3+\sqrt{4+x})}{(9-4-x)(\sqrt{6-x}+1)} = 3$.

133. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \dfrac{2}{3}$.

134. 1. **135.** $\frac{3}{2}$.

136. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{2}$.

137. 0. **138.** 0. **139.** $\frac{2}{3}$.

140. $\frac{1}{2}$. **141.** $\frac{a+b}{2}$. **142.** 1.

143. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} = -3$.

144. $\lim \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$.

145. Alkalmazzuk a $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ és a $\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ azonosságokat:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1.$$

146. Végezzük el a $z = x - \frac{\pi}{6}$ helyettesítést: $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - 2\cos\left(z+\frac{\pi}{6}\right)} =$

$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos z + \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}} = 1.$

147. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\cos x\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}}{\sqrt[3]{(1-\sin^2 x)^2}}\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}}{\cos x}\right| = \infty$.

148. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$.

149. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2\cos^2 x}{\sin^2 x(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{4}$.

150. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \frac{\sqrt{2}\cos x + 1}{2\cos^2 x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x + 1}{\cos^2 x} = 4$.

151. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x})}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})(1+\cos x)}{\cos^2 x} = 4\sqrt{2}$.

152. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$. **153.** $4\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}\frac{x}{\sin x}\frac{1}{\cos 4x} = 4$.

154. Ha $\alpha = 0$, akkor a határérték 0. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\frac{\beta x}{\sin\beta x}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. Ez azt jelenti, hogy minden α-ra $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$.

155. Az előző feladat alapján: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 6x}{\sin x} - \frac{\sin 7x}{\sin x}} = \frac{1}{6-7} = -1$.

156. Használjuk fel az $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ azonosságot! A határérték: $\frac{2}{3}$.

157. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$.

158. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg. A határérték: 1.

159. Végezzük el az $u = \sin x$ helyettesítést! Felhasználva az előző feladatot, a határérték: 1.

160. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x}$
$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{4}.$

161. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2}.$

162. Legyen $z = 1 - x$. Akkor: $\lim_{z\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}z}{z} = \frac{\pi}{2}.$

163. A $z = x - 1$ jelölést és a **154.** feladat eredményét használva:
$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(7\pi + 7\pi z)}{\sin(2\pi + 2\pi z)} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin 7\pi z}{\sin 2\pi z} = -\frac{7}{2}.$

164. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(\pi+x)(\pi-x)} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z+\pi)}{z} =$
$\frac{1}{2\pi} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2\pi}.$

165. $\pi \lim_{\frac{\pi}{x}\to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi.$

166. $\lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^7 = e^7.$

167. $\sqrt[3]{e}.$

168. $\lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(e^3\right)^2 = e^6.$

169. $\sqrt{e}.$

170. $e^3.$

171. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = 0\left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$

172. $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 7 + 8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^x =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\left(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^8.$

173. A függvényhatárérték Heine-féle definíciója alapján és **D 7.42** szerint:
$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)} = e^{b\ln a} = a^b.$

174. $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} (1 + (f(x) - 1))^{g(x)} =$

$\lim_{x\to x_0} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)(f(x)-1)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)} = e^b.$

175. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

176. $\frac{1}{4}.$

177. Legyen $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}$ és $g(x)=8x^2+3$. $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$és
$\lim_{x\to\infty} g(x)(f(x)-1)=-8$, ezért $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=e^{-8}$.

178. $e^0=1$. **179.** e^{-1}.

180. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} x|=\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x(\sin x-1)=$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin^2 x-1}{\sin x+1}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x}=0$. A határérték: 1.

181. $e^{-\frac{1}{2}}$. **182.** $\sqrt{e}$.

183. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x-6+8}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-\sqrt[3]{(x-6)8}+\sqrt[3]{8^2})}=$
$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-\sqrt[3]{(x-6)8}+\sqrt[3]{4})}=\dfrac{1}{144}$.

184. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(1-x)(1+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x}^2+\sqrt[5]{x}^3+\sqrt[5]{x}^4)}{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2)}=\dfrac{5}{3}$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty} 2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}=$
$\lim\limits_{x\to\infty} 2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$.

186. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x)^6}{\sin^6 2x}\dfrac{\cos^2 3x^3-1}{(2x)^6}\dfrac{1}{\cos 3x^3+1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x^3}{(3x^3)^2}\dfrac{3^2}{2^6}=-\dfrac{9}{128}$.

187. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 3x+4\sin 5x}{\sin 6x(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})}=\dfrac{13}{6}$ (l. a **154.** feladatot).

188. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x\cos 2x}{\operatorname{tg} x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x(1-\cos 2x)+\sin^2 x}{\operatorname{tg} x^2}=$
$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x(2\cos^2 x+1)\cos x^2}{\sin x^2}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\dfrac{x^2}{\sin x^2}=\dfrac{3}{2}$.

189.
$$\lim_{x\to0}\left(\left(1+\left(\cos^3 x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos^3 x-1}}\right)^{\frac{\cos^3 x-1}{x\sin x}}=$$
$$\lim_{x\to0}\left(\left(1+\left(\cos^3 x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos^3 x-1}}\right)^{\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x\sin x}}=$$
$$\lim_{x\to0}\left(\left(1+\left(\cos^3 x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos^3 x-1}}\right)^{\frac{(\cos^2 x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x\sin x(1+\cos x)}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

190. Az **174.** feladat szerint: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin a}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-a}$ választással,
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)=$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{1}{\sin a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\operatorname{ctg} a,$$

és ezért $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\operatorname{ctg} a}$.

191. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{h(x)}h(x)}{\frac{g(x)}{k(x)}k(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)}$.

192. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$.

193. -2 és 2.

194. 3 és 4.

195. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}|\sin x|$ azonosság segítségével: $-\sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$.

196. Ha $x_n=\frac{1}{2n}$ és $x_n'=\frac{2}{2n+1}$ $(n\in \mathbf{N}^+)$, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} x_n'=0$ és $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos 2\pi n=1$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0$, ezért a függvénynek nincs jobb oldali határértéke a 0 helyen. Mivel a függvény páros, ezért bal oldali határérték sem létezik.

197. $-\infty$ és ∞.

198. $\frac{3}{2}$ és $\frac{1}{4}$.

199. $f(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$, $x\neq -3;-2$. Minden $x\in \mathbf{R}-\{-3;-2\}$ helyen folytonos a függvény. $\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x-1}{x+2}=4$, ezért az $x=-3$ helyen a függvénynek hézagpontja van. $\lim_{x\to -2-0} f(x)=\infty$ és $\lim_{x\to -2+0} f(x)=-\infty$, azaz az $x=-2$ helyen a függvénynek pólusa van.

200. Minden $x\in \mathbf{R}-\{-3;3\}$ helyen folytonos; az $x=-3$ és az $x=3$ helyen pólusa van.

201. Mindenütt folytonos.

202. A 0 és 3 helyeken pólusa van, másutt folytonos.

203. Az $x\neq -1$ helyeken folytonos. $\lim_{x\to -1} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1+0} f(x)=\infty$, ezért az $x=-1$ helyen lényeges szingularitása van.

204. $x=0$ kivételével mindenütt folytonos. $\lim_{x\to -0} f(x)=1$, $\lim_{x\to +0} f(x)=0$, a függvénynek az $x=0$ helyen lényeges szingularitása van.

205. $x=-2$ kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek a -2 helyen lényeges szingularitása van, mert $\lim_{x\to -2-0} f(x)=-3$ és $\lim_{x\to -2+0} f(x)=-1$.

206. Az $x=1$ helyen lényeges szingularitása van, minden más helyen folytonos.

207. Az $x=0$ helyen hézagpontja van, a többi helyen folytonos.

208. Az $x=0$ helyen hézagpontja van, a többi helyen folytonos.

209. Ha $x\neq k\frac{\pi}{2}$ $(k\in \mathbf{Z})$, akkor a függvény folytonos. $\lim_{x\to n\pi-0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to n\pi+0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}+0} f(x)=-\infty$, $(n\in \mathbf{Z})$, az $x=k\frac{\pi}{2}$ $(k\in \mathbf{Z})$ helyeken a függvénynek pólusa van.

210. Ha $x\neq 2k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$, akkor $f(x)=1+\cos x$, s így a függvény folytonos. Az $x=2k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$ helyeken a függvénynek hézagpontja van.

211. Az $x = \frac{k}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével folytonos. $\lim_{x \to \frac{k}{2}-0} f(x) = k-1-k+2 = 1$,
$\lim_{x \to \frac{k}{2}+0} f(x) = k - k + 2 = 2$, az $x = \frac{k}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyeken lényeges szingularitása van.

212. A határérték minden x helyen 1. Mivel

$$\begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

ezért $x = 0$ helyen a függvénynek megszüntethető szakadása van. $x \neq 0$ helyeken a függvény folytonos.

213. A határérték minden x helyen 1. Mivel

$$\begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \end{cases}$$

ezért $x = k\pi$ helyeken a függvénynek megszüntethető szakadása van. $x \neq k\pi$ helyeken a függvény folytonos.

214. Mindenütt folytonos.

215. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 - 1}{x(1+\cos x)} = 0 = f(0)$, azaz a függvény mindenütt folytonos.

216. $\lim_{x\to 0} f(x) = 4 = f(0)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$, tehát a függvény folytonos az $x = 0$ és az $x = 2$ helyeken. Legyen $x_0 \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$. Ha $[x_n]$ és $[x'_n]$ olyan sorozatok, amelyekre $x_n \in \mathbf{Q}$, $x'_n \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ és $\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x'_n = x_0$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 4 - x_0^2$ és $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 4 - 2x_0$. Mivel $x_0 \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$, ezért $4 - x_0^2 \neq 4 - 2x_0$, így az $x = x_0$ helyen a függvénynek lényeges szingularitása van.

217. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x^2}}{\sqrt{1+\cos x^2}} \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} = \sqrt{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \sqrt{2}$, azaz az $x = 0$ $(k = 0)$ helyen a függvénynek megszüntethető szakadása van. Ha $x \neq 2k\pi$, akkor a függvény folytonos. Ha $x = 2k\pi$ $(k \neq 0)$, akkor a függvénynek pólusa van.

218. $a = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

219. $a = \lim_{x \to -1} \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3}$.

220. $\lim_{x\to -0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +0} f(x) = 1$, tehát az a bármilyen választása esetén az $x = 0$ helyen a függvénynek lényeges szingularitása van.

221. $\lim_{x\to -0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to +0} f(x) = -a$, ezért $a = -1$.

222. $-1 = \lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = b$, $a - 1 = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$, azaz $a = 2$.

223. $1 - a + b = \lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} f(x) = -1$, $1 = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1 + a + b$, ezért $a = 1$, $b = -1$.

224. $\lim_{x\to -1} |f(x)| = \lim_{x\to -1} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \infty$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Az a bármely választása esetén az

$x = -1$ helyen a függvénynek pólusa van. (Megjegyezzük, hogy ha $b = 0$, akkor $x = -1$ helyen kívül a függvény folytonos.)

225. $a = \lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad b = \lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \dfrac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos x}} = \dfrac{\pi}{2}.$

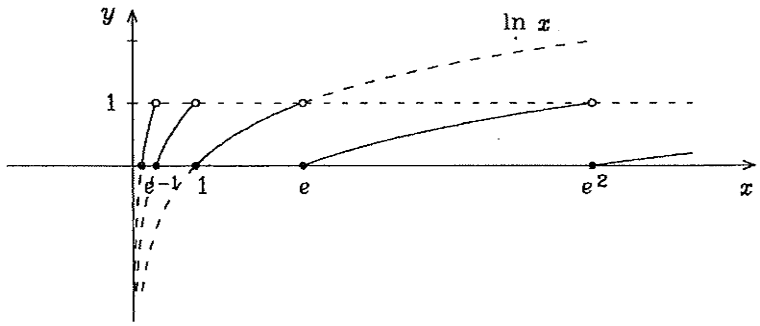
226. Szakadási helyek lehetnek: -1 és 1. $\lim_{x\to -1-0} f(x) = 0 \neq f(-1) = 1$, $\lim_{x\to -1+0} f(x) = 1 = f(-1)$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 = f(1)$, $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0 \neq f(1)$, a függvény az $x = -1$ helyen jobbról, az $x = 1$ helyen balról folytonos.

227. Szakadási hely lehet: 1. Ha $a \neq 0$, akkor a függvény az $x = 1$ helyen egyik oldalról sem folytonos. Ha $a = 0$, akkor a függvény mindenütt folytonos.

228. Szakadási hely: 0, ahol a függvény bal oldalról folytonos, de jobb oldalról nem.

229. Szakadási helyek: $\pm\sqrt{n}, n \in \mathbf{N}^+$. $\sqrt{2k-1}$ és a $\sqrt{2k}$ helyeken a függvény balról, a $-\sqrt{2k}$ és $\sqrt{2k-1}$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ helyeken pedig jobbról folytonos.

230. A függvény szakadási helyei: $x = e^n$ $(n \in \mathbf{Z})$. $\lim_{x\to e^n-0} f(x) = \lim_{x\to e^n-0} \ln x - \lim_{x\to e^n-0} \mathrm{Ent}(\ln x) = n - (n-1) = 1$, $\lim_{x\to e^n+0} f(x) = n - n = 0 = f(e^n)$, azaz az $x = e^n$ helyeken a függvény jobb oldalról folytonos, de bal oldalról nem. A függvény grafikonját a következő ábra szemlélteti.



231. Szakadási helyek lehetnek: $sp0, \frac{1}{2}$, továbbá minden olyan pozitív x, ahol $2 - \dfrac{2}{2x-1} = n \in \mathbf{Z}$. Ebből az egyenletből $x = \dfrac{4-n}{4-2n}$, és a jobb oldal akkor és csak akkor nempozitív, ha $n = 2, 3, 4$. $\lim_{x\to -0} f(x) = -1 = f(0)$, $\lim_{x\to +0} f(x) = 0$, azaz az $x = 0$ helyen a függvény bal oldalról folytonos, de jobb oldalról nem. Az $x = \dfrac{1}{2}$ helyen egyik oldalról sem folytonos. Minden $n \in \mathbf{Z} - \{2; 3; 4\}$ egész számra az $x = \dfrac{4-n}{4-2n}$ helyeken a függvény jobb oldalról folytonos, de bal oldalról nem.

232. $\mathrm{Dom} f = (-1, 1)$. Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos a függvény. $\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \infty$, ezért az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.

233. $\operatorname{Dom} f = (0,1]$. A függvény folytonos az értelmezési tartományán. $\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$, ezért az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptota; $\lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1) = 0$.

234. $\operatorname{Dom} f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. A függvény folytonos az értelmezési tartományon.
$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 0$, ezért nincs függőleges aszimptota.
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x^2}} = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x^2}} = \infty$, ezért a függvénynek ferde aszimptotája sincs.

235. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$, folytonos az értelmezési tartományon. $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, c = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = 2$, $y =$ 2 vízszintes aszimptota.

236. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} - \{0\}$, folytonos az értelmezési tartományon, pólusa van az $x = 0$ helyen, ezért az y tengely függőleges aszimptota. $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $c_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $c_2 =$ $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = 1$, így az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenletű egyenesek vízszintes aszimptoták.

237. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} - \{1\}$, folytonos az értelmezési tartományon, $x = 1$ függőleges aszimptota, $y = x - 1$ ferde aszimptota.

238. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} - \{0\}$, folytonos az értelmezési tartományon, $x = 0$ függőleges aszimptota.
$m_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^4+1}}{x|x|} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x^4}} = -2$,
$m_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $c_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - m_1 x) =$
$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} + 2x\right) = lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-\sqrt{4x^4+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x(2x^2+\sqrt{x^4+1})} =$ 0.
Hasonlóan $c_2 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - m_2 x) = 0$. $y = -2x$ és $y = 2x$ ferde aszimptoták.

239. $\operatorname{Dom} f = (-\infty;-2] \cup [2;\infty)$, folytonos az értelmezési tartományon, nincs függőleges aszimptota, $y = -\dfrac{3}{2}x$ és $y = \dfrac{3}{2}x$ ferde aszimptoták.

240. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$, folytonos az értelmezési tartományon, $y = 0$ vízszintes aszimptota.

241. $\operatorname{Dom} f = \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}; \infty\right)$, folytonos az értelmezési tartományon, nincs függőleges aszimptota, $y = -x - \dfrac{3}{2}$ és $y = x + \dfrac{3}{2}$ ferde aszimptoták.

242. $f(x) = \dfrac{(x-a)^2(x+a)^2}{x(x-b)(x-2b)}$, $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} - \{0; b; 2b\}$, folytonos az értelmezési tartományon, $y = x + 3b$ ferde aszimptota, $x = 0$ függőleges aszimptota. Ha

$a \neq \pm b$, akkor $x = b$ függőleges aszimptota. Ha $a \neq \pm 2b$, akkor $x = 2b$ függőleges aszimptota.

243. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$, az $x = 0$ hely kivételével folytonos, nincs függőleges aszimptota. $m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$, $c = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = 0$, ezért $y = x$ ferde aszimptota.

244. $\operatorname{Dom} f = (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$.
$\lim_{x\to n-0} f(x) = \lim_{x\to n-0}\left(\frac{x}{\operatorname{Ent} x} - 1\right) = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$ $(n \in \mathbf{Z} - \{1\})$, $\lim_{x\to n+0} f(x) = \frac{n}{n} - 1 = 0 = f(n)$ $(n \in \mathbf{Z} - \{0\})$. Ezekből következik, hogy az $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ helyeken a függvény csak jobb oldalról folytonos, és nincs függőleges aszimptota. Megmutatható, hogy $y = 0$ vízszintes aszimptota.

245. $\operatorname{Dom} f = R$. A folytonosság csak a $\sqrt[3]{n}$ $(n \in \mathbf{Z})$ helyeken kérdéses. Mivel $\lim_{x\to\sqrt[3]{n}-0} f(x) = \frac{n-1}{\sqrt[3]{n^2}+1}$, $\lim_{x\to\sqrt[3]{n^2}+0} f(x) = \frac{n}{\sqrt[3]{n^2}+1} = f(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$, a függvény ezeken a helyeken csak jobbról folytonos. Nincs függőleges aszimptota. Mivel $\frac{x^3-1}{x(x^2+1)} \le \frac{\operatorname{Ent} x^3}{x(x^2+1)} < \frac{x^3+1}{x(x^2+1)}$, ezért $m = 1$. Hasonló módon látható, hogy $c = 0$. Ezért $y = x$ ferde aszimptota.

246. A **T 8.16** tétel alapján közvetlen számítással igazolható.

247. Mivel a bal oldal y-ban harmadfokú, a $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ határérték meghatározása céljából osszuk el az egyenletet x^3-nal $(x > 0)$, majd képezzük mindkét oldal ∞-beli határértékét: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)$, így $\lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{y}{x}\right) = 0$ vagy $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 0$, azaz $m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = -2$ vagy $m = -1$. Ha $m = -2$, akkor a $c = \lim_{x\to\infty}(y + 2x)$ határértéket keressük. Osszuk el az eredeti egyenletet x-szel: $(2x + y)^2\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 1$, azaz $1 = \lim_{x\to\infty}(2x + y)^2\left(1 + \frac{y}{x}\right) = -\lim_{x\to\infty}(2x + y)^2$, ami lehetetlen. Ha $m = -1$, akkor a $c = \lim_{x\to\infty}(y + x)$ határértéket keressük. Osszuk el az egyenletet x^2-tel: $\left(2 + \frac{y}{x}\right)^2(x + y) = \frac{1}{x}$, így $0 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{y}{x}\right)^2(x + y)$ és $\lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{y}{x}\right)^2 = 1$ miatt $\lim_{x\to\infty}(x + y) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a függvény aszimptotája a ∞-ben $y = -x$. Hasonlóan látható, hogy a függvény aszimptotája a $-\infty$-ben szintén $y = -x$.

248. A $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$ meghatározásához osszuk el az egyenletet x^3-nal $(x \neq 0)$. (Megjegyezzük, hogy az egyszerűség kedvéért írunk a számításokban $\pm\infty$-t; ez azt jelenti, hogy mind ∞-ben, mind $-\infty$-ben ki kell számítani a határértéket.) Átrendezés után:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{y}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) = 1 - \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}\frac{1}{x^2}.$$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\pm\infty$ lehetetlen, mert ebből
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3=\mp\infty$ adódna, de $\left(\frac{y}{x}\right)^3$ és $\frac{y}{x}$ előjele megegyezik. Ez azt jelenti, hogy $\frac{y}{x}$ korlátos, amiből adódik, hogy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}\frac{1}{x^2}=0$, s így $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3=1$, azaz $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=1$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)$ kiszámításához alakítsuk az egyenletet a következő módon: $y^3-x^3+y-x=x$. Osszuk el az egyenletet x^2-tel. Így: $0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1+\frac{1}{x^2}\right)=3\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)$, ezért $c=0$. Ferde aszimptota a $\pm\infty$-ben: $y=x$.

249. Az egyenletet x^4-nel osztva: $\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2=\frac{2}{x^3}$, azaz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$ vagy $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=-1$. Ha $m=1$, akkor a $c=\lim_{x\to\infty}(y-x)$ határértéket kell kiszámítanunk; az egyenletből $(x-y)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2=\frac{2}{x}$, amiből $c=0$. Ha $m=-1$, akkor az egyenlet $(x+y)^2\left(1-\frac{y}{x}\right)^2=\frac{2}{x}$ alakjából $c=0$. A ∞-ben a ferde aszimptoták: $y=x$ és $y=-x$. (Mindkettő valóban aszimptota, mert ha y ielégíti az egyenletet, akkor $-y$ is, így a görbe szimmetrikus az x tengelyre.)

250. $1+\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{3}{x}, m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=-1$. Az egyenletből: $(y+x)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}+1\right)=3$, amiből $c=\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=1$. $y=-x+1$ ferde aszimptota a ∞-ben és a $-\infty$-ben.

251. $1-\frac{2}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$, $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=1$. A $c=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)$ meghatározásához alakítsuk az egyenletet a következő módon:

$$\frac{x^4-2x}{x-1}-x^3=y^3-x^3,$$
$$\frac{x^3-2x}{x-1}=(y-x)(y^2+yx+x^2),$$
$$\frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=(y-x)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1\right),$$

amiből $c=\frac{1}{3}$. (Megjegyezzük, hogy az $x=1$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota.)

252. $\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^4=\frac{4}{x^2}$, $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=0$. A $\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}y$ meghatározásához osszuk el az eredeti egyenletet x^2-tel: $y^2+y^2\left(\frac{y}{x}\right)^2=4$, amiből: $\lim_{x\to\pm\infty}y=\pm2$. A ferde aszimptoták egyenlete: $y=\pm2$. (Nyilvánvaló, hogy mind a két érték jó, mert az eredeti egyenletet minden y-nal együtt $-y$ is kielégíti.)

253. Legyen $f(x) = \sin x - x + 1$. Mivel $f(0) = 1$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$, ezért a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint a függvénynek van zérushelye.

254. $f(-1) = 19$, $f(1) = -15$, a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint a függvénynek van zérushelye az intervallum belsejében.

255. Az $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1}$ függvény folytonos a valós számok halmazán, továbbá $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Ezekből a Bolzano-tétel (**T 8.22**) segítségével adódik az állítás, hiszen van olyan $a < b$, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$.

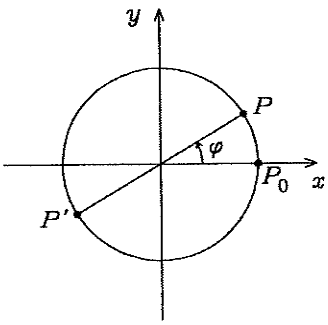
256. A függvény folytonos a $[-2, 2]$ intervallumban. $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$. Mivel $1 < \frac{7}{3} < 5$, ezért **T 8.21** szerint van olyan $x \in [-2, 2]$, hogy $f(x) = \frac{7}{3}$.

257. Ha $f(0) = 0$ vagy $f(1) = 1$, akkor $c = 0$ vagy $c = 1$. Tegyük fel, hogy $0 < f(0), f(1) < 1$. Mivel f folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, ezért a $g(x) = f(x) - x$ egyenlettel megadott függvény is folytonos a $[0, 1]$ intervallumon. $g(0) > 0$ és $g(1) < 0$, így a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint van olyan $c \in (0, 1)$, hogy $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$.

258. Definiáljuk az f függvényt a $[0; 1]$ intervallumon a következő módon: $f(x) = y$ akkor és csak akkor, ha mozgatáskor a szalag x pontja y-ba kerül. Az f teljesíti az előző feladat feltételeit.

259. Legyen $g(x)$ a $(0; 0)$ és az $(x; f(x))$ pontok távolsága, azaz $g(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ $(x \in [0, 1])$. g folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, ezért **T 8.21** szerint minden $d(\in [0, 1])$ számhoz van olyan $c \in [0, 1]$, hogy $g(c) = d$.

260. Vegyük fel a koordinátarendszer origóját a k kör (a vékony körgyűrű) középpontjában. Jelölje t azt a valós függvényt, amely a kör pontjaihoz a hőmérsékletét rendeli, azaz $t : P \mapsto t(P)$ $(P \in k)$. A t nyilvánvalóan folytonos az értelmezési tartomány minden pontjában. Legyen P_0 a k körnek az x-tengely pozitív felére eső pontja. Jelölje φ azt a szöget, amellyel P_0-t az origó körül pozitív forgásirányba elforgatva, a k kör P pontját kapjuk. Legyen továbbá P' a P pont origóra vonatkoztatott tükörképe (l. az ábrát). Definiáljuk az f egyváltozós valós függvényt a $f(\varphi) = t(P) - t(P')$ $(\varphi \in [0; 2\pi])$ képlettel. f folytonos az értelmezési tartományán. Ha $f(0) = 0$, akkor $t(P_0) = t(P_0')$, azaz a P_0 és P_0' pontok hőmérséklete egyenlő. Ha $f(0) \neq 0$, akkor $f(\pi) = -f(0)$ miatt $f(\pi)$ és $f(0)$ ellenkező előjelűek, és ezért a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint van olyan $\varphi_1 \in (0; \pi)$, hogy $f(\varphi_1) = 0$. Legyen $P_1 \in k$, amelyre $f(\varphi_1) = t(P_1) - t(P_1')$, akkor $t(P_1) = t(P_1')$.



9. Differenciálhányados, derivált (megoldások)

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-4}{h}=0$, tehát $f'(2)=0$.

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(2+h)+2-(4\cdot 2+2)}{h}=4$, tehát $f'(2)=4$.

3. 24. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $-\frac{1}{4}$.

6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(2+h)-\sin 2}{h}=$
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin 2\cos h+\cos 2\sin h-\sin 2}{h}=\cos 2$,
mivel $\dfrac{\cos h-1}{h}\to 0$ és $\dfrac{\sin h}{h}\to 1$, ha $h\to 0$.

7. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$.

8. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

9. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=\cos x_0$, ugyanis
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}=1$.

10. $-\frac{1}{2}x_0^{-\frac{3}{2}}$. **11.** $-\sin x_0$. **12.** $\cos^{-2}x_0$.

13. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}=nx_0^{n-1}$.

14. Mivel $x-x_0=(x^{\frac{1}{m}})^m-(x_0^{\frac{1}{m}})^m=(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}})(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}x_0^{\frac{1}{m}}+\cdots+(x_0^{\frac{m-1}{m}})$,
ezért $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}}{(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}})(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}x_0^{\frac{1}{m}}+\cdots+(x_0^{\frac{m-1}{m}})}=$
$\dfrac{1}{m}x_0^{\frac{1}{m}-1}$.

15. $\Delta f=3(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)+1-3x_0^2+2x_0-1=6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2-2\Delta x=$
$(6x_0-2)\Delta x+(3\Delta x)\Delta x$, tehát $f'(x_0)=6x_0-2$, $\varepsilon(x)=3\Delta x=3(x-x_0)$.

16. $f'(x_0)=3x_0^2+1$, $\varepsilon(x)=3x_0(x-x_0)+(x-x_0)^2$.

17. $\Delta f=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=\sin x_0\cos\Delta x+\cos x_0\sin\Delta x-\sin x_0=$
$\cos x_0\,\Delta x+\left(\dfrac{\sin x_0(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\dfrac{\cos x_0(\sin\Delta x-\Delta x)}{\Delta x}\right)\Delta x$, tehát
$f'(x_0)=\cos x_0$, és $\varepsilon(x)\to 0$, ugyanis $\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\to 0$, és $\frac{\sin\Delta x-\Delta x}{\Delta x}\to 0$.

18. $f'(x_0)=-\sin x_0$, $\varepsilon(x)=\dfrac{\cos x_0(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\dfrac{\sin x_0(\Delta x-\sin\Delta x)}{\Delta x}$.

19. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x-x_0)h(x) - 0}{x - x_0} = h(x_0)$. Másrészt a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x-x_0|h(x) - 0}{x - x_0}$ határérték csak $h(x_0) = 0$ esetén létezik, és akkor 0.

20. Tegyük fel, hogy $f(x) = f(-x)$ $(\forall x \in \mathbf{R})$, ekkor
$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ (legyen $k = -h$)
$= \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{-k} = -f'(x)$.
A másik összefüggés hasonlóan bizonyítható.

21. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h} \right) = 2f'(a)$,
mivel $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h} = \left\{ \begin{matrix} \text{helyettesítés} \\ k = -h \end{matrix} \right\} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a+k) - f(a)}{k} = f'(a)$.

22. g folytonos a-ban, mert $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a)$.

23. $f(x) = |x - 1|$.

24. Ilyen függvény **T 9.5** szerint nincs.

25. Pl.: $f(x) = 0$, vagy $f(x) = x^2$.

26. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, deriváltja $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 2x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, amely nem differenciálható 0-ban. Két másik példa: $f(x) = x|x|$ (lásd **141.** feladat); $f(x) = x^\alpha$, ahol $1 < \alpha < 2$ (lásd **144.** feladat).

27. $f'_x(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)y - xy}{h} = y$,
$f'_y(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(y+h) - xy}{h} = x$,
tehát a deriváltak: $f'_x : (x,y) \mapsto y$, $f'_y : (x,y) \mapsto x$. Ezek értéke a P pontban: $f'_x(1,2) = 2$, $f'_y(1,2) = 1$.

28. $f'_x : (x,y) \mapsto 2x$, $f'_y : (x,y) \mapsto 2y$, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

29. $f'_x(x,y) = 4$, $f'_y(x,y) = 2$, $f'_x(1,1) = 4$, $f'_y(1,1) = 2$.

30. $f'_x(x,y,z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)yz - xyz}{h} = yz$.
Hasonlóképpen kapjuk a másik két parciális deriváltat is, tehát:
$f'_x : (x,y,z) \mapsto yz$, $f'_y : (x,y,z) \mapsto xz$, $f'_z : (x,y,z) \mapsto xy$. Ezek értéke a P pontban: $f'_x(1,2,3) = 6$, $f'_y(1,2,3) = 3$, $f'_z(1,2,3) = 2$.

31. $f'_x : (x,y,z) \mapsto 3$, $f'_y : (x,y,z) \mapsto -4$, $f'_z : (x,y,z) \mapsto 2$, $f'_x(0,0,0) = 3$, $f'_y(0,0,0) = -4$, $f'_z(0,0,0) = 2$.

32. $f'_x : (x,y,z) \mapsto 0$, $f'_y : (x,y,z) \mapsto 0$, $f'_z : (x,y,z) \mapsto 0$, $f'_x(1,1,1) = f'_y(1,1,1) = f'_z(1,1,1) = 0$.

33. Mivel $f(h,0) = 0$, ha $h \ne 0$, ezért

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - a}{h - 0},$$

ami csak akkor létezik, ha $a = 0$, és ekkor $f'_x(0,0) = 0$. Hasonlóképpen $f'_y(0,0) = 0$.

34. Legyen $q = \frac{n}{m}$, és alkalmazzuk az $f(x) = x^{1/m}$ $(m \in \mathbf{N}^+)$ függvényre az $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ szabályt:
$(x^q)' = (x^{\frac{n}{m}})' = ((x^{\frac{1}{m}})^n)' = nx^{\frac{n-1}{m}}(\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1} = qx^{q-1}$.

35. Hasonlóan az előző feladathoz, $f'(x) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$. Ha $n \geq m$, akkor e függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, ha $n < m$, akkor nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, ezért kiszámítjuk $f'(0)$ értékét a definíció alapján:
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{n-m}{m}} = \infty.$$
Tehát $n < m$ esetén f nem differenciálható a 0 pontban.

36. $2x - 2$. **37.** $-1 - 3x^2$. **38.** $x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$.

39. $3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$. **40.** $-\frac{1}{x^2} + \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$. **41.** $(\frac{5x}{2} + 3)\sqrt{x}$.

42. $\sin x + x\cos x$. **43.** $3x^2\cos x - (x^3 + 1)\sin x$.

44. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. **45.** $\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

46. $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **47.** $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{(\cos x - 1)^2}$. **48.** $\dfrac{2 - x}{x^3}$.

49. $\dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8}{(1 + 2x)^2}$. **50.** $4(x + 3)^3$. **51.** $-20(1 - x)^{19}$.

52. $8x(x^2 + 1)^3$. **53.** $-20x(1 - x^2)^9$.

54. $6(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6)^5(14x + \dfrac{4}{x^2})$. **55.** $\dfrac{-4(x + 1)}{(x - 1)^3}$.

56. $\dfrac{5(x^2 + 1)^4(x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^6}$. **57.** $20(\sin x + 1)^{19}\cos x$.

58. $400(\sin^{20} x + 1)^{19}\sin^{19} x\cos x$.

59. $n\operatorname{tg}^{n-1} x/\cos^2 x$. **60.** $-5\cos^4 x/\sin^6 x$. **61.** $-f'(-x)$.

62. $2xf'(x^2)$. **63.** $af'(ax)$. **64.** $-f'(1/x)/x^2$.

65. $f'(\sin^2 x)\sin 2x$. **66.** $\dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}f'(\sqrt{1 - x^2})$. **67.** $F'(x) = 6x^2$.

68. $F'(x) = 0$.

70. $f(u) = u^3$, $u(x) = \sin x$, $f'(x) = f'(u(x))u'(x) = 3\sin^2 x\cos x$.

71. $f(u) = \sin u$, $u(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2\cos x^3$.

72. $f(u) = \sin u$, $u(x) = \operatorname{tg} x$, $f'(x) = \cos(\operatorname{tg} x)/\cos^2 x$.

73. $f(u) = u^2$, $u(t) = \sin t$, $t(x) = \operatorname{tg} x$, $f'(x) = \sin(2\operatorname{tg} x)/\cos^2 x$.

74. $f(u) = \sin u$, $u(t) = t^2$, $t(x) = \operatorname{tg} x$, $f'(x) = 2\cos(\operatorname{tg}^2 x)\sin x/\cos^3 x$.

75. $f(u) = \sin u$, $u(t) = \operatorname{tg} t$, $t(x) = x^2$, $f'(x) = 2x\cos(\operatorname{tg} x^2)/\cos^2 x^2$.

76. $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. **77.** $f'(t) = \dfrac{-a^2t}{\sqrt{1 - a^2t^2}}$, $t \in \left(\dfrac{-1}{|a|}, \dfrac{1}{|a|}\right)$.

78. $f'(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$, $x < -1$ vagy $x > 1$.

79. $f'(v) = \frac{1}{3}(3v + 18v^2)^{-\frac{2}{3}}(3 + 36v), \quad v \neq 0, -\frac{1}{6}.$

80. $f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{ad - bc}{(ax + b)^{5/3}(cx + d)^{1/3}}, \quad x \neq -\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}.$

81. $g'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{1 + \sin t}}, \quad t \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$

82. $f_x(x, y) = 6x + y, \ f_y(x, y) = x - 6y^2.$

83. $g_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \ g_y(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}.$

84. $\rho_\varphi(\varphi, \psi) = \cos\varphi\cos\psi, \ \rho_\psi(\varphi, \psi) = -\sin\varphi\sin\psi.$

85. $f_x(x, y) = 2ax + by, \ f_y(x, y) = bx + 2cy.$

86. $f_x(x, y, z) = y + z, \ f_y(x, y, z) = x + z, \ f_z(x, y, z) = x + y.$

87. $f_x(x, y, z) = \sin(xyz) + xyz\cos(xyz), \ f_y(x, y, z) = x^2z\cos(xyz),$
$f_z(x, y, z) = x^2y\cos(xyz).$

88. $g_x(x, y) = \frac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2}, \ g_y(x, y) = \frac{(bc - ad)x}{(cx + dy)^2}.$

89. $f_x(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$

90. $h_x(x, y) = 2f(x)f'(x)g(y), \ h_y(x, y) = f^2(x)g'(y).$

91. $h_x(x, y, z) = 2f(x, y)f_x(x, y)g^3(y, z),$
$h_y(x, y, z) = 2f(x, y)f_y(x, y)g^3(y, z) + 3g^2(y, z)g_y(y, z)f^2(x, y),$
$h_z(x, y, z) = 3g^2(y, z)g_z(y, z)f^2(x, y).$

92. $f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3.$

93. $f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1}\ldots x_n, \ (k = 1, 2, \ldots, n).$

94. $f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n).$

95. $f_x(0, 0) = -\frac{1}{3}, \ f_y(0, 0) = \frac{1}{3}.$

96. A differenciálási szabályok szerint $x \neq 0, \ y \neq 0$ esetén
$f_x(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \ f_y(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$. Ezek a $(0, 0)$ pontban nincsenek értelmezve, így a definíció alapján kell számolnunk.
$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$, hasonlóképpen $f_y(0, 0) = 0.$

97. $f_x(x, y) = \frac{x^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}}, \ f_y(x, y) = \frac{y^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}}$. Ezek a $(0, 0)$ pontban nincsenek értelmezve, így a definíció alapján számolva: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1.$

98. $f_x(0, 0)$ nincs értelmezve, $f_y(0, 0) = 0.$

99. $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases},$

ugyanis $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0.$
Az f' függvény nem folytonos 0-ban, mert a $\lim_{x \to 0}\cos\frac{1}{x}$ határérték nem létezik, így a $\lim_{x \to 0}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$ határérték sem.

100. f nem differenciálható az $x_k = 1/(k\pi)$ helyeken. A 0 pontbeli differenciálhatóság a definíció alapján, az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

101. A sorozat összegképletének mindkét oldalát deriválva kapjuk, hogy
$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

102. Az előző feladat összegképletének mindkét oldalát x-szel szorozva, majd mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy
$$1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1} = \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}\right)' =$$
$$= \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

103. A $2\sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ azonosságot felhasználva:
$2\sin x(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x) =$
$2\sin x\cos x + 2\sin x\cos 3x + \ldots + 2\sin x\cos(2n-1)x =$
$\sin 2x + (\sin 4x - \sin 2x) + \ldots + (\sin 2nx - \sin(2n-2)x) = \sin 2nx,$
ami bizonyítja a feladatbeli első formulát. Ennek mindkét oldalát deriválva megkapjuk a kívánt összegképletet:
$$(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x)' = \left(\frac{\sin 2nx}{2\sin x}\right)', \text{ azaz}$$
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\sin(2k-1)x = \frac{(2n+1)\sin(2n-1)x - (2n-1)\sin(2n+1)x}{4\sin^2 x}.$$

104. $3^4\sin(3x+1)$. **105.** $-2^7\sin(4-2x)$. **106.** $\dfrac{5!}{(1-x)^6}$.

107. $f^{(10)}(x) = -\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 17}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

108. $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 3y^2$, $f_{yy}(x,y) = 6xy$.

109. $f_{xx}(x,y) = 2a$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2b$, $f_{yy}(x,y) = 2c$.

110. $f_{xx}(x,y) = -4x^2y^2\sin x^2y + 2y\cos x^2y$, $f_{yy}(x,y) = -x^4\sin x^2y$,
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2x^3y\sin x^2y + 2x\cos x^2y$.

111. $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$.

112. $f_{xx}(x,y,z) = 2$, $f_{yy}(x,y,z) = 4(x+3y^2+z^3)$, $f_{zz}(x,y,z) = 6z(2x+2y^2+5z^3)$,
$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 4y$, $f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 6z^2$,
$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 12yz^2$.

113. $\dfrac{\partial^6 g}{\partial x^3\partial y^3}(x,y) = -6(\cos x + \cos y)$.

114. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{4y}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = \dfrac{4(x+2y)}{(x-y)^4}$.

115. $\dfrac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}(x,y) = n!m!$.

116. $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y) = \dfrac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$. (Ha az eredményt nem tudtuk direkt módon kiszámítani, akkor bizonyítsuk be külön n-re majd külön m-re vonatkozó teljes indukcióval!)

117. $y'(x) = 2cx$, így $y'(x)x - y(x) = 2cx^2 - 2cx^2 = 0$ valóban fennáll.

120. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$

121. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0.$

122. $\dfrac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \dfrac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \dfrac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0.$

123. $(x^m)' = mx^{m-1}$, $(x^m)'' = m(m-1)(x^{m-2}), \ldots,$
$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.
(A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy $n = 0$ esetén $m < m-n+1$ miatt az $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ szorzatot úgy kell tekintenünk, mint aminek egyetlen tényezője sincs, így értéke 1. Mivel nem értelmeztük a 0^0 hatványt, ezért $m = 0$ esetén az összefüggés nincs értelmezve az $x = 0$ helyen.)

124. Az előző feladatbeli egyenlőségből következik.

125. $((x-a)^{-1})' = -1(x-a)^{-2}$, $((x-a)^{-1})'' = (-1)(-2)(x-a)^{-3}, \ldots,$
$((x-a)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(x-a)^{-n-1} = (-1)^n n!/x^{n+1}$.

126. $(\sin x)' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, $(\sin x)'' = (\sin(x+\frac{\pi}{2}))' = \sin(x+\frac{2\pi}{2})$, hasonlóan $(\sin(x+\frac{k\pi}{2}))' = \sin(x+\frac{(k+1)\pi}{2})$, így teljes indukcióval kapjuk, hogy $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

127. Hasonló az előzőhöz.

128. $a_0 n!$.

129. $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $(\sin x\cos x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$.

130. $\sin 3x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$,
$(\sin 3x\cos 2x)^{(n)} = \frac{1}{2}(5^n\sin(5x+\frac{n\pi}{2}) + \sin(x+\frac{n\pi}{2}))$.

131. $\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$, $(\cos ax\cos bx)^{(n)} =$
$\frac{1}{2}\left((a-b)^n\cos((a-b)x+\frac{n\pi}{2}) + (a+b)^n\cos((a+b)x+\frac{n\pi}{2})\right)$.

132. $\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

133. $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$.

134. $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}$, ha $c \neq 0$ és $n \in \mathbf{N}^+$. A $c = 0$ eset triviális. (Vegyük észre, hogy a számlálóban az a, b, c, d számokból álló determináns értéke áll.)

135. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén: $(fg)' = f'g + fg'$, tehát az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is:

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right)'$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)}.$$

Felhasználva, hogy $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, továbbá hogy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ kapjuk, hogy

$\binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) f^{(n)} g' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$.

136. $(x^2 \sin x)'' = (x^2)'' \sin x + 2(x^2)'(\sin x)' + x^2(\sin x)' = 2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x$.

137. $(x \sin x)^{(25)} = x\cos x + 25 \sin x$, mert x minden további deriváltja 0.

138. $x^2 \cos x + 50x \sin x - 300 \cos x$.

139. $13 \sin 2x \sin(x+1) - 14 \cos 2x \cos(x+1)$.

140. $f'(x) = 12x^3 - 4x$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = 36x^2 - 4$, $f''(0) = -4$, $f'''(x) = 72x$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(x) = 72$, $f^{(4)}(0) = 72$, $f^{(n)}(x) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, ha $n > 4$.

141. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases} = x|x|, \qquad \mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases} = 2|x|, \qquad \mathrm{Dom}\, f' = \mathbf{R}$

$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x > 0 \\ -2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \qquad \mathrm{Dom}\, f'' = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$f^{(n)}(x) = 0$, ha $n \geq 3$ és $x \neq 0$, $\quad \mathrm{Dom}\, f^{(n)} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Tehát $f(0) = f'(0) = 0$, de $f^{(n)}(0)$ nincs értelmezve, ha $n \geq 2$.

142. $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$, $f^{(2n)}(0) = 0$,
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

143. $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$,
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \sin x$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

144. A **35.** feladat szerint: $(x^{\frac{4}{3}})'|_0 = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}|_0 = 0$, $(x^{\frac{4}{3}})'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$, tehát e függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem. $(x^{\frac{7}{3}})'|_0 = 0$, $(x^{\frac{7}{3}})''|_0 = 0$, $(x^{\frac{7}{3}})''' = \frac{28}{27}x^{-\frac{2}{3}}$, tehát e függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Legyen $k = n + \varepsilon - 1$, ahol $\varepsilon = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbf{N}^+$, m páratlan, $n < m$ (tehát $0 < \varepsilon < 1$, pl. $\varepsilon = 1/3$ az előző függvényeknél).
$(x^{n+\varepsilon-1})^{(i)} = (n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)\dots(n+\varepsilon-i)x^{n+\varepsilon-i-1}$, $(i < n)$,
$(x^{n+\varepsilon-1})^{(n)} = (n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)\dots(1+\varepsilon)\varepsilon x^{\varepsilon-1}$,
és ez utóbbi függvény nincs értelmezve 0-ban, míg az előző deriváltak értéke 0-ban 0.

145. $f(-1) = f(1) = 0$, f folytonos $[-1,1]$-en, de f nem differenciálható 0-ban, vagyis nem differenciálható a $(-1,1)$ intervallum minden pontjában. Tehát a tétel feltételei nem teljesülnek, és olyan c sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

146. $f(-1) = f(1) = 0$, f folytonos $[-1,1]$-en, de nem differenciálható 0-ban (lásd **35.** feladat). Egyébként nincs olyan $c \in (-1,1)$, melyre $f'(c) = 0$ lenne.

147. $f(0) = f(\pi) = 0$, f folytonos a $[0,\pi]$-n, és differenciálható a $(0,\pi)$ intervallumon; $f'(\pi/2) = 0$.

148. $f(0) = f(2\pi) = 0$, f folytonos a $[0,2\pi]$-n, de nem differenciálható π-ben, vagyis a tétel feltételei nem teljesülnek. Ettől függetlenül van olyan pont a $(0,2\pi)$ intervallumban, ahol a differenciálhányados 0, nevezetesen $f'(\pi/2) = f'(3\pi/2) = 0$.

149. f folytonos a $[-2,0]$ intervallumon, differenciálható a $(-2,0)$ intervallumon, így van olyan $c \in (-2,0)$, hogy $f'(c) = (f(0) - f(-2))/(0 - (-2)) = -6$. $f'(x) = 6x$, ezért $c = -1$.

150. f nem folytonos 0-ban, és olyan c sincs melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

151. Bár f nem differenciálható 0-ban, és így a tétel feltételei nem teljesülnek, de van olyan c, melyre a tétel konklúziója igaz, nevezetesen $c = 1$.

152. f nem differenciálható 0-ban, és olyan c sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

153. f és g folytonos és differenciálható mindenütt, $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$, és ennek nincs valós zérushelye, tehát a Cauchy-tétel feltételei fennállnak, így van olyan $c \in (1,4)$, hogy $\dfrac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, azaz $\dfrac{11-2}{27-9} = \dfrac{2c-2}{3c^2-14c+20}$. Ennek megoldásai $c_1 = 2$ és $c_2 = 4$, de $4 \notin (1,4)$, tehát $c = 2$ az egyetlen ilyen érték.

154. f nem differenciálható 0-ban, és olyan c sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne. (A feladat lényegében megegyezik a kettővel ezelőttivel.)

155. A tétel feltételei nem teljesülnek, mivel $g'(0) = 0$. Olyan c sincs melyre a tétel konklúziója igaz lenne, mert $(f(1) - f(-1))/(g(1) - g(-1)) = 0$, és az $f'(c)/g'(c) = 0$ egyenlet csak $c = 0$ esetén teljesülhetne, ahol ennek az egyenletnek nincs értelme.

156. Az $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$ függvény folytonos, és például $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, így a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint a feladatbeli egyenletnek a $(0,1)$ intervallumon van gyöke. Tegyük fel, hogy $x_1 < x_2$ két különböző valós gyök. Ekkor f kielégíti a Rolle-tétel feltételeit az $[x_1, x_2]$ intervallumon, így van olyan $c \in (x_1, x_2)$ szám, hogy $f'(c) = 0$. Másrészt $f'(x) = 15(x^4 + 1) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Indirekt feltevésünkből ellentmondásra jutottunk, tehát az egyenletnek nincs két valós gyöke.

157. $f(x) = 0$, ha $\sin\frac{\pi}{x} = 0$, azaz ha $x = 1/k$, $k \in \mathbf{N}^+$. Mivel f folytonos $[0,1]$-en, és differenciálható $(0,1)$-en, ezért a Rolle-tétel alkalmazható az $[\frac{1}{2}, 1], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \dots, [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], \dots$ intervallumokra, azaz létezik olyan c_k, hogy $\frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$ és $f'(c_k) = 0$.

158. Legyen $f(x) = c_1 x + \dfrac{c_2}{2}x^2 + \dots + \dfrac{c_n}{n}x^n$. E függvény kielégíti a Rolle-tétel feltételeit a $[0,1]$ intervallumon, hisz $f(0) = f(1) = 0$, így van olyan $c \in (0,1)$, melyre $f'(c) = 0$.

159. A Lagrange-tételt a sin függvényre felírva kapjuk, hogy $\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos c$, valamely $c \in (x,y)$ (ill. $c \in (y,x)$) számra. Vegyük mindkét oldal abszolút értékét, és használjuk ki, hogy $|\cos c| \leq 1$. Ekkor kapjuk, hogy $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

160. A Lagrange tétel szerint van olyan c az x és a $-y$ számok között, hogy $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(-y)}{x-(-y)} = \frac{1}{\cos^2 c}$. Átrendezve és felhasználva, hogy $|\cos c| \leq 1$, kapjuk, hogy $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \geq |x + y|$.

161. Tegyük fel, hogy $0 < x < y$, és írjuk fel a Lagrange tételt az $[x, y]$ intervallumra és a négyzetgyök-függvényre, valamint használjuk ki azt, hogy mivel $x < c$, ezért $1/\sqrt{c} < 1/\sqrt{x}$.

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ amiből átszorzás után } \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}.$$

162. A Lagrange tételt felírva az f függvényre és az $[x, x+1]$ intervallumra, kapjuk hogy van olyan $c \in (x, x+1)$ szám, hogy $f(x+1) - f(x) = f'(c)$. Ez bizonyítja állításunkat.

163. $f'(x) = 3x(x-2)$, f szigorúan monoton nő, ha $x < 0$, $x > 2$, szigorúan monoton csökken, ha $0 < x < 2$.

164. $f'(x) = 3(x+2)^2 \geq 0$, továbbá $f(x) < 0$, ha $x < -2$ és $f(x) > 0$, ha $x > -2$, így f mindenütt szigorúan monoton növekvő.

165. $f'(x) = (2-x)(2+x)/(x^2+4)^2$, f szigorúan monoton nő, ha $-2 < x < 2$, szigorúan monoton csökken, ha $x < -2$, $2 < x$.

166. $f'(x) = 2\sin 4x$, f szigorúan monoton nő, ha $0 < x < \pi/4$, $\pi/2 < x < 3\pi/4$, szigorúan monoton csökken, ha $\pi/4 < x < \pi/2$, $3\pi/4 < x < \pi$.

167. $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3} > 0$, f szigorúan monoton nő, ha $x < -2$, $x > -2$.

168. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$, f szigorúan monoton nő, ha $-1 < x < 0$ vagy $0 < x$, szigorúan monoton csökken, ha $x < -1$.

169. Tekintsük az $f(x) = x - \sin x$ függvényt. Ha $0 < x < \pi$ akkor $f'(x) > 0$, így f szigorúan monoton nő; ebből, mivel $f(0) = 0$, következik, hogy $f(x) > 0$, ha $0 < x < \pi$. Ha pedig $x \geq \pi$, akkor $f(x) \geq \pi - 1 > 0$. Tehát $f(x) > 0$, ha $x > 0$, azaz $x - \sin x > 0$. Ez bizonyítja az egyik egyenlőtlenséget. A másik hasonlóan adódik, csak az előző gondolatmenet kétszeri alkalmazásával: $f(x) = \sin x - x + x^3/3 > 0$, ha $x > 0$, ugyanis $f(0) = 0$ és $f'(x) = \cos x - 1 + x^2 > 0$, ami azért igaz, mert $f'(0) = 0$ és $f''(x) = -\sin x + x > 0$, amint azt már bizonyítottuk.

170. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg.

171. Legyen $f(x) = x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)$. Mivel $f(1) = 0$ és $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha > 0$, ha $\alpha > 1$ és $x > 1$, ezért $f(x) > 0$, ami bizonyítja az egyenlőtlenséget.

172. A p' polinomnak legfeljebb $n-1$ valós gyöke van, ezek közül jelölje a a legkisebbiket, c a legnagyobbikat, és legyen b az $|a|$ és $|c|$ maximuma. Ekkor p'-nek nincs gyöke a $(-\infty, -b)$ és a (b, ∞) intervallumokban, tehát egyikben sem vált előjelet, így p mindkettőben szigorúan monoton.

173. $y'(x) = \dfrac{1 - 2xy(x) - 3y^3(x)}{x^2 + 9xy^2(x)}$. **174.** $y'(x) = -\dfrac{y^2(x)}{x^2}$.

175. Az is megtehető, hogy az egyenletet nem rendezzük 0-ra, hanem mindkét oldalát külön-külön differenciáljuk x szerint:

$$(3xy(x))' = (((x^3 + y^2(x))^{\frac{3}{2}})', \text{ amiből } y'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x^3 + y^2(x)} - y(x)}{x - y(x)\sqrt{x^3 + y^2(x)}}.$$

176. $\cos(x^2y^2(x))(2xy^2(x) + 2x^2y(x)y'(x)) = 1$, amiből $y'(x)$ kifejezhető.

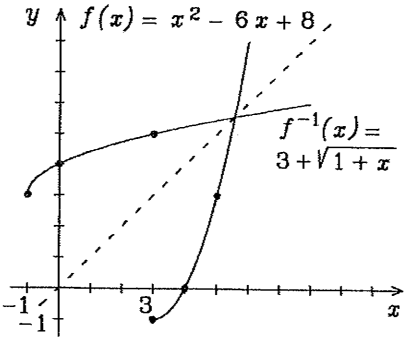
177. $2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 0$, amiből $y'(x) = \dfrac{y(x)}{y(x) - x}$. Ebből

$$y''(x) = \frac{y'(x)(y(x) - x) - y(x)(y'(x) - 1)}{(y(x) - x)^2} = \frac{y^2(x) - 2xy(x)}{(y(x) - x)^3} = \frac{3}{(x - y(x))^3}.$$

178. $y'(x) = \dfrac{\cos y(x)}{1 + x\sin y(x)}$, $y''(x) = -\dfrac{\sin 2y(x) + x\cos y(x)(\sin^2 y(x) + 1)}{(1 + x\sin y(x))^3}$.

179. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$,

180. Az inverz kiszámításához $f(x)$ helyébe y-t írunk ($y = x^2 - 6x + 8$), és az így kapott egyenletből kifejezzük x-et: $x = 3 \pm \sqrt{1 + y}$. Mivel a feladat szerint $x \geq 3$, ezért $x = 3 + \sqrt{1 + y}$, azaz az inverz függvénykapcsolat: $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1 + x}$ (itt x helyébe $f^{-1}(x)$-et, y helyébe x-et írtunk). $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = [-1, \infty)$ és $\mathrm{Ran}\, f^{-1} = [3, \infty)$, mivel $\mathrm{Dom}\, f = [3, \infty)$ és $\mathrm{Ran}\, f = [-1, \infty)$. (lásd ábra)



181. Az $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ egyenletből kapjuk, hogy $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$. Az $ad - bc = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $ax + b$ és $cx + d$ egyike konstansszorosa a másiknak, azaz f vagy nincs értelmezve egyetlen x pontban sem, vagy f egy konstansfüggvény és akkor nem invertálható. Könnyen ellenőrizhető, hogy $ad - bc \neq 0$ esetén a fenti egyenletből x egyértelműen kifejezhető, tehát f egész értelmezési tartományán invertálható.

182. Egy függvény inverzének grafikonja a függvény grafikonjának tükörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre. Így egy függvény pontosan akkor inverze önmagának, ha grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre. Meg kell tehát mutatnunk, hogy $f^{-1}(x) = f(x)$. f inverzét megkapjuk a következő egyenletből:

$$x = \frac{af^{-1}(x) + b}{cf^{-1}(x) - a}, \text{ amiből } f^{-1}(x) = \frac{ax + b}{cx - a}.$$

183. Az előző feladat speciális esete.

184. $f^{-1} = f$.

185. Ha f nem monoton, akkor van négy olyan $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$ pont, hogy $f(x_1) < f(x_2)$, de $f(x_3) > f(x_4)$. Könnyen látható, hogy e négy pont közül mindig kiválasztható a feladat feltételeit kielégítő három.

186. Az állítás az előző feladatból és a **T.8.21** tételből következik.

187. $y_0 = f(1) = -1$, $f'(x) = 15x^2+1$, $f'(1) = 16$. Mivel $f'(x) > 0$, ha $x \in \mathbf{R}$, ezért f szigorúan monoton növő, s ezért invertálható. Inverz függvény grafikonja az eredetinek az $y = x$ egyenesre való tükrözése által kapható, a 16 iránytangensű egyenes tükörképének iránytangense pedig $1/16$, tehát $f^{-1}(-1) = 1/16$, míg általában $f^{-1}(y_0) = 1/(15x_0^2 + 1)$. Ugyanezt kapjuk az inverzfüggvény tételből is, hisz

$$\left(\frac{df^{-1}}{dy}\right)_{y=-1} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1}} = \frac{1}{(15x^2+1)_{x=1}} = \frac{1}{16}.$$

Az inverz függvényt leíró implicit alak: $y = 5(f^{-1}(y))^3 + f^{-1}(y) - 7$, vagy az $x = f^{-1}(y)$ jelöléssel: $y = 5x^3 + x - 7$. Mindkét oldal y szerinti differenciálásával kapjuk, hogy $1 = 15x^2\frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy}$. Ebből f^{-1} deriváltja: $(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} = 1/(15x^2+1)$.

188. $y_0 = f(\frac{\pi}{8}) = 1$, $(f^{-1}(y))'_{y=1} = \left.\frac{\cos^2 2x}{2}\right|_{x=\pi/8} = \frac{1}{4}$.

189. $y_0 = f(0) = 0$, $(f^{-1}(y))'_{y=0} = 1/(7 - 3\cos 3x)|_{x=0} = 1/4$.

190. $y_0 = f(1) = 4$, $(f^{-1}(y))'_{y=4} = 1/(10x^4 + 3x^2)\big|_{x=1} = 1/13$.

191. Ha $a \in A$, akkor $b = g(a) \in B$ és $c = f(b) = f(g(a)) \in C$. Mivel f és g invertálhatók, ezért $f^{-1}(c) = b$, $g^{-1}(b) = a$ és ezért $(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a$. Másrészt $(f \circ g)(a) = c$, ezért $(f \circ g)^{-1}(c) = a$, tehát $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

192. $f'(x) > 0$, ha $x \in (0, \infty)$, így f a $(0,3)$ intervallumon is szigorúan monoton növő. Mivel $f(1) = 3$, ezért $g(3) = 1$, továbbá $\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=3} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{4x^3 + 3x^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{7}$, ahol $y = f(x)$. $F'(x) = (f(2g(x)))' = f'(2g(x))2g'(x)$, tehát $F'(3) = \left(4(2g(3))^3 + 3(2g(3))^2\right)2g'(3) = 88/7$.

193. $f(\pi^2) = 0$, $f'(\pi^2) = \left.\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right|_{x=\pi^2} = \frac{-1}{2\pi}$,
érintő: $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{\pi}{2}$, normális: $y = 2\pi x - 2\pi^3$.

194. $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = \left(-\frac{\pi^2}{x^2}\right)\cos\left.\frac{\pi^2}{x}\right|_{x=\pi} = 1$,
érintő: $y = x - \pi$, normális: $y = -x + \pi$.

195. $f(3) = 3$, $f'(3) = 3x^2 - 8\big|_{x=3} = 19$,
érintő: $y = 19x - 54$, normális: $y = -\frac{x}{19} + \frac{60}{19}$.

196. y-t x függvényének tekintve és az implicit függvény differenciálási szabályát használva: $3x^2 + 3y^2(x)y'(x) - 6y(x) - 6xy'(x) = 0$, így az $x = 3$, $y(3) = 3$ értékek behelyettesítésével kapjuk, hogy $y'(3) = -1$.
Érintő: $y = -x + 6$, normális: $y = x$. (A gyakorlatban a fenti deriváltat csak $3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0$ alakban írjuk fel.)

197. $y' = (1 + y')\cos(x + y)$, $y'(\pi) = -\frac{1}{2}$
Érintő: $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$, normális: $y = 2(x - \pi)$.

198. $f(x) = f(x)\sin ax$, ha $\sin ax = 1$, azaz ha $ax = \pi/2 + 2k\pi$.
Ekkor $(f(x)\sin ax)'|_{ax=\pi/2+2k\pi} = (f'(x)\sin ax + af(x)\cos ax)|_{ax=\pi/2+2k\pi} = f'(x)$, tehát a deriváltak megegyeznek a közös pontban, így a görbék érintik egymást.

199. $2x - 4 + 2yy' = 0$, amiből $y' = (2-x)/y$. Az egyenes egyenlete $y = mx$. Az (x_0, y_0) érintési pontra és az érintő m iránytangensére az alábbi egyenletek állnak fenn: $x_0^2 - 4x_0 + y_0^2 + 3 = 0$, $(2-x_0)/y_0 = m$, $y_0 = mx_0$. Ezekből $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, tehát két ilyen egyenes van, és ezek egyenlete: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

200. $b^2 - 4ac = 0$.

201. Vízszintes az érintő ott, ahol $y'(x) = 0$, azaz $3x^2 + p = 0$, tehát $x = \pm\sqrt{-p/3}$. Ha e pontokban $y(x) = 0$, akkor az érintő az x-tengely lesz. A behelyettesítést elvégezve, rövid számolás után megkapjuk a kívánt összefüggést.

202. $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f'''(0) = g'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1 \neq g^{(5)}(0) = 0$.

203. $f^{(i)}(0) = g^{(i)}(0)$, ha $0 \le i \le 5$, de $f^{(6)}(0) = -1 \neq g^{(6)}(0) = 0$.

206. A **T 9.26** tétel szerint legalább másodrendben, valójában harmadrendben.

207. A **T 9.26** tétel szerint legalább elsőrendben, a deriváltakat kiszámolva látható, hogy pontosan elsőrendben érintik egymást.

208. A metszéspontok $P_1(2,2)$ és $P_2(2,-2)$. P_1-ben a két iránytangens 0 és -1, tehát a hajlásszög $\pi/4$. P_2-ben a két iránytangens 0 és 1, a hajlásszög itt is $\pi/4$.

209. A metszéspontok $P_1(2\sqrt{2},2)$, $P_2(-2\sqrt{2},2)$, $P_3(2\sqrt{2},-2)$, $P_4(-2\sqrt{2},-2)$. Az ellipszis érintőjének iránytangense $m_1 = -2x/y$, a hiperboláé $m_2 = x/(4y)$. Ha x és y helyébe bármelyik metszéspont koordinátáit helyettesítjük, $m_1m_2 = -1$ adódik, tehát a két görbe merőlegesen metszi egymást mind a négy pontban.

210. A metszéspontok $P_1(3,4)$, $P_2(4,3)$, $P_3(-3,-4)$, $P_4(-4,-3)$. A hiperbola érintőjének iránytangense $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = -y/x$, a köré $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = -x/y$. Az érintők hajlásszögének tangense:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \pm\frac{7}{24},$$

azaz a hajlásszög mind a négy pontban $|\alpha_1 - \alpha_2| = \operatorname{arctg}\frac{7}{24}$.

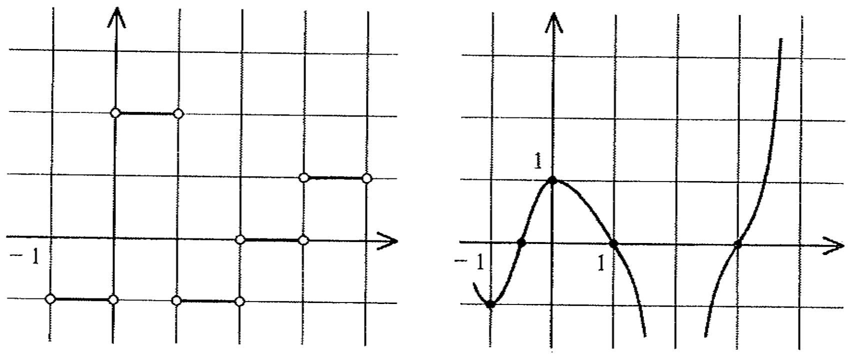
211. A sugár $r(2) = 1/2$, a középpont $(2, -5/2)$.

212. Mivel a $P(0,0)$ pontban az érintő függőleges, ezért x és y szerepének felcserélésével áttérünk az inverz függvényre: $2py = x^2$, $y' = x/p$, $y'' = 1/p$. A képletbe való behelyettesítéssel kapjuk, hogy a sugár $p(1+x^2/p^2)^{3/2}$, a középpont $(-x^3/p^2, \frac{3}{2}x^2/p + p)$. E képleteket a $2py = x^2$ behelyettesítésével átírjuk y függvényévé: a sugár $p(1+\frac{2y}{p})^{3/2}$, a középpont $(-(2y)^{3/2}/\sqrt{p}, 3y+p)$. Visszatérve az inverz függvényről az eredetire, azaz visszacserélve az x és y változókat kapjuk, hogy a sugár $p(1+\frac{2x}{p})^{3/2}$, a középpont $(-(2x)^{3/2}/\sqrt{p}, 3x+p)$.

213. A sugár a^2/b, a középpont $(0, (b^2 - a^2)/b)$.

214. Térjünk át x és y szerepének felcserélésével az inverz függvénykapcsolatra, és vizsgáljuk a $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ egyenletű görbe simulókörét a $(0,a)$ pontban, majd cseréljük vissza x-et és y-t. A sugár b^2/a, a középpont $((a^2+b^2)/a,0)$.

215.



216. Ha f differenciálható x_0-ban, akkor folytonos is ott, tehát bal oldali és jobb oldali határértékei megegyeznek.
$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=ax_0+b$, $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=x_0^2$, így $x_0^2=ax_0+b$.
Ha f differenciálható, akkor a differenciahányados bal oldali és jobb oldali határértékei ugyancsak megegyeznek.
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a,\qquad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2x_0,$$
azaz $2x_0=a$. A két egyenletből pedig kapjuk, hogy $a=2x_0$ és $b=-x_0^2$.

217. $$\lim_{x\to x_0-0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$
a jobb oldali és bal oldali határérték megegyezik, így g differenciálható az x_0 pontban és $g'(x_0)=f'(x_0)$. g grafikonja $x>x_0$ esetén megegyezik az f függvény x_0-beli érintőjével.

218. $a=-\frac{m^2}{2c^3}$, $b=\frac{3m^2}{2c}$.

219. $a=\frac{1}{2}f''(x_0)$, $b=f'(x_0)$, $c=f(x_0)$.

220. a) Igaz, b) nem igaz. **221.** Egyik sem igaz. **222.** Egyik sem igaz.

223. $F''(x)=g'^2(x)f''(g(x))+g''(x)f'(g(x))$,
$F'''(x)=g'^3(x)f'''(g(x))+3g'(x)g''(x)f''(g(x))+g'''(x)f'(g(x))$.

10. Egyváltozós valós elemi függvények (megoldások)

1. A maradékos osztást az alábbiak szerint végezzük: leírjuk egymás után az osztandót és az osztót; elosztjuk a legmagasabb kitevőjű tagokat, azaz $2x^3$-öt x^2-tel ($2x^3 : x^2 = 2x$), és a $2x$-et leírjuk az eredményhez; az osztót visszaszorozzuk $2x$-szel és a szorzatot $(2x^3 + 6x^2 + 2x)$ az osztandó alá írjuk, majd kivonjuk az osztandóból; az így kapott polinommal megismételjük az előbbi eljárást, és ezt addig folytatjuk, míg az osztónál kisebb fokú maradékot nem kapunk.

$$\begin{array}{llll}
(2x^3 & +2x^2 & -4x & -2) : (x^2 +3x +1) = 2x -4 \\
-2x^3 & \pm 6x^2 & \pm 2x & \\
\hline
 & -4x^2 & -6x & -2 \\
 & \mp 4x^2 & \mp 12x & \mp 4 \\
\hline
 & & +6x & +2
\end{array}$$

Tehát a hányados $q(x) = 2x - 4$, a maradék $r(x) = 6x + 2$. Eredményünket az $f = gq + r$ alakba írva: $2x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = (x^2 + 3x + 1)(2x - 4) + (6x + 2)$.

2. $q(x) = x - 1$, $r(x) = 0$.

3. $q(x) = x^3$, $r(x) = x^2 + 2x + 3$.

4. $q(x) = x^2 + 2x$, $r(x) = -3x^2 + 2x + 3$.

5. $q(z) = z^2 + iz + 4$, $r(z) = 2i$.

6. $q(z) = z - i$, $r(z) = 0$.

7. $q(x) = x^{3k-3} + x^{3k-6} + \ldots + x^3 + 1$, $r(x) = 0$.

8. $q(x) = x^{3k-2} - x^{3k-3} + x^{3k-5} - x^{3k-6} + \ldots + x^4 - x^3 + x - 1$, $r(x) = 1$.

9. a) b) c) $f(x) = (x+1)^2(x - \frac{1}{2})$, d) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

10. a) b) c) $f(x) = (x-1)(x+2)^2(x+1)$, d) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.

11. a) b) c) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, d) $f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$.

12. a) $f(x) = (x-1)(x-i)(x+i)$, b) c) $f(x) = (x-1)(x^2+1)$, d) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

13. a) $f(x) = (x-1)(x-i)^2(x+i)^2$, b) $f(x) = (x-1)(x^2+1)^2$, c) $f(x) = (x-1)(x^4 + 2x^2 + 1)$, d) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$.

14. a) $f(x) = (x-1)(x-1-i)^2(x-1+i)^2$, b) $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)^2$,
c) $f(x) = (x-1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)$,
d) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 12x - 4$.

15. a) $f(x) = (x+1)(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)$, b) $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^2 - 2x+2)$, c) $f(x) = (x+1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2)$, d) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2$.

16. a) $f(x) = (x-i)^2(x+i)$, b) c) ilyen alakok nincsenek, mivel az egymásnak konjugált komplex zérushelyek nem ugyanannyiszoros zérushelyek ($k_1 \neq k_2$), és ezért a **T 10.4** miatt f együtthatói nem lehetnek mind valósak,
d) $f(x) = x^3 - ix^2 + x - i$.

17. a) $f(x) = (x-i)^2(x+i)^3$, b) c) az előző feladatban leírtak szerint ilyen alakok nincsenek, d) $f(x) = x^5 + ix^4 + 2x^3 + 2ix^2 + x + i$.

18. a) $f(x) = (x-i)(x-2-i)(x-2+i)$, b) c) ilyen alakok nincsenek, mivel az egymásnak konjugált komplex zérushelyek nem ugyanannyiszoros zérushelyek, hisz i egyszeres zérushely, $-i$ nem zérushely, tehát a **T 10.4** miatt f együtthatói nem lehetnek mind valósak, d) $f(x) = x^3-(4+i)x^2+(5+4i)x-5i$.

19. Legyen $f(x) = (x^2-1)^n$. f-nek -1 és 1 is n-szeres zérushelye. Az f' függvénynek -1 és 1 is $(n-1)$-szeres zérushelye, és a Rolle-féle középértéktétel szerint van még egy zérushelye a $(-1,1)$ intervallumban. Az f'' függvénynek -1 és 1 is $(n-2)$-szeres zérushelye és megint csak a Rolle-féle középértéktétel szerint van még két zérushelye a $(-1,1)$ intervallumban, melyeket elválaszt egymástól f' egy zérushelye. A gondolatmenetet hasonlóképpen folytatva azt kapjuk, hogy az $f^{(n)}$ függvénynek a $(-1,1)$ intervallumban n zérushelye van, melyeket elválaszt egymástól az $f^{(n-1)}$ függvény $(n-1)$ zérushelye, azaz e zérushelyek különbözőek.

20. Írjuk f együtthatóit az első sorba. Vigyázzunk, x^5 és x^2 együtthatója 0.

	1	0	-1	2	0	1	-1
-2	1	-2	3	-4	8	-15	29

Tehát, $f(-2) = 29$.

21. A Horner-séma komplex számokkal is ugyanúgy működik:

	3	-4	$13+8i$	$1-2i$	0	4	0
$2i$	3	$-4+6i$	1	1	$2i$	0	0

Tehát, $f(2i) = 0$.

22. $f(-4) = -5079$. **23.** $f(1,39) = 10,80418$. **24.** $f(\cos 1) = 0,808$.

25. Írjuk fel a Horner-sémát a $c = 1$ értékkel.

	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5

tehát a hányados $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, a maradék 5, azaz $\frac{f(x)}{x-1} = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + \frac{5}{x-1}$.

26. $f(x)/g(x) = x^8 - x^7 + x^4 - x^3 + 1 - 1/(x+1)$.

27. $f(x)/g(x) = 3,11x^4 + 4,20x^3 + 13,96x^2 + 24,28x + 32,78 + 34,27/(x-1,35)$.

28. $f(x)/g(x) = 0,45x^2 + 1,02x + 0,56 - 0,20/(x - \operatorname{tg} 0,5)$.

29. $f(x)/g(x) = x^4 + ix^3 - x^2 + (2-i)x + 2i$, mivel a maradék 0.

30. $f(x)/g(x) = x^4 + (-1+i)x^3 + (3-i)x^2 - x + 2 + i + 1/(x+2+i)$.

31. $f(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e$ alakú előállítást kersünk. e éppen maradéka az $f(x)$ polinom $(x+1)$-gyel való maradékos osztásának, a hányados $(x+1)$-gyel való osztásának maradéka pedig d. Hasonlóan folytatva kapjuk a c, b, a értékeket. A maradékos osztásokat egyetlen táblázatban ábrázoltuk, a keresett együtthatókat vastag számokkal jelöltük.

	1	2	−3	−4	1
−1	1	1	−4	0	**1**
−1	1	0	−4	**4**	
−1	1	−1	**−3**		
−1	1	**−2**			
−1	**1**				

tehát $f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$.

32. $f(x) = (x+1)^4 - 3(x+1)^2$.

33. $f(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$. Ezt az eredményt a Horner-módszernél sokkal gyorsabban megkapjuk a binomiális tételből, ha kifejtjük az alábbi kifejezést: $x^5 = [(x-1)+1]^5$.

34. A **T 10.3** szerint a maradék $f(a)$, azaz $(p-3)a^4$. Ez pontosan akkor 0, ha $p = 3$ (és a tetszőleges), vagy $a = 0$ (és p tetszőleges).

35. Az egyenletet először egész együtthatóssá alakítjuk: $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$. Ennek racionális, nem egyszerüsíthető p/q alakú gyökei lehetnek azok, amelyekre $p| - 2$, tehát $p = \pm1, \pm2$, és $q|2$, tehát $q = \pm1, \pm2$. Ebből p/q lehetséges értékei: $\pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm2$. A Horner-módszerrel azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}$ és -1 az egyenlet gyökei. Osztva az $(x - \frac{1}{2})$ és az $(x+1)$ polinomokkal kapjuk, hogy

	2	1	3	2	−2
−1	2	−1	4	−2	0
$\frac{1}{2}$	2	0	4	0	

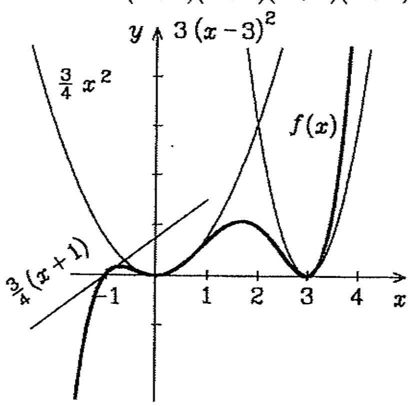
tehát $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = (x - \frac{1}{2})(x+1)(2x^2+4)$, azaz 2-vel való osztás után $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = (x - \frac{1}{2})(x+1)(x^2+2)$.

36. A racionális gyökök: $1, -\frac{1}{2}, -3$, a szorzatalak: $(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+3)$.

37. Az egyenletnek nincs racionális gyöke. (Egyébként a valós szorzatalak: $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = (x^2+x+1)(x^2-3)$.)

38. A racionális gyökök: $-1, -2, -3, -4$, a szorzatalak: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

39. A zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Az $f(x)$ grafikonját az $x_1 = 0$ helyen legalább másodrendben érinti az $f_1(x) = \frac{1}{12}x^2(0+1)(0-3)^2 = \frac{3}{4}x^2$ polinom grafikonja, az $x_2 = -1$ helyen legalább elsőrendben érinti az $f_2(x) = \frac{1}{12}(-1)^2(x+1)(-1-3)^2 = \frac{3}{4}(x+1)$ polinom grafikonja, és az $x_3 = 3$ helyen legalább másodrendben érinti az $f_3(x) = \frac{1}{12}(3)^2(3+1)(x-3)^2 = 3(x+3)^2$ polinom grafikonja.



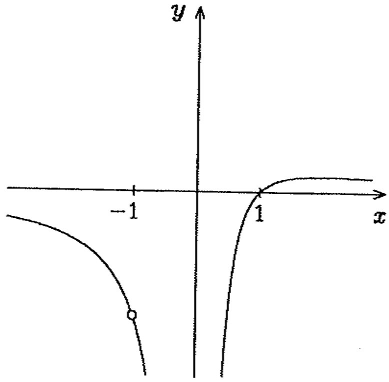
40. $x = 0: \ -\frac{4}{9}x$, $x = -2: \ 6(x+2)^2$, $x = 1: \ (x-1)^3$.

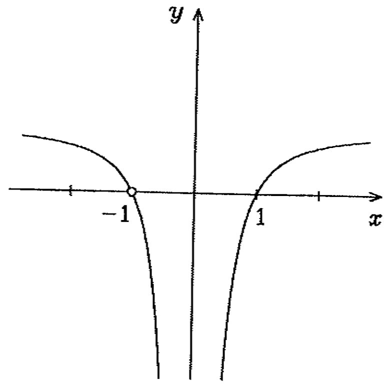
41. $x = 0: \ \frac{36}{25}x$, $x = -3: \ 3(x+3)^2$, $x = 2: \ 2(x-2)^2$.

42. $x=0: \frac{1}{2}x^2$, $x=2: 9(x-2)^2$, $x=-1: \frac{9}{16}(x+1)^2$, $x=-2: 4(x+2)$.

43. pólus: $x=0$, zérushely: $x=1$, $x=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=1$.

44. pólus: $x=0$, zérushely: $x=1$, hézagpont: $x=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1} r(x)=-2$.





45. pólus: $x=0$, zérushely: $x=1$, hézagpont: $x=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1} r(x)=0$.

46. pólus: $x=0$, $x=-1$, zérushely: $x=1$, $x=-2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=\pm\infty$.

47. Páros.
48. Páratlan.
49. Páratlan.
50. Páros.
51. Páratlan.
52. Páros.
53. Páratlan.
54. Páros.
55. Páratlan.

56. Egyik sem, $x^2-x=(x^2)+(-x)$.

57. Egyik sem, $(x+1)\sin x = x\sin x + \sin x$.

58. Egyik sem, $|x-1| = \frac{1}{2}(|x-1|+|x+1|) + \frac{1}{2}(|x-1|-|x+1|)$.

59. f_1 és f_2 páros függvények, így $f_1(-x)=f_1(x)$ és $f_2(-x)=f_2(x)$ ha $x\in H$, tehát $(f_1+f_2)(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=(f_1+f_2)(x)$, azaz f_1+f_2 páros.

60. Páratlan.
61. Egyik sem.
62. Páros.
63. Páros.
64. Páratlan.
65. Páros.
66. Páratlan.
67. Páratlan.
68. Páros.

69. Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint $[f(-x)]' = -f'(-x)$, és mivel $f(-x)=f(x)$, ezért $f'(x)=-f'(-x)$, tehát f' páratlan.

70. Páros.

71. $2\pi/3$.
72. $2\pi/a$.
73. $2\pi/a$.
74. π.
75. Nem periodikus.
76. 6π.

77. Legyen f és g periodikus p szerint. Ekkor $f(x+p)=f(x)$ és $g(x+p)=g(x)$, tehát $(f+g)(x+p)=f(x+p)+g(x+p)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$, azaz

$f+g$ is periodikus p szerint, ha nem konstans. A többi műveletre a bizonyítás hasonló.

78. Függvénytranszformációkkal az alábbi lépéseken át: $\sin x$, $\sin 2x$, $3\sin 2x$, $3\sin 2x+1$.

79. Az alábbi lépéseken át: $\sin x$, $\sin 2x$, $3\sin 2x$, $3\sin 2(x-\frac{\pi}{6})$, $3\sin 2(x-\frac{\pi}{6})-2$.

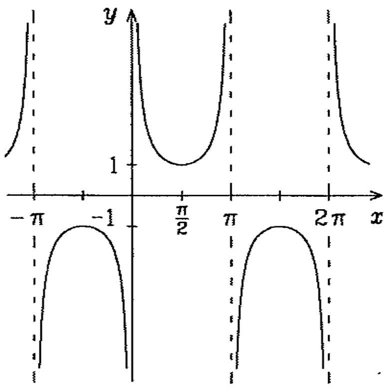
80. A cos függvény grafikonját k-szorosára zsugorítjuk az x-tengely mentén.

81. A sin függvény grafikonját k-szorosára nyújtjuk az x-tengely mentén.

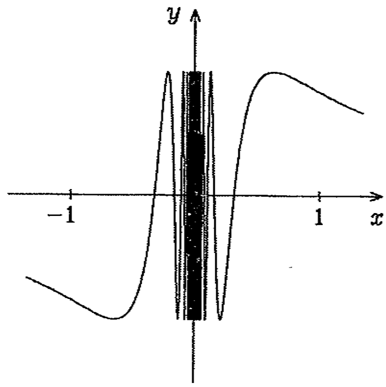
82. $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(x+\pi/2)$, $-2\operatorname{ctg}(x+\pi/2)$, vagy felhasználva, hogy $-2\operatorname{ctg}(x+\pi/2) = 2\operatorname{tg} x$.

83. $a\sin(bx+c) = a\sin b(x+c/b)$: b-szeres zsugorítás az x-tengely irányában, a-szoros nyújtás az y-tengely irányában, $-c/b$-vel való eltolás az x-tengely irányában.

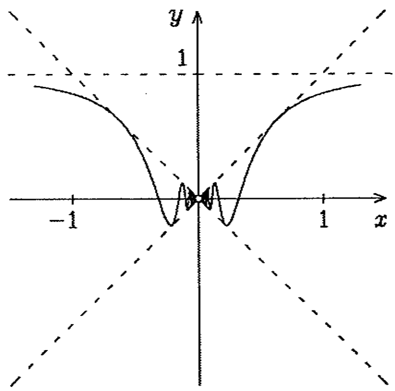
84.



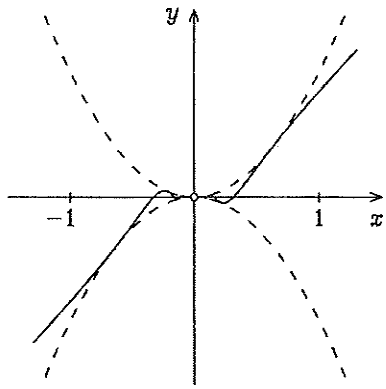
85.



86.



87.



91. $\cos x\sin x(1-2\sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x.$

92. $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\,(\sin x\cos(\pi/4)+\cos x\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\sin(x+\pi/4).$

93. $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{7}}\cos x\right) = \sqrt{7}\sin(x+\varphi)$, ahol $\cos\varphi = \sqrt{3}/\sqrt{7}$ és $\sin\varphi = 2/\sqrt{7}$.

94. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, ahol $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$ és $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$. Eszerint $a\sin x + b\cos x$ grafikonját a $\sin x$ grafikonjából egy y-tengely irányú $\sqrt{a^2+b^2}$-szeres nagyítással, és egy x-tengely irányú φ-vel való eltolással kaphatjuk meg.

95. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin x\cos\frac{\pi}{3} = \sin x$.

96. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4)+\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(\pi/4)-\operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

98. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}(\pi-(\alpha+\beta)) = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\frac{-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

99. $\frac{-2\sin\frac{1}{3x}}{3x^2\cos^3\frac{1}{3x}}$.

100. $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

101. $\frac{3\sin^2 x(\cos 2x\cos x + 2\sin 2x\sin x)}{\cos^4 2x}$.

102. $-2x\sin x^2\cos(\cos x^2)$.

103. $x\cos x^2/\sqrt{\sin x^2}$.

104. $-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}/\sin^2\frac{x}{3}$.

105. 1,82348.

106. 0,005.

107. $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, így $\operatorname{arcctg} 10 = 0,09967$.

108. $\pi/4$. **109.** $\pi/6$. **110.** $\pi/6$. **111.** $3\pi/4$.

112. $2\pi < 7 < 2\pi + \pi/2$, így $\arccos\cos 7 = 7 - 2\pi$.

113. $1,6-\pi$. **114.** $3\pi - 10$. **115.** $13 - 4\pi$. **116.** $4\pi - 13$.

117. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, $x \in (0,1)$,

118. $\frac{-2x}{2-2x^2+x^4}$, $x \in \mathbf{R}$,

119. $-\frac{1}{x^2}$, mivel $\operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{x}$.

120. $\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} 2/(1+x^2), & \text{ha } |x|<1 \\ -2/(1+x^2), & \text{ha } |x|>1 \end{cases}$. Az $|x| = 1$ helyeken a függvény nem differenciálható.

121. $-\frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} -1, & \text{ha } 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ (k\in\mathbf{Z}) \\ 1, & \text{ha } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi,\ (k\in\mathbf{Z}) \end{cases}$. Az $x = k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$ helyeken a függvény nem differenciálható, bár folytonos.

122. $\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,0)\cup(0,1)$.

123. A függvények értelmezési tartományának közös része $(0,1)$, és itt mindegyikük differenciálható. Mivel mindegyikük deriváltja $1/\sqrt{x-x^2}$, ezért a **T**

9.18 tétel szerint a függvények csak egy konstansban különböznek. A konstansok meghatározhatók, ha egyetlen x_0 értéket behelyettesítünk mindegyik függvénybe. Például az $x_0 = 0$ értéket behelyettesítve, illetve amelyik függvény nincs értelmezve 0-ban, ott a függvény 0-beli határértékét tekintve azt kapjuk, hogy: $\arcsin(2x-1) + \frac{\pi}{2} = 2\arcsin\sqrt{x} = -2\arcsin\sqrt{1-x} + \pi = 2\arccos\sqrt{1-x} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = -2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \pi = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \pi = -4\,\mathrm{arctg}\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} + 2\pi$.

124. (1. megoldás) A $\mathrm{tg}\arcsin x = (\sin\arcsin x)/(\cos\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$, és az $\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \approx 1{,}5707963$ képletekből adódik helyességük .
(2. megoldás) Az első képlet esetében mindkét oldal deriváltja $1/\sqrt{1-x^2}$, ezért a **T 9.18** tétel szerint a két oldal különbsége konstans, tehát $\arcsin x = \mathrm{arctg}(x/\sqrt{1-x^2}) + c$, de $\arcsin 0 = \mathrm{arctg}(0/\sqrt{1-0})$, így $c = 0$.

125. A második ábrán jelölje α az x-szel szemközti szöget. Ekkor $\sin\alpha = x$, azaz $\arcsin x = \alpha$, másrészt $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, azaz $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$. Felhasználva a $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ összefüggést kapjuk, hogy $\cos\arcsin x = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Itt azonban mindig a pozitív előjel érvényes, mivel a cos függvény az arcsin értékkészletén mindig pozitív. A sin arccos függvényre vonatkozó összefüggés hasonlóan bizonyítható.

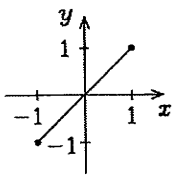
126. $\mathrm{tg}\,\mathrm{arcctg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\mathrm{arcctg}\, x} = \dfrac{1}{x}$. Az első ábráról leolvasható.

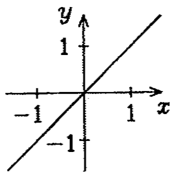
127. $\mathrm{tg}\arccos x = \dfrac{\sin\arccos x}{\cos\arccos x} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. A harmadik ábráról leolvasható.

128. Az előző feladat megoldásához hasonlóan. Lásd még a **124.** feladatot.

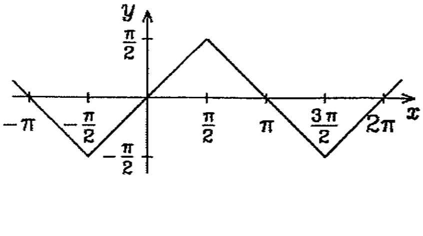
131. Ha $\arcsin\sin x = y$, akkor $\sin x = \sin y$, ahol $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ennek megoldásai:
$y = x + 2k\pi$, ha valamely egész k-ra $2k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, vagy
$y = \pi - x + 2k\pi$, ha valamely egész k-ra $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$.

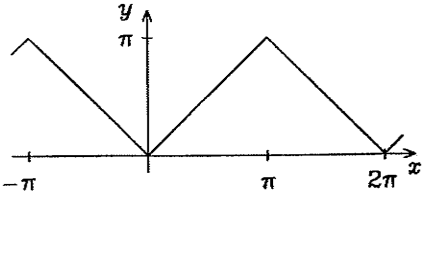
135. $\sin\arcsin : [-1,1] \to [-1,1]; x \mapsto x$,
$\cos\arccos : [-1,1] \to [-1,1]; x \mapsto x$,
$\mathrm{tg}\,\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x$,
$\mathrm{ctg}\,\mathrm{arcctg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x$,



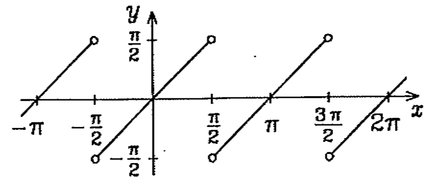


$\arcsin\sin : \mathbf{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\quad\arccos\cos : \mathbf{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

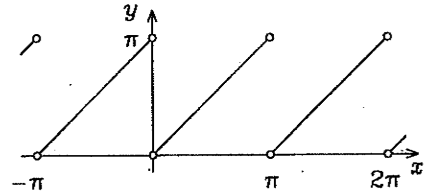




$\operatorname{arctg}\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,



$\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\} \to (0, \pi)$.



136. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ felhasználásával: $1 - 2\sin^2(\arcsin(-\frac{2}{3})) = 1 - 2(-\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

137. $3/4$. **138.** $56/65$.

139. $(\cos\arccos\frac{3}{5})(\cos\arcsin\frac{12}{13}) - (\sin\arccos\frac{3}{5})(\sin\arcsin\frac{12}{13}) = -33/65$.

140. Vegyük mindkét oldal szinuszát: $x = \sqrt{1 - x^2}$, amiből $x = 1/\sqrt{2}$.

141. Vegyük mindkét oldal tangensét: $\sqrt{1 - x^2}/x = x$, amiből $x = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$.

142. Vegyük mindkét oldal koszinuszát: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ miatt kapjuk, hogy $1 - 2\sin^2\arcsin x = \cos\arccos 2x$, azaz $1 - 2x^2 = 2x$, amiből $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. A negatív gyök hamis, mivel abszolút értéke 1-nél nagyobb, így a megoldás: $x = (\sqrt{3} - 1)/2$.

143. Vegyük mindkét oldal tangensét: $\frac{(x-1)-(x-2)}{1+(x-1)(x-2)} = 1$, amiből $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

144. Vegyük mindkét oldal szinuszát. A megoldás $x = 1/2$.

145. A $t = \arcsin ax$ helyettesítéssel, amikor is $x = \frac{1}{a}\sin t$, kapjuk hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{at}{\sin t} = a.$$

146. 1. ($t = \operatorname{arctg} x$ helyettesítéssel, az előző megoldáshoz hasonlóan.)

147. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin ax}{x}\Big/\dfrac{\arcsin bx}{x} = a/b$.

148. Az előző feladatok gondolatmenetét és eredményeit felhasználva: a/b.

149. $\operatorname{sgn} a \operatorname{sgn} b$, $b \neq 0$.

150. Nem létezik, mivel a jobboldali határérérték $\pi/2$, a baloldali $-\pi/2$.

151. A feladatbeli feltétel fennállása esetén az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a bal és a jobb oldalán álló kifejezés tangense is egyenlő. Azok pedig egyenlőek:
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg}\operatorname{arctg} y}{1 - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{tg}\operatorname{arctg} y} = \frac{x + y}{1 - xy} = \operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}.$$

152. $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$, tehát az előző feladatbeli feltétel fennáll, így az ottani képlet alkalmazható:
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

153. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

154. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$, $\operatorname{arctg}\frac{8}{15} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{47}{52}$.

155. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{120}{119}$.

156. Az egyenlőség ekvivalens a következővel: $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5}$. Ennek mindkét oldala 0 és $\pi/2$ közé esik (a bal oldal például azért, mert $\arcsin x < \frac{\pi}{2}x$, ha $x < 0$, és így $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} < \frac{\pi}{2}(\frac{5}{13} + \frac{16}{65}) < \frac{\pi}{2}$), így ekvivalens átalakítás az, ha mindkét oldal koszinuszát vesszük. Egyrészt $\cos(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}) = \frac{4}{5}$, másrészt $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5}) = \sin\arcsin\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$, vagyis a két oldal koszinusza egyenlő, tehát a két oldal is.

157. Mindkét oldal deriváltja $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, ezért a két oldal legfeljebb egy additív konstansban térhet el egymástól. A két oldal $x = 0$ helyen vett helyettesítési értéke megegyezik, így e konstans 0, vagyis a két oldal valóban megegyezik.

158. 1. megoldás. A **151.** feladat eredményét felhasználva kapjuk, hogy
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} = \operatorname{arctg}\frac{1/x - 1/(x+1)}{1 + 1/(x^2+x)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1}.$$
2. megoldás. Az előző feladat megoldásához hasonlóan: mindkét oldal deriváltja $-(2x+1)/(x^4+2x^3+3x^2+2x+2)$.

159. Az ábráról leolvasható, hogy az egy csúcsban összefutó három szög nagysága rendre $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg} 3$, összegük pedig π.

160. a) 3,5; b) 5; c) 3; d) 2; e) 1/9; f) 3; g) 27.

161. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{9}{5}$; e) -2; f) -2; g) 5; h) $-\frac{2}{3}$; i) $\frac{1}{\pi}$.

162. $\operatorname{Dom} f = (0,1)\cup(1,\infty)$, $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$.

163. $\operatorname{Dom} f = (0,1)\cup(1,\infty)$, $\operatorname{Ran} f = \{1\}$.

164. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}\setminus\{\emptyset\}$, $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$.

165. $\operatorname{Dom} f = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty,0]$.

166. $\operatorname{Dom} f = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty,0]$.

167. $\operatorname{Dom} f = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(k\pi,(k+\frac{1}{2})\pi\right)$, $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$.

168. $\operatorname{Dom} f = (0,1]$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty, \ln\frac{\pi}{2}]$.

169. $\operatorname{Dom} f = [-1,1)$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty,\ln\pi]$.

170. $\operatorname{Dom} f = [\frac{1}{e}, e]$, $\operatorname{Ran} f = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

171. Az $x = \log_a b$, $y = \log_c b$, $z = \log_c a$ jelöléseket használva, a logaritmus definíciója alapján: $a^x = b$, $c^y = b$, $c^z = a$. Az utóbbi kettőt az előzőbe helyettesítve kapjuk, hogy $c^{xz} = c^y$, amiből $x = \frac{y}{z}$, és ez x, y, z értékének visszahelyettesítése után a feladatbeli összefüggést adja. E formula egy másik könnyen megjegyezhető alakja: $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$.

172. 1. megoldás. Az előző feladatból $c = b$ helyettesítéssel.
2. megoldás. Az $x = \log_a b$ jelöléssel, a logaritmus definíciója alapján $a^x = b$. Ebből, mindkét oldal b alapú logaritmusát véve, a logaritmus ismert azonosságai alapján $x \log_b a = 1$. Ez x értékének visszahelyettesítése után a feladatbeli összefüggést adja. E formula egy másik könnyen megjegyezhető alakja: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

173. 10-es alapú logaritmusra áttérve:
$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} a_1 = \frac{\lg a_1}{\lg a_2}\frac{\lg a_2}{\lg a_3}\cdots\frac{\lg a_n}{\lg a_1} = 1.$$

174. 1. megoldás. $\log_{a^n} b = \dfrac{\lg b}{\lg a^n} = \dfrac{\lg b}{n \lg a} = \dfrac{1}{n}\log_a b.$
2. megoldás. Az $x = \log_{a^n} b$ jelöléssel $a^{nx} = b$, amiből $\log_a b = nx$.

175. $\log_{a^n} b^n = \dfrac{\lg b^n}{\lg a^n} = \dfrac{n \lg b}{n \lg a} = \log_a b.$

176. $-\log_{1/a} b = \dfrac{\lg b}{-\lg(1/a)} = \dfrac{\lg b}{\lg a} = \log_a b.$

177. $$\log_{ab} c = \frac{1}{\log_c ab} = \frac{1}{\log_c a + \log_c b} = \frac{1}{1/\log_a c + 1/\log_b c} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a c/\log_b c} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a b}.$$

178. Az előzőhöz hasonlóan.

179. $$\log_{a_1 \ldots a_n} c = \frac{1}{\log_c a_1 \ldots a_n} = \frac{1}{\log_c a_1 + \cdots + \log_c a_n} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} c} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} c}}.$$

180. $0,6931$; $0,3010$; $2,3026$; $0,4343$; $1,1447$.

181. $1,5850$; $0,6309$; $0,8736$; $3,3219$; $0,8097$.

182. 2, 1, 1 (l. **177–179**).

183. 1/2, 2, 1 (l. **173, 175**).

184. $\lg 8 = \lg 2^3 = 3\lg 2 \approx 0,903$; $\lg 5 = \lg 10/2 = 1 - \lg 2 \approx 0,699$; $\lg 72/100 = \lg 18/25 = 2\lg 3 + \lg 2 - 2(1 - \lg 2) = 2\lg 3 + 3\lg 2 - 2 \approx -0,1427$; $\lg \sqrt[7]{7,5} = \frac{1}{7}(1 + \lg 3 - 2\lg 2) \approx 0,125$.

185. Az első esetben az $\ln \frac{x}{k}$ grafikonját, a másodikban az $\ln x + c$ grafikonját kapjuk. Azonban $\ln \frac{x}{k} = \ln x - \ln k$, így $c = -\ln k$ esetén a két függvény, s így a két grafikon is egybeesik.

186. $\log_2 x = \ln x/\ln 2$, tehát y irányú $1/\ln 2$-szörös nyújtással.

187. $\log_3 \dfrac{x^{3/2}}{9} = \dfrac{3}{2\ln 3}\ln x - 2$, tehát egy y irányú $\dfrac{3}{2\ln 3}$-szeresre való nyújtással és egy y irányú -2-vel való eltolással.

188. $\ln \sqrt[3]{1-x} = \frac{1}{3}\ln(1-x)$, tehát egy y tengelyre való tükrözéssel, egy x irányban 1-gyel való eltolással és egy y irányú harmadára való zsugorítással.

189. $(x+2)^2 = 3x^2 + 14x + 13$, így $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, ez utóbbi hamis gyök.

190. $2\ln|x| + 8\ln|x| = 10$, amiből $|x| = e$, azaz $x_1 = e$, $x_2 = -e$.

191. $\log_{32} 2x = \frac{1}{5}\log_2 2x = \frac{1}{5}(1+\log_2 x)$, $\log_8 4x = \frac{1}{3}\log_2 4x = \frac{1}{3}(2+\log_2 x)$ behelyettesítése után $\log_2 x = 4$, azaz $x = 16$.

192. $\dfrac{\log_2 8}{\log_2 x} - \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4x} = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 2x}$, amiből $\dfrac{3}{\log_2 x} - \dfrac{6}{2+\log_2 x} = \dfrac{2}{1+\log_2 x}$, így $\log_2 x = 1$ ill. $\log_2 x = -6/5$, azaz $x_1 = 2$, $x_2 = 1/\sqrt[5]{64}$.

193. $\dfrac{5}{5x+1}$. **194.** $\dfrac{1}{x}\lg e$. **195.** $-\dfrac{1}{x}$. **196.** $\dfrac{-4\ln(1-2x)}{1-2x}$.

197. $\operatorname{ctg} x$. **198.** $-\operatorname{tg} x \cdot \lg e$. **199.** $\frac{2x\log_3 e}{x^2-1}$. **200.** $-\frac{\log_5 e}{x\log_5^2 x}$.

201. $x^{n-1}(n\ln x + 1)$.

202. $(\ln x)' = x^{-1}$, $(\ln x)'' = -x^{-2}$, $(\ln x)''' = 2x^{-3}, \ldots, (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

203. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $y'' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $-\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1$.

204. $y' = \frac{1}{x}(c_1\cos\ln x - c_2\sin\ln x)$, $y'' = \frac{1}{x^2}((c_2-c_1)\sin\ln x - (c_1+c_2)\cos\ln x)$.

205. A Lagrange-féle középértéktételt használjuk az ln függvényre: $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)'|_{x=c} = \frac{1}{c}$, ahol $a < c < b$. Így $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, és ezt akartuk bizonyítani.

206. Az $f(x) = 2(\sqrt{x}-1) - \ln x$ függvény deriváltja $f'(x) = 1/\sqrt{x} - 1/x$, ami $x > 1$ esetén pozitív, így f szigorúan monoton nő, másrészt $f(1) = 0$, tehát $f(x) > 0$, ha $x > 1$.

207. A prímszámtétel szerint $\pi(x)$ közelítőleg $\dfrac{x}{\ln x}$, ha x 'elég nagy'. Így $\pi(10^7) \approx \frac{10^7}{\ln 10^7} \approx 620421$. (Valójában $\pi(10^7) = 664579$.)

208. A kisszekundnak megfelelő hányadost jelölje k. Egy oktáv 12 kisszekund, így $k^{12} = 2$, azaz $k = \sqrt[12]{2}$. n kisszekundnak a $2^{n/12}$ hányados felel meg. Mivel $\frac{x}{y} = 2^{n/12}$, ezért az x és y közti hangköz $n = 12\log_2\frac{x}{y}$ kisszekundból áll.

209. $\left(\ln\dfrac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}\right)' = \left(\ln(x^2+2) + \dfrac{1}{2}\ln(x+9) - \ln(x-1)\right)' =$
$\dfrac{2x}{x^2+2} + \dfrac{1}{2x+18} - \dfrac{1}{x-1}$, így az $f' = f(\ln f)'$ képletet használva:
$$\left(\frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}\right)' = \frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{2x+18} - \frac{1}{x-1}\right).$$
A fenti megoldás csak $x > 1$ esetén érvényes, mivel csak ekkor vehetjük mindegyik tényező logaritmusát. Előjelcserével (az $x-1$ helyébe $1-x$-et írva) az $x < 1$ esetben is használható a módszer, de a $-(-f)' = f'$ összefüggés miatt ugyanezt az eredményt kapjuk.

210. $(x+1)(x+2)(x+3)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) = 3x^2 + 12x + 11$.

211. $2(2x+1)(x^2+1)x^{4/5}\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{5x}\right) = \frac{2}{5}x^{-1/5}(19x^3 + 7x^2 + 9x + 2)$.

212. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{x^2+2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

213. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2+2}\right)$.

214. $\frac{\sqrt{x+11}}{(x-7)\sqrt[3]{2x+1}}\left(\frac{1}{2x+22}-\frac{1}{x-7}-\frac{1}{6x+3}\right)$.

215. $\left(\ln(1+x)^{1-x}\right)' = ((1-x)\ln(1+x))' = -\ln(1+x)+\frac{1-x}{1+x}$, így $\left((1+x)^{1-x}\right)' = \left((1+x)^{1-x}\right)\left[\frac{1-x}{1+x}-\ln(1+x)\right]$.

216. $(1-3x)^{\ln x}(\ln(1-3x)/x - 3\ln x/(1-3x))$.

217. $\sqrt[x]{3x^2-6x+7}\left[-\frac{\ln(3x^2-6x+7)}{x^2}+\frac{6x-6}{x(3x^2-6x+7)}\right]$.

218. $2^x = e^{x\ln 2}$, tehát x-tengely irányú $\ln 2$-szeres zsugorítással.

219. $5^{x+1} = e^{(x+1)\ln 5}$, tehát x-tengely irányú $\ln 5$-szörös zsugorítással, majd egy x irányú -1-gyel való eltolással, vagy az $5^{x+1} = 5e^{x\ln 5}$ átalakítás alapján egy x-tengely irányú $\ln 5$-szörös zsugorítással, majd egy y irányú 5-szörös nyújtással.

220. $(3^{x/2-1})^3 = \exp\frac{3}{2}(x-2)\ln 3$, tehát x-tengely irányú $\frac{3}{2}\ln 3$-szoros zsugorítással, majd egy x irányú 2-vel való eltolással, vagy az $(3^{x/2-1})^3 = \frac{1}{27}\exp\frac{3}{2}x\ln 3$ átalakítás alapján egy x-tengely irányú $\frac{3}{2}\ln 3$-szoros zsugorítással, majd egy y irányú 27-edére való zsugorítással.

221. Azokra az x racionális számokra, melyek egyszerüsített p/q alakjában (azaz, ahol p és q relatív prímek) q páratlan.

222. Azok, amelyekre
- a) $g(x_0) = h(x_0)$ és az $f(x_0)^{g(x_0)}$ hatvány értelmezve van, vagy
- b) $f(x_0) = 1$ és $g(x_0)$, $h(x_0)$ értelmezve vannak, vagy
- c) $f(x_0) = 0$, $g(x_0) > 0$, $h(x_0) > 0$, vagy
- d) $f(x_0) = -1$, és a $(-1)^{g(x_0)}$, $(-1)^{h(x_0)}$ hatványok értelmezve vannak, és egyenlőek.

223. Vagy $x-3 = 5-3x$, azaz $x = 2$, vagy $2x+1 = 1$, azaz $x = 0$, vagy $2x+1 = -1$, azaz $x = -1$. A $2x+1 = 0$ eset nem vezet megoldáshoz, mert a bal oldali hatványnak az $x = -1/2$ helyen nincs értelme.

224. Vagy $9/x = x$, amiből megoldásként $x = 3$ és $x = -3$ adódik, vagy $x-3 = 1$, azaz $x = 4$, vagy $x-3 = 0$, azaz $x = 3$. A $x-3 = -1$ eset nem vezet megoldáshoz, mert a bal oldali hatványnak az $x = 2$ helyen nincs értelme.

225. Az $(x+1)^{2x+1} = ((x+1)^2)^{x+1/2}$ átalakítás után a megoldások: $x = -1/2$ és $x = 0$.

226. $\pi x^{\pi-1}$. **227.** $\pi^x \ln\pi$. **228.** $2^x\ln 2$. **229.** $-2^{-x}\ln 2$.

230. $(2^{\operatorname{tg} x}\ln 2)/\cos^2 x$. **231.** $(-5^{1/x}x^{-2} - 5^{-x})\ln 5$.

232. $\frac{1}{2}x^{-1/2}\exp\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\exp x)^{-1/2}\exp x = (\exp\sqrt{x} + \sqrt{x\exp x})/(2\sqrt{x})$.

233. $\frac{d}{dx}(e^{xy}-y) = \frac{d}{dx}(3)$, $e^{xy}(x\frac{dy}{dx}+y) - \frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx}(1-xe^{xy}) = ye^{xy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}} = \frac{y(3+y)}{1-x(3+y)}$, mivel $e^{xy} = 3+y$.

234. $e^{y\ln x}(y'\ln x + \frac{y}{x}) + \frac{y'}{y} = 0, \quad y' = \frac{-e^{y\ln x}y/x}{e^{y\ln x}\ln x + 1/y} = \frac{y\ln y}{x/y - x\ln x\ln y}$, mivel $e^{y\ln x} = -\ln y$.

235. $((x\ln x)^x)' = \left(e^{x\ln(x\ln x)}\right)' = (x\ln x)^x(\ln(x\ln x) + 1 + 1/\ln x)$.

236. $x^{\sin x}(\cos x\ln x + \frac{1}{x}\sin x)$.

237. $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$.

238. $2x^{\sqrt{3x}}\sqrt{\frac{3}{x}}(\frac{\ln x}{2} + 1)$.

239. $(1-x)^{x^2}(2x\ln(1-x) - \frac{x^2}{1-x})$.

240. $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}((\ln\sin x)/(\cos^2 x) + 1)$.

241. $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}(g'(x)\ln f(x) + g(x)f'(x)/f(x)) = f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

242. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 0$ esetén az állítás igaz. Ha n-re igaz, akkor a képlet mindkét oldalát differenciálva azt kapjuk, hogy $(xe^x)^{(n+1)} = [(x+n)e^x]' = (x+n+1)e^x$, azaz az összefüggés igaz.

243. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az áttekinthetőség kedvéért a továbbiakban $H_n(x)$ helyett csak H_n-et írunk. $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, $(e^{-x^2})'' = (4x^2-2)e^{-x^2}$, azaz $H_0 = 1$, $H_1 = -2x$, $H_2 = 4x^2-2$, és ezek kielégítik a $H_2 + 2xH_1 + 2H_0 = 0$ egyenletet. Az $(e^{-x^2})^{(n)}$ függvényt differenciálva kapjuk, hogy $((e^{-x^2})^{(n)})' = e^{-x^2}H_n' - 2xe^{-x^2}H_n$; másrészt $(e^{-x^2})^{(n+1)} = e^{-x^2}H_{n+1}$, amiből $H_n' = H_{n+1} + 2xH_n$. Tegyük fel, hogy valamely n értékre igaz a feladatbeli összefüggés. Differenciálva, majd behelyettesítve, $H_{n+1}' + 2xH_n' + 2H_n + 2nH_{n-1}' = H_{n+2} + 2xH_{n+1} + (2n+2)H_n + 2x(H_{n+1} + 2xH_n + 2nH_{n-1}) = 0$, azaz $H_{n+2} + 2xH_{n+1} + (2n+2)H_n = 0$, vagyis az összefüggés $(n+1)$-re is igaz.

244. Mivel az exp függvény monoton növő, ezért ha Θ_n helyébe 0-t írunk, akkor alsó, ha 1-et, akkor felső becslést kapunk $n!$-ra. Eszerint az $R = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ jelölést használva $R < n! < R\exp\frac{1}{12n}$.

245. A becslés: $475687486 < 12! < 479002369$, a pontos érték: $12! = 479001600$; illetve a becslés: $8,3094383\cdot 10^{81} < 60! < 8,3209872\cdot 10^{81}$, a pontos érték tíz értékes jeggyel: $60! \approx 8,320987112\cdot 10^{81}$.

246. $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!} = \sqrt{2}(\dfrac{2n}{e})^n\exp\dfrac{\Theta_{2n} - 2\Theta_n}{24n}$, ahonnan
$\sqrt{2}(\frac{2n}{e})^n\exp\frac{-1}{12n} < 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99 < \sqrt{2}(\frac{2n}{e})^n\exp\frac{1}{24n}$.
$n = 50$ esetén: $2,72312\cdot 10^{78} < 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99 < 2,729938\cdot 10^{78}$.

247. $e^{m(x+y)} = e^{mx}e^{my}$ miatt nyilvánvaló. Megmutatható, hogy az egész számegyenesen folytonos függvények között más megoldása e függvényegyenletnek nincs.

248. $f'(x) = \dfrac{4\exp(2x)}{(\exp(2x)+1)^2} = 1 - \left(\dfrac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}\right)^2$.

249. $y' = c_1ae^{ax} + c_2be^{bx}$, $y'' = c_1a^2e^{ax} + c_2b^2e^{bx}$ behelyettesítésével adódik.

250. Ha $f(x) = ce^{kx}$, akkor $f'(x) = cke^{kx}$ és ezek kielégítik az egyenletet. Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy megoldása az egyenletnek, és legyen $g(x) = f(x)e^{-kx}$. Ekkor $g'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}$. De, mivel $f(x)$ kielégíti az egyenletet, tehát

$f'(x) = kf(x)$, ezért minden x-re $g'(x) = 0$. Emiatt minden x-re $g(x) = c$ (c konstans), így $f(x) = g(x)e^{kx} = ce^{kx}$.

251. a) $10000 \cdot 1,15 = 11500$; b) $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{12})^{12} \approx 11607,55$;
c) $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{365})^{365} \approx 11617,98$;
d) $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{n})^{n} \to 10000e^{0,15} \approx 11618,34$.

252. a) $A(1+\frac{K}{100})^{E}$; b) $A(1+\frac{K}{12\cdot 100})^{12E}$; c) $A(1+\frac{K}{365\cdot 100})^{365E}$; d) $A(1+\frac{K}{n\cdot 100})^{nE} \to Ae^{KE/100}$. A folyamatos kamatozást leíró utóbbi képletet megérthetjük abból, hogy az $f(E) = Ae^{KE/100}$ függvény kielégíti az $f'(E) = \frac{K}{100}f(E)$ egyenletet és az $f(0) = A$ feltételt. Ez ugyanis azt jelenti, hogy ha $f(E)$ jelöli a pénz mennyiségét az E időpillanatban, akkor a növekmény pillanatnyi mértéke mindig a pillanatnyi pénzösszeg K%-ával egyenlő, az $f(0) = A$ feltétel pedig azt jelenti, hogy a kezdő pénzösszeg A.

253. Ha csak kamatot számítunk, akkor persze s%-kal növekszik a pénzösszeg. A pénz mennyisége t idő elteltével legyen $f(t)$, induláskor $f(0) = c$. Mivel a pénzmennyiség változásának sebessége a folyamatosan számított kamatok miatt mindig arányos a pénz pillanatnyi mennyiségével, azaz $f'(t) = kf(t)$, ezért $f(t) = ce^{kt}$; a k értéke $\frac{s}{100}$, hisz $f'(t_0)$ azt jelenti, mennyivel növekedne a pénzmennyiség egy év alatt, ha a növekedés sebessége megőrizné pillanatnyi értékét, ebből pedig $f'(t_0) = cke^{kt_0} = \frac{s}{100}ce^{kt_0}$, azaz $\frac{s}{100}$. Egy év elteltével a pénzmennyiség $f(1)$, a növekedés százalékban kifejezve
$100(f(1) - f(0))/f(0) = 100(e^{s/100} - 1)$.

254. Legyen $m(t)$ a radioaktív anyag tömege a t időpillanatban. A tömeg változásának sebessége $\frac{dm(t)}{dt}$, ami bomláskor negatív. Mivel a sebesség arányos a tömeggel, ezért $m(t)$ kielégíti az $m'(t) = km(t)$ egyenletet. Ennek összes megoldása $m(t) = ce^{kt}$ alakú. Legyen $m(0) = m_0$ az anyag kiindulási tömege. Az előző egyenletből $m_0 = ce^{k0}$, azaz $c = m_0$, $m(t) = m_0e^{kt}$. Az az idő, amely alatt $m(t)$ a felére csökken, kielégíti az $m(t) = m_0e^{kt} = m_0/2$ egyenletet. Ebből $t = -\ln 2/k$, ami valóban független m_0-tól.

255. A megfigyelés kezdetétől számított t év múlva a szén tömege $m(t) = 3e^{kt}$ gramm. Az előző feladat alapján: $3e^{5730k} = 3/2$, azaz $k = -\ln 2/5730$. Így 1000 év elteltével a tömeg $m(1000) = 3e^{-1000\cdot\ln 2/5730} \approx 2,658$. Tehát 2,658 gramm marad a szénből.

256. $k = -\ln 2/5730$, t idő elteltével a szénizotóp mennyisége $m_0e^{kt} = 0,4m_0$, amiből $t = -5730 \cdot \ln 0,4/\ln 2 \approx 7574,65$, tehát kb. 7575 éve halt meg a haj viselője.

257. Legyen $f(t)$ a lakosok száma, ekkor $f'(t)$ a lélekszám változásának sebessége. A feltételekből adódóan $f'(t) = kf(t)$, amiből $f(t) = ce^{kt}$, ahol $c = f(0)$ a falu lélekszáma a megfigyelés kezdetén, k pedig meghatározható abból a feltételből, hogy egy év alatt a lakosság 2%-kal növekszik, azaz $f(1) = ce^{k} = 1,02c$, tehát $k = \ln 1,02 \approx 0,0198$. Ha a lakosság a t_0 időpillanatra megduplázódik, akkor $f(t_0) = 2f(0)$, amiből a megduplázódási idő $t_0 = \ln 2/\ln 1,02 \approx 35$ év. 30 hónap, azaz 2,5 év eltelte után a lélekszám $f(2,5) = 1000e^{2,5k} \approx 1051$. (Az f függvény értékét egész t helyeken könnyen meghatározhatjuk, hisz ha egy év alatt a lélekszám $1,02$-szorosára nő, akkor t év alatt $1,02^t$-szeresére, azaz $f(t) = c1,02^t = ce^{t\ln 1,02}$. Nem magától értetődő azonban a nem egész t esete.)

258. 1,1752; -1,1752; $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 = e$ (miért?); 0,7616; 1,3130.

259. $\frac{2-1/2}{2} = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; 4, e^5.

264. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = 1$.
$\operatorname{th}^2 x + 1/\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x/\operatorname{ch}^2 x + 1/\operatorname{ch}^2 x = (\operatorname{sh}^2 x + 1)/\operatorname{ch}^2 x = 1$.

265. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$, amiből $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$.

266. $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, $e^{-x} = \operatorname{ch} x + (-\operatorname{sh} x)$.

267. $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^v = (e^x)^v = e^{vx} = \operatorname{sh} vx + \operatorname{ch} vx$.

268. $\operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$.
E képletek megkaphatók a $\operatorname{th}^2 x = \operatorname{sh}^2 x/\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x/(1 + \operatorname{sh}^2 x)$, illetve a $\operatorname{th}^2 x = (\operatorname{ch}^2 x - 1)/\operatorname{ch}^2 x$ összefüggésekből egyszerű átrendezéssel, vagy az alábbi módon:
$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{1} = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}.$$

269. $\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 2\frac{x}{2} = 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \dfrac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{1} = \dfrac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$. Hasonlóképpen $\operatorname{ch} x = \dfrac{1 + \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$.

270. $(6x + 1)\operatorname{sh}(3x^2 - x + 1)$.

271. $(\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x})' = (\operatorname{ch} 4x)' = 4\operatorname{sh} 4x$.

272. $3e^{3x}\operatorname{ch}(e^{3x})$.

273. e^{2x}.

274. $-\sin x \operatorname{ch}(\cos x)$.

275. $5\operatorname{sh} 3x \operatorname{sh} 5x + 3\operatorname{ch} 3x \operatorname{ch} 5x$.

276. $y'(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $y''(x) = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek kielégítik az egyenletet.

277. $\frac{dv}{dt} = g\operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{gk/m}t)$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy v kielégíti az egyenletet. $\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{mg/k}$.

278. Az inverz függvény definiciójából (**D 9.20**) azonnal adódik.

279. $\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{arsh} x} = \sqrt{1 + x^2}$, a többi hasonlóan bizonyítható.

280. $\operatorname{th}\operatorname{arsh} x = \operatorname{sh}\operatorname{arsh} x/\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x = \operatorname{sh}\operatorname{arsh} x/\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\operatorname{arsh} x} = x/\sqrt{1 + x^2}$, $\operatorname{sh}\operatorname{arth} x = \operatorname{th}\operatorname{arth} x/\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\operatorname{arth} x} = x/\sqrt{1 - x^2}$. A többi hasonlóan bizonyítható.

281. (1. megoldás) Mivel az sh és ch függvények grafikonjai nem metszik egymást, hisz $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$, ezért inverzeik grafikonjai sem fogják: $\operatorname{arsh} x > \operatorname{arch} x$.
(2. megoldás) Véve mindkét oldal sh-át $x = \operatorname{sh}\operatorname{arch} x$, ebből $x = \sqrt{x^2 - 1}$, ami lehetetlen.

282. Véve mindkét oldal sh-át $x = \operatorname{sh}\operatorname{arth} x$, ebből $x = x/\sqrt{1-x^2}$, aminek $x = 0$ az egyetlen gyöke. Az $x = 0$ az eredeti egyenletet is kielégíti.

283. $x = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} a + \operatorname{arsh} b) = \operatorname{sh}\operatorname{arsh} a \operatorname{ch}\operatorname{arsh} b + \operatorname{ch}\operatorname{arsh} a \operatorname{sh}\operatorname{arsh} b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$.

284. Ha $a < 1$ vagy $b < 1$, akkor az egyenlet jobb oldala nincs értelmezve Ha $a \geq 1$ és $b \geq 1$, akkor $x = ab + \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}$; ez gyöke az egyenletnek, mert $ab \geq 1$, így $x \geq 1$.

285. Ha $|a|, |b| < 1$: $x = (a+b)/(1+ab)$, $(x \in \operatorname{Dom}\operatorname{arth})$.

286. Ha $|a| < 1$ és $b > 1$: $x = (ab + \sqrt{1+b^2})/\sqrt{1-a^2}$.

287. $3x^2/\sqrt{1+x^6}$.

288. $(1-x^2)^{-1}$.

289. $3\cos 3x/\sqrt{\sin^2 3x + 1}$.

290. $6\operatorname{arth} 3x/(1-9x^2)$.

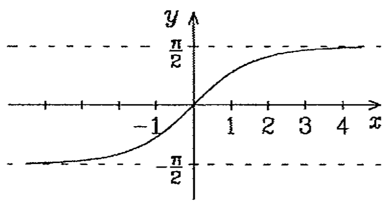
291. A **T 10.22** miatt $\exp\operatorname{arch} x = x + \sqrt{x^2-1}$, tehát $(\exp\operatorname{arch} x)' = (x + \sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1}$.

292. $\operatorname{ch} x/\sqrt{4+\operatorname{sh}^2 x}$.

294. A második egyenlőségnél felhasználva, hogy $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \pi/2$, ha $x > 0$, kapjuk, hogy

$2\operatorname{arctg} e^{-u} - \pi/2 =$
$2\operatorname{arctg}(1/e^u) - \pi/2 =$
$2(\pi/2 - \operatorname{arctg} e^u) - \pi/2 =$
$-(2\operatorname{arctg} e^u - \pi/2)$,

tehát a függvény páratlan.



295. $\frac{d\varphi}{du} = 2e^u/(1+e^{2u}) > 0$, tehát a függvény szigorúan monoton nő, így invertálható is.

296. Mivel $0 < \operatorname{arctg} e^u < \pi/2$, ezért $-\pi/2 < \varphi = 2\operatorname{arctg} e^u - \pi/2 < \pi/2$, tehát $\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)$, másrészt $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} e^u - \pi/2) = -\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} e^u) = -(1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} e^u))/(2\operatorname{tg}\operatorname{arctg} e^u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \operatorname{sh} u$, azaz $\varphi = \operatorname{arctg}\operatorname{sh} u$. Az $\operatorname{arctg} x = \arcsin(x/\sqrt{1+x^2})$ képlet (l. **129.** feladat) felhasználásával kapjuk, hogy $\varphi = \operatorname{arctg}\operatorname{sh} u = \arcsin(\operatorname{sh} u/\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}) = \arcsin\operatorname{th} u$.

297. Az előző feladatból azonnal adódik, hogy $\operatorname{sh} u = \operatorname{tg}\varphi$, és $\operatorname{th} u = \sin\varphi$. Ha $u \neq 0$, $\varphi \neq 0$, akkor e két egyenlet elosztásával kapjuk, hogy $\operatorname{ch} u = \frac{1}{\cos\varphi}$, ami viszont $u = \varphi = 0$ esetén is igaz.

298. $u = \operatorname{arth}\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \ln\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

299. Legyen a két végpont koordinátája $(-1, 0)$ és $(1, 0)$, a rajtuk áthaladó görbe egyenlete $y(x) = a\operatorname{ch}\frac{x}{a} + C$. Az $y(1) = 0$ és az $y'(1) = \operatorname{tg} 10°$ egyenletből $a = 1/\operatorname{arsh}\operatorname{tg} 10° \approx 5{,}7004$; $C = -a\operatorname{ch}(1/a) = -5{,}788$. A kötél belógása $-y(0) \approx 0{,}0879$ m.

11. Egyváltozós valós függvények menetének vizsgálata (megoldások)

1. $f'(x) = \frac{1}{3}x(7x+12)(x+2)^{-2/3}$, f' zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = -12/7$, f nem differenciálható: $x_3 = -2$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-12/7)$	$-12/7$	$(-12/7,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$+$	n.ért.	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	nincs sz.	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

2. $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & \text{ha } x \le -1/2; \\ x+4, & \text{ha } -1/2 \le x \le 3; \\ 3x-2, & \text{ha } 3 \le x. \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x < -1/2; \\ 1, & \text{ha } -1/2 < x < 3; \\ 3, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$

f'-nek nincs zérushelye, f nem differenciálható: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	n.ért.	$+$	n.ért.	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	nincs sz.	$\nearrow$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2+x-2, & \text{ha } x \in (-\infty,-2] \cup [1,\infty); \\ -x^2-x+2, & \text{ha } x \in [-2,1]. \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty); \\ -2x-1, & \text{ha } x \in (-2,1). \end{cases}$

f' zérushelye: $x_1 = -1/2$, f nem differenciálható: $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	n.ért.	$+$	0	$-$	n.ért.	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

4. A $2|x| = |1+x|$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Így

$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } x \le -1/3; \\ x+1, & \text{ha } -1/3 \le x \le 1; \\ 2x, & \text{ha } 1 \le x. \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } x < -1/3; \\ 1, & \text{ha } -1/3 < x < 1; \\ 2, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$

f'-nek nincs zérushelye, f nem differenciálható az x_1 és x_2 helyen.

	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	n.ért.	$+$	n.ért.	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	nincs sz.	$\nearrow$

5. $f'(x) = \cos x(2\sin x - \sqrt{3})$, f' zérushelyei: $x_1 = \pi/3$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 2\pi/3$.

	$(0,\pi/3)$	$\pi/3$	$(\pi/3,\pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2,2\pi/3)$	$2\pi/3$	$(2\pi/3,\pi)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

6. A függvény 2π szerint periodikus, így elég a vizsgálatot csak a $[0,2\pi)$ intervallumon elvégezni. $f'(x) = -2\sin x\cos x(1+2\cos x)$, f' zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 2\pi/3$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 4\pi/3$, $x_6 = 3\pi/2$. f' előjelének megállapításában segíthet a sin, a cos és az $1 + 2\cos$ függvények grafikonjának

ábrázolása. (A következő táblázatban N ill. X jelentése MIN ill. MAX.)

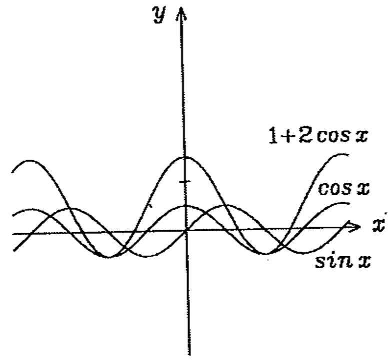
	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3},\pi)$	π	$(\pi,\frac{4\pi}{3})$	$\frac{4\pi}{3}$	$(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$
f'	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+
f	X	↘	N	↗	X	↘	N	↗	X	↘	N	↗

7. $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$, $x>0$.
$f'(x)=x^x(\ln x+1)$, $f'(\frac{1}{e})=0$.

	$(0,1/e)$	$1/e$	$(1/e,\infty)$
f'	−	0	+
f	↘	MIN	↗

8. $f(x)=e^{-x^2\ln x}$, $x>0$.
$f'(x)=-x^{1-x^2}(2\ln x+1)$, $f'(\frac{1}{\sqrt{e}})=0$.

	$(0,1/\sqrt{e})$	$1/\sqrt{e}$	$(1/\sqrt{e},\infty)$
f'	+	0	−
f	↗	MAX	↘



9. $f(1)=\frac{1}{x}\,|_1=1$, $f'(1)=-\frac{1}{x^2}\,|_1=-1$, $f''(1)=\frac{2}{x^3}\,|_1=2$, $f'''(1)=-\frac{6}{x^4}\,|_1=-6$, $f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}$. A Taylor-polinom $1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$. A maradéktag $R_3(x)=\dfrac{(x-1)^4}{\xi^5}$, ahol ξ az 1 és x közé esik.
Így $\dfrac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\dfrac{(x-1)^4}{\xi^5}$.

10. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{e^\xi x^4}{24}$, ahol ξ az 1 és x közé esik.

11. $e^x=e+e(x-1)+\dfrac{e}{2}(x-1)^2+\dfrac{e}{6}(x-1)^3+\dfrac{e^\xi}{24}(x-1)^4$, ahol ξ az 1 és x közé esik.

12. $\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\frac{\sin\xi}{24}(x-\frac{\pi}{6})^4$.

13. ax^3+bx^2+cx+d.

14. $(a+b+c+d)+(3a+2b+c)(x-1)+(3a+b)(x-1)^2+a(x-1)^3$, a maradéktag 0.

15. Írjuk fel a P polinom $x_0=1$ ponthoz tartozó ötödfokú Taylor-formuláját. Mivel P hatodik deriváltja 0, ezért a maradéktag is 0. P deriváltjainak értéke az $x_0=1$ pontban: $P(1)=0$, $P'(1)=0$, $P''(1)=0$, $P'''(1)=-6$, $P^{(4)}(1)=24$, $P^{(5)}(1)=120$; a Taylor-polinom: $\frac{-6}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4+\frac{120}{5!}(x-1)^5$, azaz $P(x)=-(x-1)^3+(x-1)^4+(x-1)^5$.

16. $P(x)=1-2(x+1)+4(x+1)^2-3(x+1)^3+(x+1)^4$.

17. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0<\xi<x$ vagy $x<\xi<0$.

18. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m+1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \cos\xi \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, ha $n = 2m$, és $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m+1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \sin\xi \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$, ha $n = 2m-1$, és ahol $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$.

19. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1}\sin\xi \dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$, ha $n = 2m+1$, és $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1}\cos\xi \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, ha $n = 2m$, és ahol $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$.

20. $f(x) = (1+x)^m$, $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, így $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$, ahol $R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$, és $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$. Látható, hogy nemnegatív egész m értékekre és $n \geq m$ esetén e formula megegyezik a binomiális tétel szerintivel.

21. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$, ahol $|x| \leq 1$, ξ a 0 és x közé esik. $|R_n(x)| = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} < \dfrac{e}{(n+1)!}$, és $\dfrac{e}{(n+1)!} < 0{,}005$, ha $n \geq 5$.

22. $T_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}$. Mivel a $\cos x$ függvény 7-edik Maclaurin-polinomja is 6-odfokú, hisz a hetedfokú tag együtthatója 0, ezért számolhatunk R_7-tel: $|R_7(x)| = \left|\frac{\cos\xi}{8!}x^8\right| \leq \frac{|x|^8}{8!}$, és $|x|^8/8! < 0{,}0001$, ha $|x| < 1{,}19$. (R_6-tal számolva azt kapjuk, hogy $|x| < 0{,}9$).

23. $|R_6(x)| = |-(\cos\xi)(x-1)^7/7!| \leq |x-1|^7/7!$ és ez kisebb mint $0{,}0001$, ha $|x-1| < 0{,}9067$, azaz ha $x \in (-0{,}0933; 1{,}9067)$.

24. Könnyen látható, hogy $k \leq n$ esetén $g^{(k)}(0) = p^{(k)}(0)$, így g és p n-edik Maclaurin-polinomjai megegyeznek.

25. Mindegyik függvény Maclaurin-polinomja $x + x^3$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_2(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\xi}{6} = \dfrac{1}{2}$, mivel $x \to 0$ esetén $\xi \to 0$ (és így $\sin\xi \to 0$), hisz ξ az x és 0 közé esik.

27. $\dfrac{1}{720}$. 28. $\dfrac{1}{120}$. 29. $\dfrac{1}{24}$.

30. A harmadik Maclaurin-formulát felírva azonnal kapjuk, hogy: $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \operatorname{sh}\xi \frac{x^4}{24} > x + \frac{x^3}{6}$, mivel $0 < \xi < x$. Ennek egyszerű következménye: $\operatorname{sh} x > x$, ha $x > 0$.

32. $62^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}$ radián. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + R_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) \approx 0{,}4694654 + \frac{\sin\xi}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3$, ahol $\left|\frac{\sin\xi}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right| < \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 \approx 0{,}0000071$. Tehát

$\cos 62^\circ \approx 0,4694654$, ahol a hiba legfeljebb $0,0000071$.

33. $\sin 43^\circ \approx 0,68199832$, a hiba legfeljebb $0,0000000438$.

34. Mivel $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3(1+\frac{2}{27})^{1/3}$, ezért használhatjuk az alábbi Taylor-formulát:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

ahol $R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$, és $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$. Ha $x = \frac{2}{27}$, $m = \frac{1}{3}$, akkor $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2} + \ldots + R_n(x))$. A maradéktagot megbecsülve $3|R_1(x)| < 3 \cdot 2 \cdot 2/81^2 < 0,002$, $3|R_2(x)| < 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5/81^3 < 0,0003$. Ez utóbbi már megfelelő pontosságot biztosít, így $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2}) \approx 3,072$.

35. $f'(x) = -\sin x - 4x$, $f''(x) = -\cos x - 4$, tehát $f'(0) = 0$, $f''(0) = -5 < 0$. Mivel az első nemnulla értékű derivált másodrendű és negatív értékű, ezért a függvénynek 0-ban maximuma van.

36. minimum

37. minimum

38. Mivel az első nemnulla értékű derivált harmadrendű, ezért a függvénynek 0-ban nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

39. inflexiós pont

40. $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = \operatorname{ch} 0 + \cos 0 = 2 > 0$. Mivel az első nemnulla értékű derivált negyedrendű és pozitív értékű, ezért a függvénynek 0-ban minimuma van.

41. Mivel az első nemnulla értékű derivált negyedrendű és negatív értékű, ezért a függvénynek 0-ban maximuma van.

42. Mivel az első nemnulla értékű derivált ötödrendű, ezért a függvénynek 0-ban nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

43. $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$, zérushelyei $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Tehát szélsőérték lehet az $x_0 = -6$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 6$ pontokban. $f(-6) = 93$, $f(-5) = 103$, $f(1) = -5$, $f(6) = 345$, és f' negatív a $(-5,1)$ intervallumon. Tehát maximum az $x_1 = -5$ és $x_3 = 6$, minimum az $x_0 = -6$, $x_2 = 1$ pontokban van, abszolút maximum van az $x_3 = 6$, abszolút minimum az $x_2 = 1$ pontban.

44. Az előző feladat szerint f maximuma az $x = -5$, minimuma az $x = 1$ pontban van (ez abszolút minimum is). Abszolút maximum nincs, hisz a függvény értékkészletének szuprémuma 345, és ezt sehol sem veszi fel értékként.

45. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$, f nem differenciálható: $x_1 = 0$, f' sehol nem 0; végpontok: $x_2 = -1$, $x_3 = 8$. $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ MIN, $f(8) = 4$ MAX.

46. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3}$, $x \neq 0$, f nem differenciálható: $x_1 = 0$, f' zérushelyei: $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; végpontok: $x_4 = -1$, $x_5 = \sqrt{2}$. $f(-1) = \frac{2}{3}$ MAX, $f(0) = 0$ MIN, $f(1) = \frac{2}{3}$ MAX, $f(\sqrt{2}) = \sqrt[3]{2} - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}$.

47. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3}$, $x \neq 0$; f nem differenciálható: $x_1 = 0$; f' zérushelyei: $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; végpontok: $x_4 = -1$, $x_5 = \sqrt{8}$. f' előjelváltásait is figyelembe véve: $f(-1) = \frac{2}{3}$, $f(0) = 0$ (lokális) MIN, $f(1) = \frac{2}{3}$ (abszolút) MAX, $f(\sqrt{8}) = \frac{2}{3}$, tehát abszolút MIN nincs.

48. $f'(x) = e^{-x}(1-x)$. f' zérushelye $x = 1$, ahol f' előjelet vált. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0,5) > 0$, tehát maximuma van f-nek az $x = 1$ pontban, minimuma nincs.

49. $f(1) = 0$ MIN; $f(e) = e^2$ MAX. **50.** $f(0) = 1$ MAX, $f(2) = 1/e^2$ MIN.

51. $f(-2) = 5$ MAX, $f(-1) = f(3) = 2$ (abszolút) MIN, $f(1) = 6$ MAX, abszolút maximum nincs, mert $\lim_{x\to 8-0} f(x) = 7$.

52. $f(-1) = 1/e$, $f(1) = e$, $\lim_{x\to -0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +0} f(x) = \infty$. f-nek se minimuma, se maximuma nincs.

53. $f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-(n+m)x)$. f' zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{m}{m+n}$. Az $x_3 = \frac{m}{m+n}$ helyen maximum van, és $f(x_3) = m^m n^n/(m+n)^{m+n}$. $x_1 = 0$ minimumhely, ha m páros, nem szélsőértékhely, ha páratlan. $x_2 = 1$ minimumhely, ha n páros, nem szélsőértékhely, ha páratlan.

54. Tegyük fel, hogy g-nek x_0-ban minimuma van. Ekkor van x_0-nak olyan K környezete, hogy $x \in K$ esetén $g(x) \geq g(x_0)$. Ha f monoton nő, akkor $f(g(x)) \geq f(g(x_0))$, vagyis x_0 minimuma az $f \circ g$ függvénynek is. Maximumra, és monoton csökkenő függvényre a bizonyítás hasonló.

55. Az f függvény helyett elég megvizsgálni a $g(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 56$ függvényt, hisz g-nek ott van maximuma, ahol f-nek minimuma, és fordítva, hisz a reciprokfüggvény monoton csökkenő. Mivel $g'(x) = 12x(x^2 + 2x - 3)$, $g''(x) = 12(3x^2 + 4x - 3)$, g' zérushelyei: -3, 0, 1, és e pontokban $g''(-3) > 0$, $g''(0) < 0$, $g''(1) > 0$, ezért az $x = -3$ és $x = 1$ pontokban (g-nek minimuma) f-nek maximuma van, az $x = 0$ pontban (g-nek maximuma) f-nek minimuma van.

56. Az f függvénynek ott van minimuma, ahol a $g : x \mapsto 4 - \sqrt{e - e^{x^2}}$ függvénynek, hisz az arctg függvény monoton növő. g-nek ott van minimuma, ahol a $h : x \mapsto e - e^{x^2}$ függvénynek maximuma, hisz az $y \mapsto 4 - \sqrt{y}$ függvény monoton csökkenő. h-nak maximuma van az $x = 0$ pontban, így ott f-nek minimuma van, míg az $x = 1$, $x = -1$ pontokban h-nak minimuma, így f-nek maximuma van.

57. $x = 0$ maximum. (az arctg értékkészletén a cos függvény monoton csökken.)

58. $x = -\frac{1}{2}$ maximum.

59. Az $f(x) = 3x - x^3$ $(-2 \leq x \leq 2)$ függvény szélsőértékhelyei: abszolút maximum van az $x = -2$, $x = 1$ pontokban, ahol $f(x) = 2$, míg abszolút minimum van az $x = -1$, $x = 2$ pontokban, ahol $f(x) = -2$. Ebből következik, hogy $|f(x)| \leq 2$.

60. 1. megoldás: Ahol az $f(x) = |a\sin x + b\cos x|$ függvény nem differenciálható, ott értéke 0, azaz minimuma van. Ebből következik, hogy maximuma csak ott lehet, ahol $(a\sin x + b\cos x)' = 0$, azaz ahol $\operatorname{tg} x = a/b$. Mivel $\sin x = \operatorname{tg} x/\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos x = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = b/\sqrt{a^2+b^2}$, ezért $|a\sin x + b\cos x| \leq |a^2/\sqrt{a^2+b^2} + b^2/\sqrt{a^2+b^2}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2. megoldás: Tekintsük az (a, b) és a $(\sin x, \cos x)$ vektorokat. Mivel az utóbbi

vektor egységvektor, ezért $|(a;b)(\sin x;\cos)| = |a\sin x + b\cos x|$ nem más, mint az $(a;b)$ vektornak a $(\sin x;\cos x)$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének hossza, ami kisebb vagy egyenlő az $(a;b)$ vektor hosszánál, azaz $\sqrt{a^2+b^2}$-nél.
3. megoldás: Lásd a **1.??** feladatot.

61. $f(x) = x^m(1-x)^n$, $f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-(n+m)x)$. f' zérushelyei 0, 1, $\frac{m}{m+n}$. Az $\frac{m}{m+n}$ helyen maximuma van f-nek, és $f(\frac{m}{m+n}) = m^m n^n/(m+n)^{m+n}$, ami bizonyítja az egyenlőtlenséget.

62. A törtfüggvényt f-fel jelölve $f'(x) = (x^2-1)/(x^2+x+1)^2$, amiből látható, hogy f a $(-\infty;-1)$ és az $(1;\infty)$ intervallumon nő, a $(-1;1)$ intervallumon csökken, $x=-1$-ben f-nek maximuma, $x=1$-ben minimuma van, és $f(-1)=2$, $f(1)=\frac{2}{3}$. Mivel $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, ezért e szélsőértékek egyúttal abszolút szélsőértékek is.

63. Tekintsük az $f(x) = x^2/(x^3+100)$ függvényt a $[0;\infty)$ intervallumon. $f'(x) = x(200-x^3)/(x^3+100)^2$, amiből kapjuk, hogy f monoton növekvő a $(0,\sqrt[3]{200}$ intervallumon és monoton csökkenő a $(\sqrt[3]{200},\infty)$ intervallumon. Az $5<\sqrt[3]{200}<6$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy a_5 vagy a_6 a legnagyobb. $a_5 = 1/9$, $a_6 = 9/79$, tehát a_6 a legnagyobb.

64. a_{14}.

65. a_{272}.

66. (a) $f(x) = x^3+px+q = 0$, $f'(x) = 3x^2+p$. f-nek szélsőértéke lehet az $x_1 = \sqrt{-p/3}$ és az $x_2 = -\sqrt{-p/3}$ pontokban (ha $p<0$). f-nek egy valós gyöke van, ha f monoton növő $(-\infty,\infty)$-en, (azaz, ha $p\geq 0$), vagy ha f nem vált előjelet a minimum- és maximumhelyek között, azaz $f(x_1)f(x_2)>0$. Ebből $f(x_1)f(x_2) = q^2 - \left(\left(\sqrt{-p/3}\right)^3 + p\sqrt{-p/3}\right)^2$ miatt $p^3/27+q^2/4>0$ adódik.
(b) Hasonlóan számolva: $p^3/27+q^2/4<0$.

67. f lokális maximumhelye: $x=1$, és $f(1)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+0} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, tehát $\sup_{(0,\infty)} f(x) = \max_{(0,\infty)} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$, $\inf_{(0,\infty)} f(x) = 0$.

68. $f'(x) = 4x/(3+x^2)^2 > 0$, ha $x\in(0,\infty)$, tehát f az adott intervallumon szigorúan monoton nő. $\lim_{x\to+0} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, tehát $\sup_{(0,\infty)} f(x) = 1$, $\inf_{(0,\infty)} f(x) = \frac{1}{3}$.

69. $|x^2-x^3| = x^2-x^3$, ha $x\in[0,1]$. Mivel az $x\mapsto x^2-x^3$ függvény folytonos, ezért Weierstrass tétele miatt elég e függvény maximumát megkeresni. A maximumhely $x=\frac{2}{3}$, ahol $f-g$ értéke $\frac{4}{27}$, tehát $\rho(f,g) = \frac{4}{27}$.

70. Hasonlóan az előző feladathoz: az $x\mapsto|\sin x-\cos x|$ függvény maximumhelye $x=3\pi/4$, ahol $f-g$ értéke $\sqrt{2}$, tehát $\rho(f,g)=\sqrt{2}$.

71. Legyen $F(x) = |x^2-(2x+c)|$. $F'(x) = 2x-2$, ha $x^2-2x-c>0$, illetve $F'(x) = -2x+2$, ha $x^2-2x-2<0$, $F'(x)=0$, ha $x=1$. Ahol F nem differenciálható, ott F-nek minimuma van, mivel F értéke 0. F-nek maximuma lehet az $x=0$,

$x = 1$ vagy $x = 2$ helyeken. $F(0) = F(2) = |c|$, $F(1) = |c+1|$, és e három érték maximuma akkor a legkisebb, ha $c = -1/2$, és ekkor $\rho(x^2, 2x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

72. Az egyik szám x, a másik $b - x$, a maximálandó függvény $f(x) = x(b-x)$, melynek maximuma $b/2$-ben van, tehát mindkét szám $b/2$.

73. Az egyenlőszárú derékszögű háromszögnek. (Az átfogót c-vel, az egyik befogót a-val, a vele szemközti szöget α-val, a háromszög területét T-vel jelölve $2T = a\sqrt{c^2 - a^2}$ vagy $2T = c^2 \sin\alpha\cos\alpha$.)

74. Melynek magassága és az alaplapjának átmérője megegyezik.

75. 1; 3.

76. $x = a/\sqrt{2}$, $y = b/\sqrt{2}$, $T = ab$.

77. Az összeg felülről nem korlátos, minimuma $4f$.

78. $x = a/6$.

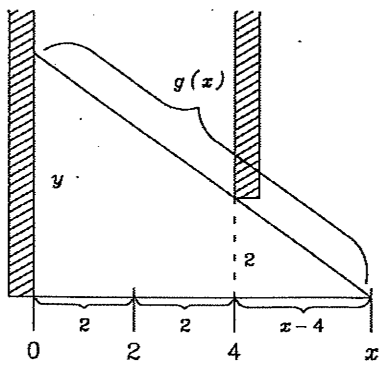
79. $\dfrac{dH}{dk} = 2k\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ $\dfrac{d^2H}{dk^2} = 2\sum_{i=1}^{4} x_i^2 > 0$, tehát H konvex, így minimuma van, ha $\dfrac{dH}{dk} = 0$, azaz ha $k = \dfrac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i}{\sum_{i=1}^4 x_i^2} = 3,9$. (Az általános eset leírása megtalálható a tankönyvben.)

80. A szükséges idő: $t(x) = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_1}$, így ez a függvény minimalizálandó. $t'(x) = \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \dfrac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} - \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

81. A minimalizálandó függvény: $t(x) = \sqrt{x^2 + (1/4)^2} + k\sqrt{(1-x)^2 + (3/4)^2}$, ahol a) $k = 1$, b) $k = 3$. A szélsőértékhelyek: a) $x = 1/4$, b) $x = 3/4$. A b) esetben a gyök meghatározása nehézségekkel járhat.

82. Az $I(\alpha) = k\dfrac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{r^2}$, ($k$ konstans) szélsőértékhelye: $\alpha = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$ vagy $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{3})$, azaz $\alpha \approx 35,264°$, ahonnan $m = r/\sqrt{2}$.

83. Ha a gerenda alsó vége x távolságra van az ajtóval szemközti faltól, felső végpontja y távolságra a földtől, akkor a gerenda L hossza nem lehet nagyobb a $\sqrt{x^2 + y^2}$ értéknél, tehát $L \le \sqrt{x^2 + y^2}$. Mivel $2/y = (x-4)/x$, ezért $L \le \sqrt{x^2 + (2x/(x-4))^2}$. Keressük tehát a $g(x) = \sqrt{x^2 + (2x/(x-4))^2}$ függvény minimumát. E minimum az $x_0 = 4 + \sqrt[3]{16}$ pontban van, tehát a gerenda legfeljebb $g(x_0) = 2\sqrt{5 + 3\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2}}$ m hosszú lehet.



84. Először tegyük fel, hogy $f'(x_0) > 0$. Ekkor $f' > 0$ az x_0 egy teljes környezetének minden pontjában, így f invertálható. Inverzét jelölje g, és legyen $y_0 = f(x_0)$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Így ha f konvex, azaz f' monoton növő, akkor $1/f'$ monoton csökkenő, azaz g konkáv. A többi eset hasonlóan vizsgálható.

85. $f''(x) > 0$, ha $x > 0$, $f''(x) < 0$, ha $x < 0$, így

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	INFL	$\smile$

86. Mivel az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény a $g(x) = x^3$ függvény inverze, és g-nek a $(0,0)$ pont inflexiós pontja, ezért az f függvénynek is $(0,0)$ lesz az inflexiós pontja. A kettővel ezelőtti feladat alapján f konvex a $(-\infty,0)$ és konkáv a $(0,\infty)$ intervallumon.

87. $f'(x) = 1 + \dfrac{5}{3}x^{2/3}$, $\quad f''(x) = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$-$	n.ért.	$+$
f	$\frown$	INFL	$\smile$

Az f'' függvénynek nincs zérushelye, de nincs értelmezve az $x_0 = 0$ pontban. Mivel x_0-ban f differenciálható, azaz f grafikonjának van érintője, és ott f konkávból konvexbe vált, ezért f-nek 0-ban inflexiós pontja van.

88. Konkáv, ha $x < 5$, konvex, ha $x > 5$, az $x_0 = 5$ pontban inflexiós pontja van.

89. $f''(x) = \dfrac{1}{x}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)) = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\sin(\dfrac{\pi}{4} - \ln x)$, $f''(x) = 0$, ha $x = \exp(\dfrac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Az f'' függvény e pontokban előjelet vált, így e pontok mind inflexiós pontok. f konvex, ha $x \in \Big(\exp(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi), \exp(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi)\Big)$, és f konkáv, ha $x \in \Big(\exp(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi), \exp(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi)\Big)$.

90. $f'(x) = \begin{cases} -5x^4, & \text{ha } x > 1 \\ 5x^4, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$ $\quad f''(x) = \begin{cases} -20x^3, & \text{ha } x > 1 \\ 20x^3, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$.

Az $x = 1$ pontban a függvény nem differenciálható, mert $\lim_{x\to 1+0} f'(x) \neq \lim_{x\to 1-0} f'(x)$, így ott nincs inflexiós pontja. (Azt mondjuk, hogy x_0 töréspontja az f függvénynek, ha x_0 folytonossági hely, $\lim_{x\to 1+0} f'(x)$ és $\lim_{x\to 1-0} f'(x)$ létezik, de különbözők.)

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	0	$+$	n.ért.	$-$
f	$\frown$	INFL	$\smile$	töréspont	$\frown$

91. $f''(0) = 0$, $\quad f'''(0) = 6 \neq 0$, az $x = 0$ pont inflexiós pont.

92. $f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2n)}(0) = 0$, de $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \neq 0$, vagyis az első nem-nulla derivált rendje páratlan, így f-nek $x = 0$-ban inflexiós pontja van.

93. $f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2n-1)}(0) = 0$, de $f^{(2n)}(0) = (2n)! \neq 0$, vagyis az első nem-nulla derivált rendje páros, így f-nek $x = 0$-ban nincs inflexiós pontja, minimuma van.

94. $f''(x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$. E pontok mindegyike inflexiós pont, mivel f''' e pontok egyikében sem 0.

95. $f''(x) = \operatorname{sh} x - \sin x = 0$, ha $x = 0$. Az f''-nek más zérushelye nincs, mert $x > 0$ esetén $\operatorname{sh} x > x$, $\sin x < x$, míg $x < 0$ esetén $\operatorname{sh} x < x$, $\sin x > x$. $f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 2 \neq 0$, tehát az első nem-nulla derivált rendje páratlan, így f-nek $x = 0$-ban inflexiós pontja van.

96. ld. az előző feladatot.

97. $f''(x) = \dfrac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2+1)^3}$. f'' zérushelyei: $x_1 = 1$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = -2 - \sqrt{3}$.

	$(-\infty, -2-\sqrt{3})$	$(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$	$(-2+\sqrt{3}, 1)$	$(1, \infty)$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Tehát f-nek mindhárom helyen inflexiós pontja van. Az inflexiós pontok koordinátái: $(-2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4})$, $(-2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$, $(1, 1)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy e pontok bármelyikéből a másik kettőbe mutató vektorok egyező állásúak, vagyis a pontok egy egyenesen vannak. Ennek az egyenesnek az egyenlete: $x - 4y + 3 = 0$.

98. Az $f''(x) = 6(2x^2 + cx + 1) \geq 0$ egyenlőtlenség akkor áll fenn minden x valós számra, ha $c^2 - 8 \leq 0$, azaz ha $|c| \leq 2\sqrt{2}$.

99. f-nek inflexiós pontja van az x_0 pontban, ha $f''(x_0) = 0$ és f'' ott előjelet vált. Ez akkor történik meg, ha az $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b = 0$ egyenletnek van két különböző valós gyöke, vagyis ha diszkriminánsa pozitív, tehát, ha $3a^2 - 8b > 0$.

100. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$, mivel $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. (Valaki persze kiszámíthatja a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határértéket a L'Hospital szabállyal is, azt azonban ne felejtsük el, hogy a sin függvény differenciálásához szükségünk volt a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték ismeretére.)

101. $\dfrac{a}{b}$. **102.** 1. **103.** 1.

104. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ae^{ax} + ae^{-ax}}{1/(1+x)} = 2a.$

105. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2/(3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}{1/(2\sqrt{2+x})+1} = \dfrac{4}{9}.$

106. $-\dfrac{1}{2}$.

107. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{x/2}}{e^x + x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x/2}(1+x/2)}{e^x+1} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x/2}(1+x/4)}{e^x} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x/4)}{e^{x/2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/2}{e^{x/2}} = 0.$

108. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0.$

109. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x}{e^x + x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x + e^x/x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x + 1/x}{1 + e^{-x}} = \infty.$

110. $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{e^x - e^a}{(x-a)e^x} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{1 - e^a e^{-x}}{(x-a)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{e^a e^{-x}}{1} = 1.$

111. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{1 + \ln \sin x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

112. $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to1-0} -\dfrac{\pi(1-x)}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{\pi}{-2\pi\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = -\infty.$

113. Legyen f és g két olyan egyváltozós valós függvény, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Ha $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = c > 1$, akkor a határérték definíciója szerint van olyan x_0 szám, hogy $x > x_0$ esetén $f(x)/g(x) > 1$, azaz $f(x) > g(x)$. Hasonlóképpen, ha $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = c < 1$, akkor van olyan x_0 szám, hogy $x > x_0$ esetén $f(x) < g(x)$. Számítsuk a megadott három függvény hányadosainak határértékét.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a e}{kx^k} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{a^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx^{k-1}}{a^x \ln a} \overset{L}{=} \ldots \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{k!}{a^x(\ln a)^k} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{a^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a e}{xa^x \ln a} = 0.$

Így a reciprokokra: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{\log_a x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^k} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{\log_a x} = \infty$. Tehát, van olyan x_0, hogy $x > x_0$ esetén $\log_a x < x^k < a^x$.

114. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{1/x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to+0} (-x) = 0.$

115. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln\sin x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln\sin x}{1/x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to+0} \left(-x\cos x \dfrac{x}{\sin x}\right) = 0.$

116. 0. **117.** $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}} = 0.$ **118.** 0. **119.** 1.

120. $\dfrac{1}{\pi}$.

121. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{v}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 + \dfrac{v}{x}\right) / \dfrac{1}{x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{vx}{x+v} = v.$

122. Ha $\varepsilon \le 0$, akkor a határérték nyilvánvalóan 0. Egyébként pedig használjuk a L'Hospital szabályt. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\varepsilon}{e^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x}$. Ha $\varepsilon - 1 \le 0$, akkor e határérték 0, ha nem, még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital szabályt. $\lim_{x\to\infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)x^{\varepsilon-2}}{e^x}$. Ha $\varepsilon - 2 \le 0$, akkor e határérték 0, ha nem, hasonlóképpen folytatjuk az eljárást, míg végül $\varepsilon - k \le 0$ nem teljesül. A határérték 0.

123. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}\ln^2(1+x)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} / \dfrac{2\ln(1+x)}{(1+x)\cos^2\ln^2(1+x)} =$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)\cos x\cos^2\ln^2(1+x)}{1+\sin^2 x} \cdot \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)} \overset{L}{=} 1 \cdot \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x}{1/(1+x)} = 1.$

124. $\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{\exp x}$ egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték, melynek értéke 0. Ezt a L'Hospital szabály n-szeri alkalmazásával kapjuk meg, ahol n a p polinom foka. Ha $r(x) = p(x)/q(x)$, ahol p és q két polinom, és x_0 egy olyan szám, melyre $x > x_0$ esetén $|q(x)| > 1$ (bizonyítsuk be, hogy ilyen szám mindig van), akkor $|r(x)| = |p(x)|/|q(x)| < |p(x)|$, ha $x > x_0$. Így $-|p(x)| < r(x) < |p(x)|$, vagyis $-|p(x)|e^{-x} < r(x)e^{-x} < |p(x)|e^{-x}$, és akkor a csendőrelv alkalmazásával kapjuk, hogy $\lim_{x\to\infty} r(x)e^{-x} = 0$.

125. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x - x}{x\sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{\sin x + x\cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

126. $$\lim_{x\to\pi/2}\left(x\operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = -1.$$

127. 0. **128.** $\frac{1}{2}$. **129.** $\frac{1}{2}$.

130. Ha $p \neq q$ és $p \neq 1$, $q \neq 1$, akkor:
$$\lim_{x\to 1}\frac{p(1-x^q) - q(1-x^p)}{(1-x^p)(1-x^q)} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x^{p-1} - x^{q-1})pq}{-px^{p-1} - qx^{q-1} + (p+q)x^{p+q-1}} \stackrel{L}{=}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\left((p-1)x^{p-2} - (q-1)x^{q-2}\right)pq}{-p(p-1)x^{p-2} - q(q-1)x^{q-2} + (p+q)(p+q-1)x^{p+q-2}} = \frac{p-q}{2}.$$
Ugyanez adódik (nyilvánvalóan) a $p = q$ esetben, valamint (lényegileg ugyanígy) a $p = 1$, $q = 1$ esetben.

131. A határérték ∞^0 típusú. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x \ln\frac{1}{x}}$, ahol a kitevő $0\cdot\infty$ típusú. A $\sin x\ln\frac{1}{x} = \frac{\ln(1/x)}{1/\sin x}$ átalakítás után L'Hospital szabállyal kapjuk, hogy $\lim_{x\to 0}\sin x\ln\frac{1}{x} = 0$, tehát $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

132. A határérték 0^0 típusú. $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln\sin x} = 1$.

133. A határérték ∞^0 típusú. $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x}$, és $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{\substack{y=\operatorname{tg} x\\ y\to\infty}}\frac{\ln y}{y} \stackrel{L}{=} \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y} = 0$, ezért $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1$.

134. A határérték 1^∞ (pontosan $1^{-\infty}$) típusú. $\lim_{x\to+0}(1+x)^{\ln x} = \lim_{x\to+0} e^{\ln x\ln(1+x)} = 1$.

135. e^s. **136.** ∞.

137. A határérték létezik, és 0, ugyanis
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$
A deriváltak hányadosának azonban nem létezik határértéke, mert
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right),$$

így a L'Hospital szabály nem alkalmazható. (Ez nem mond ellent a **T 11.12** tételnek.)

138. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1$, tehát a határérték létezik. Másrészt az $\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ tört számlálóját és nevezőjét is deriválva a kapott $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ határérték nem létezik, hisz minden egész k-ra az $x=(2k+1)\pi$ helyen a nevező 0, és így e pont környezetében a függvény nem korlátos, az $x = 2k\pi$ helyen pedig a függvény értéke 0.

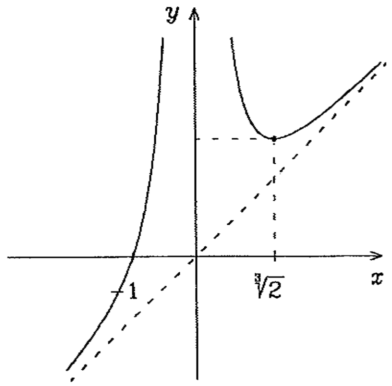
139. f-nek lokális maximuma van az $x=e$ helyen, és $f(e)=\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, tehát $\sup\limits_{(1,\infty)} f(x) = \max\limits_{(1,\infty)} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{e}$, $\inf\limits_{(1,\infty)} f(x) = 0$.

140. $f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x} < 0$, ha $x\in(0,\infty)$, azaz f szigorúan monoton csökkenő ezen az intervallumon.
$\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, tehát $\sup\limits_{(0,\infty)} f(x) = 1$, $\inf\limits_{(0,\infty)} f(x) = 0$.

141. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával:
$a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x^2} - 3 = -3$, és
$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x} = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x\right) = \infty$.
Aszimptoták: $y=-3x$ és $x=0$.

142. $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$, így ferde aszimptota nincs. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával: $\lim\limits_{x\to+0} x^2e^{\frac{1}{x}} = \infty$, és $\lim\limits_{x\to-0} x^2e^{\frac{1}{x}} = 0$. Tehát az egyetlen aszimptota: $x=0$.

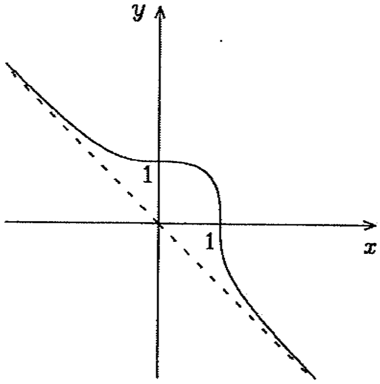
143. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.
(4) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, tehát az $x=0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
$a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$,
$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax) = 0$,
tehát a ferde aszimptota egyenlete $y = x$.
(5) $f(-1) = 0$
(6) $f'(x) = 1-2/x^3$, $f''(x) = 6/x^4$, f' zérushelye $x=\sqrt[3]{2}$, tehát



	$(-\infty,0)$	0	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},\infty)$
f'	+	n.ért.	−	0	+
f	↗	pólus	↘	MIN	↗

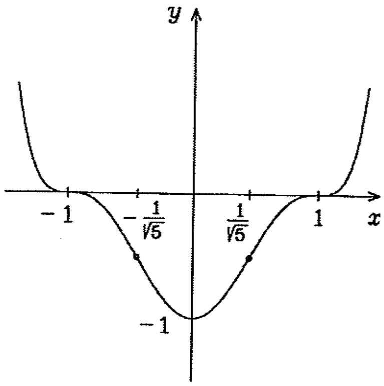
(7) $f''(x) > 0$, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, így f mindenütt konvex, inflexiós pontja nincs.
(8) $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

144. (1) $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$
(3) f mindenütt folytonos.
(4) Függőleges aszimptota nincs.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$.
$a = -1$, $b = 0$, tehát a ferde aszimptota egyenlete $y = -x$.
(5) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$
(6) $f'(x) = -x^2/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$, $f''(x) = -2x/\sqrt[3]{(1-x^3)^5}$, f' zérushelye $x = 0$, minden x-re $f'(x) \le 0$. f nem differenciálható, ha $x = 1$, és $\lim_{x\to 1} f'(x) = \infty$.
(7) $f''(x) = 0$, ha $x = 0$. f'' nincs értelmezve az $x = 1$ pontban, de itt inflexiós pont van függőleges érintővel.



	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$+$	0	$-$	∞	$+$
f'	$-$	0	$-$	∞	$-$
f	$\searrow \smile$	INFL	$\searrow \frown$	INFL	$\searrow \smile$

145. (1) $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$
(2) f páros függvény, így elég csak a $[0,\infty)$ intervallumon vizsgálni.
(3) f mindenütt folytonos.
(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$.
Mivel $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, ezért aszimptoták nincsenek.
(5) $f(0) = -1$, f zérushelyei -1 és 1, mivel $f(x) = (x^2-1)^3$.
(6-7) $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$, $f''(x) = 6(5x^2-1)(x^2-1)$. f' zérushelyei 0, 1, -1, f'' zérushelyei $\pm 1/\sqrt{5}$, ± 1. $x \ge 0$ esetén $f'(x) \ge 0$, $x \le 0$ esetén $f'(x) \le 0$. $f''(x) > 0$, ha $x \in (-\infty,-1) \cup (-1/\sqrt{5},0) \cup (0,1/\sqrt{5}) \cup (1,\infty)$.



	0	$(0,1/\sqrt{5})$	$1/\sqrt{5}$	$(1/\sqrt{5},1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f	MIN	$\nearrow \smile$	INFL	$\nearrow \frown$	INFL	$\nearrow \smile$

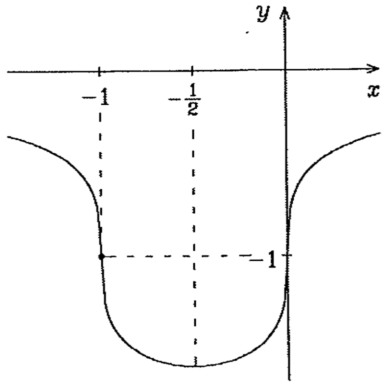
(8) $f(1/\sqrt{5}) = f(-1/\sqrt{5}) = -\frac{64}{125} = -0{,}512$.

146. (1) $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$

(3) f mindenütt folytonos.

(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Így az $y = 0$ egyenletű egyenes a függvény egyetlen aszimptotája.

(5) $f(0) = -1$. A függvénynek zérushelye nincs, mivel minden valós x-re $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$, azaz $f(x) < 0$.



(6-7) $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$,

$f''(x) = -\dfrac{2}{9}\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^5} - \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^5(x+1)^5}}$.

$f'(x) = 0$, ha $x = -\frac{1}{2}$. f' nincs értelmezve az $x = -1$ ill. $x = 0$ pontokban, ahol f' határértéke $-\infty$ ill. ∞. E két helyen tehát inflexiós pontja van a függvénynek függőleges érintővel. f'' értéke sehol sem zérus, és nincs értelmezve az $x = -1$ és $x = 0$ pontokban.

		-1		$-1/2$		0	
f''	$-$	n.ért.	$+$	$+$	$+$	n.ért.	$-$
f'	$-$	$\lim: -\infty$	$-$	0	$+$	$\lim: \infty$	$+$
f	$\searrow \frown$	INFL	$\searrow \smile$	MIN	$\nearrow \smile$	INFL	$\nearrow \frown$

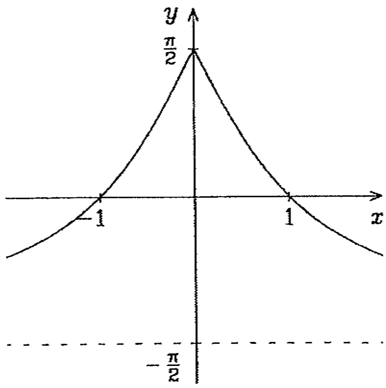
(8) $f(-1) = -1$, $f(-1/2) = -\sqrt[3]{4}$.

147. (1) $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$, mivel $|1-x^2|/|1+x^2| \le 1$.

(3) f mindenütt folytonos.

(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$. Így az $y = \frac{-\pi}{2}$ egyenletű egyenes a függvény egyetlen aszimptotája.

(5) $f(0) = -\pi/2$. $f(x) = 0$, ha $x = -1$ vagy $x = 1$.



(6-7) $f'(x) = \dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}$,

$f''(x) = \dfrac{4|x|}{(1+x^2)^2}$.

f csökkenő, ha $x > 0$, növekvő, ha $x < 0$. f' nincs értelmezve az $x = 0$ pontban, ahol bal oldali határértéke 2, jobb oldali határértéke -2. E pontban f-nek maximuma van. $f''(x) > 0$, ha $x \neq 0$, így f konvex az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon.

148. (1) $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

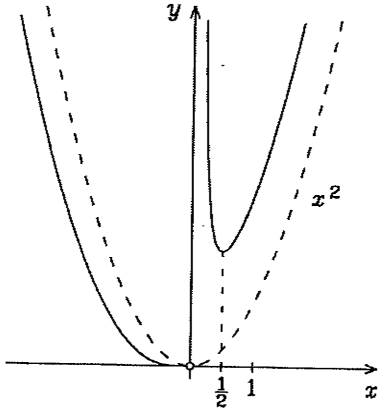
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim\limits_{x\to+0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{y\to\infty \\ y=1/x}} \dfrac{e^y}{y^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{e^y}{2y} \overset{L}{=}$ $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{e^y}{2} = \infty$, tehát az $x = 0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota.

$\lim\limits_{x\to-0} f(x) = 0$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, így más aszimptota nincs.

(5) f-nek nincs zérushelye.

(6) $f'(x) = 2e^{1/x}(x - \frac{1}{2})$. $f'(x) = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$. f monoton nő, ha $x > \frac{1}{2}$, monoton csökken, ha $x < \frac{1}{2}$, f-nek $x = \frac{1}{2}$-ben minimuma van.



(7) $f''(x) = e^{1/x}(2x^2 - 2x + 1)/x^2$.

$f''(x) > 0$, így f konvex, és inflexiós pontja nincs.

149. (1) $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

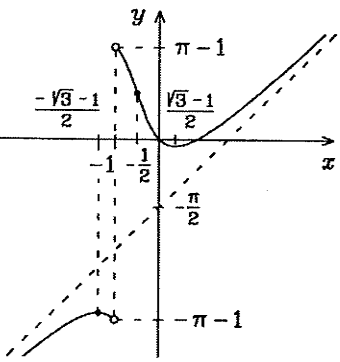
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = -1 \pm \pi$, tehát függőleges aszimptota az $x = -1$ pontban nincs. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

$a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$,

$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = -\pi/2$, tehát a ferde aszimptota egyenlete $y = x - \pi/2$.

(5) $f(0) = 0$, f többi zérushelye elemi úton nem határozható meg (még egy zérushely van, és arról könnyen látható, hogy pozitív, éspedig $\approx 0,87$).



(6-7) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 + (x+1)^2}$,

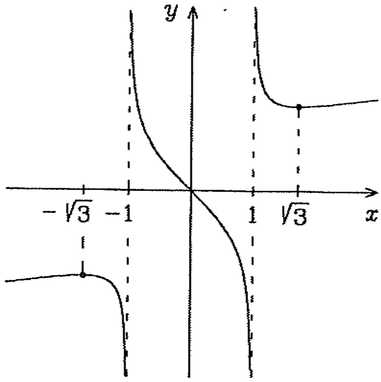
$f''(x) = \dfrac{4(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$.

$f'(x) = 0$, ha $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$,

$f''(x) = 0$, ha $x = -1/2$.

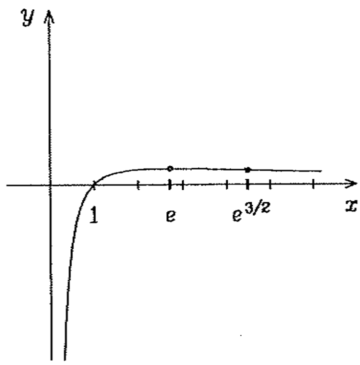
		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	
f''	−	−	−	n.ért.	−	0	+	+	+
f'	+	0	−	n.ért.	−	−	−	0	+
f	↗ ⌢	MAX	↘ ⌢	n.ért.	↘ ⌢	INFL	↘ ⌣	MIN	↗ ⌣

150. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
(2) f páratlan függvény, így elég csak a $[0, \infty)$ intervallumon vizsgálni.
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.
(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$\lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = \lim\limits_{x\to1\pm0} f(x) = \pm\infty$.
$a = 0$, $b = \pm\infty$, tehát ferde aszimptota nincs, a két függőleges aszimptota egyenlete $x = -1$ és $x = 1$.
(5) $f(0) = 0$.
(6-7) $f'(x) = \dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$,
$f''(x) = \dfrac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$.
$f'(x) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{3}$. $f''(x) = 0$, ha $x = 0$, $x = \pm 3$.



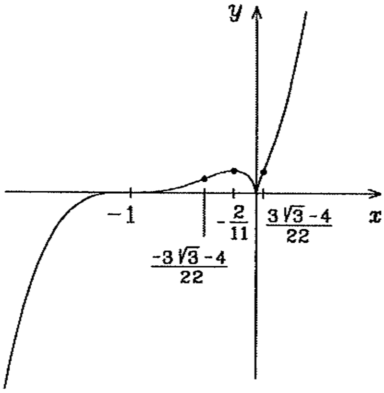
	0		1		$\sqrt{3}$		3	
f''	0	+	n.ért.	+	+	+	0	−
f'	−	−	n.ért.	−	0	+	+	+
f	INFL	↘ ⌣	n.ért.	↘ ⌣	MIN	↗ ⌣	INFL	↗ ⌢

151. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}^+$
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.
(4) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, tehát az $x = 0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota, az $y = 0$ egyenletű egyenes ferde aszimptota.
(5) $f(x) = 0$, ha $x = 1$.
(6) $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$. $f'(x) = 0$, ha $x = e$. f monoton nő, ha $0 < x < e$, monoton csökken, ha $x > e$, f-nek $x = e$-ben maximuma van.
(7) $f''(x) = (2\ln x - 3)/x^3$. $f''(x) = 0$, ha $x = e^{3/2}$. f konkáv, ha $0 < x < e^{3/2}$, konvex, ha $x > e^{3/2}$, f-nek $x = e^{3/2}$-ben inflexiós pontja van.

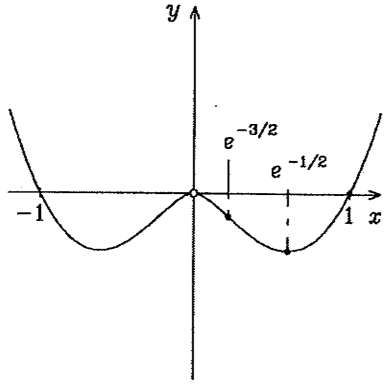


152. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}^+$, minimum: $x = 1/e$, határértéke $+0$-ban 1, konvex.

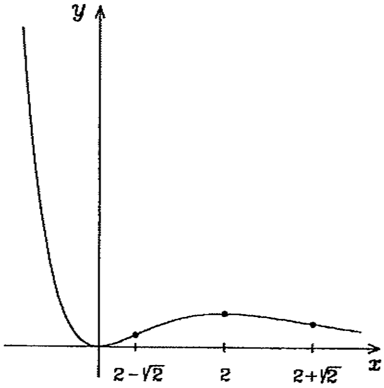
153.



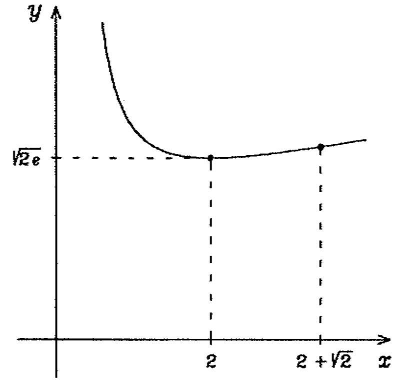
154.



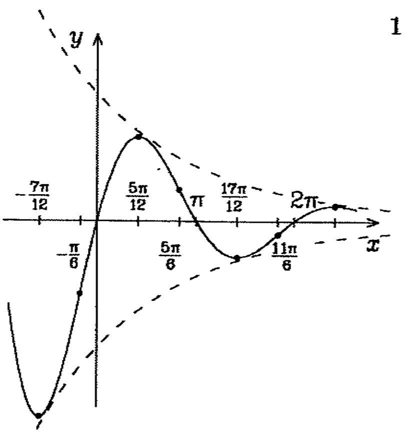
155.



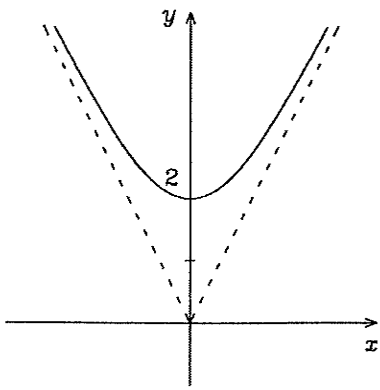
156.



157.



158.



159. A definíció 3. feltétele nem teljesül a $t_0 = 0$ pontban, tehát a görbe síma görbeív lesz, ha $0 \notin (t_1, t_2)$, azaz ha $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

160. A definíció 1. feltétele nem teljesül a $t_0 = 0$ pontban, tehát a görbe síma görbeív lesz, ha $0 \notin (t_1, t_2)$, azaz ha $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

161. A definíció 2. feltétele nem teljesül, ha $t_1 = 0$, vagy $t_2 = 0$. Az 1. feltétel nem teljesül, ha $0 \in (t_1, t_2)$. Tehát a görbe síma görbeív lesz, ha $0 < t_1 < t_2$, vagy ha $t_1 < t_2 < 0$. (Itt nem elég, hogy $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$.)

162. $t \neq 0$ $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{6t^2}{6t} = t$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{1}{6t}$. A másik képlettel is kiszámítva: $\ddot{x} = 6$, $\ddot{y} = 12t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \dfrac{1}{6t}$.

163. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t}{4}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{48t}$, $t \neq 0$.

164. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$, $t \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

165. $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\sin t}{3}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{5\cos^3 t}{9}$.

166. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + 3t^2}{2t^3}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3(1 + t^2)^3}{8t^5}$, $t \neq 0$.

167. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \dfrac{2}{3}$, az egyenes egyenlete: $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$.

168. (a) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \dfrac{3}{2}$, az egyenes egyenlete: $y = \dfrac{3}{2}x$.

(b) A görbe nem síma a $t_0 = 1$ paraméterű pontban, mert $\dot{y}(1) = \dot{x}(1) = 0$, de létezik a $\lim_{t\to 1} \dot{y}/\dot{x} = 3$ határérték, így az érintő is. Egyenlete $y = 3x - 1$.

169. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0} = \left.\dfrac{2t^2 - 3}{2t^2 + 3}\right|_{t_0} = -\dfrac{1}{2}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t_0} = \left.\dfrac{24t^3}{(2t^2 + 3)^3}\right|_{t_0} = \dfrac{3\sqrt{2}}{32}$.

$$\left(x - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1000}{9}.$$

170. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0} = \sqrt{3}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t_0} = -4$.

$$\left(x - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

171. Ha $t \geq 0$, akkor $x = 3t$, $y = 9t^2$, azaz $y = x^2$. Ha $t \leq 0$, akkor $x = t$, $y = t^2$, azaz ismét $y = x^2$. E függvény pedig differenciálható az $x(0) = 0$ pontban, és $y'(0) = 0$.

12. Határozatlan integrál (megoldások)

1. $\frac{7}{5}x^5 + C.$

2. $\int \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^{1/5}\,dx = \frac{5}{6}x^{6/5} + C.$

3. $\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + C.$

4. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$

5. $\int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}\,dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C.$

6. $2e^x + 5\ln|x| + \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx = \int\left(x - 3 + \frac{4}{x}\right) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x| + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+5} = \int\left(x^2 - 5x + 25 - \frac{125}{x+5}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 25x-$
$- 125\ln|x+5| + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \int\left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right)dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

10. $\dfrac{x^2}{2} - \sqrt{2}x + C.$

11. $\dfrac{x^3}{3} - a^2x + a^3 \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$ (**P 12.7**)

12. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}a^3\ln\left|x^3 - a^3\right| + C.$

13. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$

14. $\dfrac{1}{202}(2x-3)^{101} + C.$

15. $-\dfrac{1}{4(2+3x^2)^2} + C.$

16. $-\dfrac{1}{2(1+x^2)} + C.$

17. $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C.$

18. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C.$

19. $\dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$, ha $b \neq 0,\ n \neq -1$; $\dfrac{\ln|a+bx|}{b} + C$, ha $b \neq 0,\ n = -1$;
$a^n x + c$, ha $b = 0$.

20. $\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(1+r^3)^4} + C.$

21. $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C.$

22. $-\sqrt{1-x^2} + C.$

23. $\dfrac{1}{4}\sin^4 x + C.$

24. $\cos^3 x\,dx = \int\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

25. $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

26. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

27. $\dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C.$

28. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x}\cdot(-\sin x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

29. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x)}\,dx =$
$\displaystyle\int (\sin x + \sin x \cos x)\,dx = -\cos x + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

30. $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

31. $\frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x} + C.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x \cos^4 x}} = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ átalakítással az eredmény: $2\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$

33. $\frac{1}{3}\ln^3 x + C.$

34. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} + C.$

35. $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C.$

36. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x + C.$

37. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\,dx = \sqrt{2}\int \operatorname{ch}\frac{x}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2} + C.$

38. $\frac{7}{4}\ln|4x-1| + C.$

39. $\ln(4x^2 - 7x + 11) + C.$

40. $\ln(x^2 + 3x - 10) + C.$

41. $-\ln\left|2x^2 - 3x + 1\right| + C.$

42. $\ln\sqrt{x^2 + a^2} + C.$

43. $\ln(a^3 + x^3) + C.$

44. Az $\displaystyle\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, vagy az $\displaystyle\frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$ azonosság alkalmazásával az eredmény: $\ln|\operatorname{tg} x| + C.$

45. Az előző feladat eredményét felhasználva:
$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \ln|\operatorname{th} x| + C.$

47. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,dx = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$

48. $\ln\sqrt{1 + e^{2x}} + C.$

49. $\displaystyle\frac{1}{\ln a}\ln(a^x + 1) + C.$

50. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C.$

51. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}(x+1) + C.$

52. $\displaystyle\begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{1}{2}(3x-1) + C, & \text{ha } -\frac{1}{3} < x < 1 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{1}{2}(3x-1) + C, & \text{ha } x < -\frac{1}{3}, \text{ vagy } x > 1 \end{cases} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{x-1}\right| + C$

53. $\displaystyle\begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{1}{2}(x-1) + C, & \text{ha } -1 < x < 3 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{1}{2}(x-1) + C, & \text{ha } x < -1, \text{ vagy } x > 3 \end{cases} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right| + C$

54. $\displaystyle\begin{cases} -\frac{1}{5}\operatorname{arth}\frac{1}{5}(x-3) + C, & \text{ha } -2 < x < 8 \\ -\frac{1}{5}\operatorname{arcth}\frac{1}{5}(x-3) + C, & \text{ha } x < -2, \text{ vagy } x > 8 \end{cases} = -\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x+2}{x-8}\right| + C$

55. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4 + x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1 + (x^2/2)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C.$

56. $\dfrac{1}{2a^4}\displaystyle\int \dfrac{1}{1-(x^2/a^2)^2}\cdot 2x\,dx$ átalakítással az eredmény

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2a^2}\operatorname{arth}\dfrac{x^2}{a^2}+C=\dfrac{1}{4a^2}\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+C, & \text{ha } |x|<|a| \\ \dfrac{1}{2a^2}\operatorname{arcth}\dfrac{x^2}{a^2}+C=\dfrac{1}{4a^2}\ln\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+C, & \text{ha } |x|>|a|. \end{cases}$$

57. $\dfrac{-1}{4\sqrt{2}}\displaystyle\int \dfrac{1}{1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\dfrac{4x^3}{\sqrt{2}}\,dx$ átalakítással az eredmény: $\dfrac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\dfrac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C,$

ill.

$-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arth}\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}+C$, ha $|x|<\sqrt[8]{2}$, és

$-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arcth}\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}+C$, ha $|x|>\sqrt[8]{2}$.

58. $\frac{1}{3}\operatorname{arsh}(3x-1)+C.$

59. A $\sqrt{9x^2-6x+5}=2\sqrt{(\frac{3x-1}{2})^2+1}$ átalakítással:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}=\frac{1}{3}\operatorname{arsh}\frac{3x-1}{2}+C=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2-6x+5}+3x-1\right|+C.$$

60. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-3}}=\frac{1}{3}\operatorname{arch}\frac{3x-1}{2}+C=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2-6x-3}+3x-1\right|+C.$

61. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3+6x-9x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{2}+C.$

62. $(1/\sqrt{3})\operatorname{arch}(\sqrt{3}x)+C.$

63. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\dfrac{3}{2}}x+C.$

64. $\displaystyle\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}^2\right)}\cdot(\sqrt{x})'\cdot 2\,dx=2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

65. $2\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=2e^{\sqrt{x}}+C.$

66. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\cdot(e^x)'\,dx=\arcsin e^x+C.$

67. $\dfrac{1}{\ln a}\displaystyle\int\frac{1}{1+(a^x)^2}\cdot a^x\ln a\,dx=\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}a^x+C.$

68. $-\cos\ln x+C.$

69. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}\,dx=\int\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{2\operatorname{ch}^2x-1}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)^2-1}}\cdot(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)'\,dx=$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arch}(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)+C.$

70. $\ln|\ln x|+C.$

71. $\ln|\ln\ln x|+C.$

72. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x+2\cos^2x}=\int\frac{dx}{2\cos^2x\left(\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}=$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+\left(\operatorname{tg} x/\sqrt{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x}\, dx$$ átalakítással az eredmény
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

73. A előző feladat megoldásához hasonlóan az eredmény
$$\begin{cases} ab \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) + C, & \text{ha } |a| \neq |b| \\ a^2 x + C, & \text{ha } |a| = |b|. \end{cases}$$

74. $x \sin x + \cos x + C$, **75.** $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

76. $\frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$. **77.** $\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

78. $-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

79. $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$.

80. $x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C$.

81. $\frac{1}{8}(2x^2 + 2x \sin 2x + \cos 2x) + C$.

82. $\frac{3^x}{\ln 3}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\right) + C$. **83.** $-(x+1)e^{-x} + C$.

84. $-\frac{1}{2} e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C$. **85.** $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

86. $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$.

87. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$, ($a, b \neq 0$ konstans).

88. $\frac{1}{26} e^{6x}(3 \cos 4x + 2 \sin 4x) + C$. **89.** $\frac{1}{10} e^x (5 - \cos 2x - 2 \sin 2x) + C$.

90. $f'(x)$-ként az 1 konstansfüggvényt választjuk. Az eredmény:
$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

91. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$.

92. $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + C$.

93. $x \arccos \frac{1}{x} - \operatorname{arch} x + C$. **94.** $x \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln(x^2+9) + C$.

95. Legyen $f'(x) = x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ és $f(x) = x^2/2$. Ekkor
$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$
Megjegyzés: Az $f(x)$ megválasztásánál általában nem vagyunk tekintettel az integrációs konstansra, ügyes megválasztása azonban néha egyszerűsítheti a megoldást. Például az $f(x) = (x^2+1)/2$ választással:
$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

96. $$I = \int \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\, dx$$
$$= x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

97. $-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

98. $\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$

99. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\operatorname{arsh}x+C=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

100. $\int 1\cdot\ln x\,dx=x\ln x-x+C.$

101. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C.$

102. $x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6)+C.$

103. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C.$

104. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C.$

105. $x\ln\frac{8-x}{3}-x-8\cdot\ln|x-8|+C.$

106. $x\lg\frac{4e}{x}+C.$

107. $\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C.$

108. $C-\frac{1}{2x^2}\ln(x\sqrt{e}).$

109. $\frac{x^{v+1}}{v+1}\left(\ln x-\frac{1}{v+1}\right)+C.$

110. $\operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x+C.$

111. $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C.$

112. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x+C.$

113. $(-x^2+2x-2)\operatorname{ch}x+(2x-2)\operatorname{sh}x+C.$

114. $\frac{1}{26}(\operatorname{sh}x\cos 5x+5\operatorname{ch}x\sin 5x)+C.$

115. A kiszámítandó integrált röviden I-vel jelölve

$$I=\int\cos^{n-1}x\cos x\,dx=$$
$$=\cos^{n-1}x\sin x+\int(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx=$$
$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx=$$
$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)I.$$
$$nI=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx,$$
$$I=\frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$$

116. Hasonlóan az előző feladat megoldásához.

117. $x=\sin t$ helyettesítéssel $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$

118. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

119. $\frac{a^2}{2}\operatorname{arsh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$

120. $\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arsh}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}+\frac{x}{2}\sqrt{5+3x^2}+C.$

121. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

122. $u=\sqrt{c+x}$ helyettesítéssel a megoldás: $\frac{2}{15}\sqrt{(c+x)^3}(3x-2c)+C.$

123. $u=\sqrt{c+x}$ helyettesítéssel $-\frac{2}{\sqrt{c}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{c+x}}{c}+C=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|\frac{\sqrt{c+x}-c}{\sqrt{c+x}+c}\right|+C.$

124. $\frac{3}{8}\operatorname{arch} x + \frac{1}{8}x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1) - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + C.$

125. $x = \sin t$ helyettesítéssel a megoldás $\operatorname{tg}\arcsin x + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

126. $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsh} x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C.$

127. $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \operatorname{arsh} x + C.$

128. A $\sqrt{x} = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel a megoldás: $\operatorname{arch}\sqrt{x} + \sqrt{x(x-1)} + C.$

Vagy: $\sqrt{\frac{x}{x-1}} = u$ helyettesítéssel $\int \frac{-2u^2}{(u^2-1)^2}\,du$ adódik, ezt $u \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2}$ felbontással parciálisan integrálva a végeredmény:

$\sqrt{x(x-1)} + \operatorname{arth}\sqrt{\frac{x}{x-1}} + C.$

129. A $\sqrt{x} = \sin t$ helyettesítéssel $\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} + C.$

Vagy: $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = u$ helyettesítéssel $-\sqrt{x(1-x)} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C.$

130. A

$$\sqrt{3-2x-x^2} = \sqrt{4-(x+1)^2} = \sqrt{4\left(1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)}$$

átalakítás után az $\frac{x+1}{2} = \sin t$ helyettesítéssel a megoldás:

$2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.$

131. $\frac{5}{2\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}x + \frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2} + C.$

132. $\frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x+1) + \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + C.$

133. A $\sqrt{3x^2-3x+1} = \sqrt{3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+1}$ átalakítás után a $2\sqrt{3}x-\sqrt{3} = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel a megoldás:

$\frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\operatorname{arsh}(2\sqrt{3}x-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}x-\sqrt{3})\sqrt{3(2x-1)^2+1}\right] + C.$

134. $2\operatorname{arsh}\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2} + C.$

135. $8\arcsin\frac{x-1}{4} + \frac{x-1}{2}\sqrt{15+2x-x^2} + C.$

136. Az $\frac{x}{a} = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C.$

137. $u = \frac{a}{x}$ helyettesítéssel a megoldás: $-\frac{1}{a}\operatorname{arsh}\frac{a}{x} + C.$

138. $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + C.$ **139.** $\frac{1}{12}\sqrt{(1+2x^2)^3} - \frac{1}{4}\sqrt{1+2x^2} + C.$

140. $x = \dfrac{1}{u}$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x^3}{x^3+1}\right| + C.$

141. A $x = u^4$ helyettesítéssel a megoldás: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + C.$

142. Az $x = u^6$ helyettesítéssel a megoldás: $6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C.$

143. $x = u^2$ helyettesítéssel a megoldás: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$

144. $x = u^4$ helyettesítéssel a megoldás: $\dfrac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right] + C.$

145.
$$\begin{cases} \sqrt{2}\,\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}} + C, & 2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}) < x < 2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\,\operatorname{arcth}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}} + C, & x < 2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}),\ \text{vagy}\ x > 2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{2}-1)\cos x + \sin x + \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2}+1)\cos x - \sin x + \sqrt{2} + 1}\right| + C.$$

146. A $\sin x = t$ helyettesítéssel, vagy (6) alapján, és felhasználva, hogy $\sqrt{1-\cos^2 x} = \operatorname{sgn}(\sin x)$, az eredmény:
$$-\operatorname{sgn}(\sin x)\operatorname{arsh}(\sin x) + C = -\operatorname{sgn}(\sin x)\ln\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right) + C.$$

147. $-\dfrac{2}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1} + C.$

148. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C.$ **149.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$ **150.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + C.$

151. $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg} x + 4}{3} + C.$

152. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \int \frac{dx}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}$ átalakítás után $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$

153. $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítéssel $(1/2)\operatorname{tg}^2 x - (1/2)\operatorname{ctg}^2 x + 2\ln|\operatorname{tg} x| + C$. A számítás rövidebb, ha a $\sin^3 x\cos^3 x = \frac{1}{8}\sin^3 2x$ átalakítással kezdjük, majd a $\sin 2x$ helyébe (a $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítésnek megfelelően) a $\dfrac{2t}{1+t^2}$ kifejezést írjuk.

154. $x = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ helyettesítéssel: $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{tg}^2 t - 1}{\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)^3}\frac{dt}{\cos^2 t} =$
$$= \int\left(3\sin^2 t\cos^2 t - \cos^4 t\right)dt = \sin t\cos^3 t = \frac{\operatorname{tg} t}{(\operatorname{tg} t + 1)^2} = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

155. Az $u = \ln x$ helyettesítéssel $\ln x(\ln\ln x - 1) + C.$

156. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}}$ átalakítás után $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arsh}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$

157. Az $\sqrt{e^x-1}=u$ helyettesítéssel $2\int \frac{u^2}{u^2+1}\,du =$
$= 2\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right)+C.$

158. $e^x - \ln(e^x+1)+C.$ **159.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$

160. A $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ helyettesítéssel a kiszámítandó I integrál: $I=\frac{2}{c+b}\int\frac{dt}{1+\frac{c-b}{c+b}t^2}.$

Az $c=b$ esetben $I=\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

Ha $c>b$: $\frac{c-b}{c+b}t^2=\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}t\right)^2$, $I=\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

Az $c<b$ esetben $\frac{c-b}{c+b}t^2=-\left(\sqrt{\frac{b-c}{c+b}}t\right)^2$, és ezért

$$I=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C, & \text{ha } |x|<2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{b+c}{b-c}}\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C, & \text{ha } |x|>2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{b+c}{b-c}}.\end{cases}$$

161. $\frac{1}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$. A kiszámítandó határozatlan integrál:
$\int\left(\frac{\frac{1}{12}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{12}(x+4)}{x^2+2x+4}\right)dx=\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+K.$

162. $-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+C.$ **163.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C.$

164. $\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right|+C.$ **165.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

166. $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$

167. $\int\left(\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{(x-2)^3}+\frac{A_4}{(x-2)^4}\right)dx=$
$=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^3}+\frac{1}{(x-2)^4}\right)dx=$
$=\ln|x-2|+\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-2)^3}+C.$

168. $\int\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{2(x-2)^2}\right)dx=$
$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}+C.$

169. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$

170. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

171. $\frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{x^6(3+5x^6)}\,dx$ átalakítás és $u = x^6$ helyettesítés után elemi törtekre bontással az eredmény: $\frac{1}{18}\ln\frac{x^6}{5x^6+3}+C$.

172. $\int \frac{8x^3}{x^4(7+3x^4)}\,dx$ átalakítás és $u = x^4$ helyettesítés után elemi törtekre bontással az eredmény: $\frac{7}{2}\ln\frac{x^4}{3x^4+7}+C$.

173. $2\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right|+C$.

174. Az $x^x = t$ helyettesítéssel $x\ln x = \ln t$; mindkét oldalt t szerint differenciálva $(\ln x+1)\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$. Emiatt

$$\int \frac{\ln x+1}{x^x-1}\,dx = \int \frac{\ln x+1}{t-1}\cdot\frac{dt}{t(\ln x+1)} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt =$$
$$= \ln\left|\frac{x^x-1}{x^x}\right|+C.$$

175. $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$.

176. Parciális integrálással: $xf'(x)-f(x)+C$.

177. $\frac{1}{2}f(2x)$.

178. Az adott egyenletből kapjuk, hogy $2xf'(x^2) = 2$, aminek mindkét oldalát integráljuk: $f(x^2) = 2x+C$, azaz $f(x) = 2\sqrt{x}+C$.

179. $f(x) = x-\frac{1}{2}x^2+C$.

180. A formula igaz voltát mindkét oldal deriválásával igazolhatjuk.

181. Ha $x\ge 0$, akkor az integrál értéke $\frac{1}{2}x^2+C_1$, ha $x\le 0$, akkor az integrál értéke $-\frac{1}{2}x^2+C_2$. A két konstanst úgy kell megválasztani, hogy a kapott függvény mindenütt differenciálható legyen. Így az integrál értéke: $\frac{1}{2}x|x|+C$.

182. $\frac{1}{3}x^2|x|+C$.

183. $\frac{1}{2}((1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|)+C$.

184. e^x-1+C, ha $x<0$; $1-e^{-x}+C$, ha $x\ge 0$.

185. $x+C$, ha $|x|\le 1$; $\frac{1}{3}(x^3+2\operatorname{sgn}x)+C$, ha $|x|>1$.

186. $\int \frac{1}{x^2}\arcsin x\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin x+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. A második tagban $x = \frac{1}{u}$ helyettesítéssel a végeredmény: $-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$.

187. $\int\frac{x^2+(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^2}\,dx = \operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}+C$.

188. $\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)-x^2+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$.

189. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^3-5)^2-16} = -\frac{1}{3\cdot 4^2}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x^3-5}{4}\right)^2}\cdot 3x^2\,dx$ átalakítással

az eredmény: $\begin{cases} -\dfrac{1}{12}\operatorname{arth}\dfrac{x^3-5}{4}+C, & \text{ha } 1<x<3\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{12}\operatorname{arcth}\dfrac{x^3-5}{4}+C, & \text{ha } x<1, \text{ vagy } x>3\sqrt{3}. \end{cases}$

190. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}+C.$

191. $\displaystyle\frac{2}{9}\ln\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{27}\cdot\frac{1}{x-\frac{2}{3}}+C.$ **192.** $\displaystyle\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8)-4\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$

193. A nevezőt másodfokú tényezőkre bontjuk: $1+x^4=1+2x^2+x^4-2x^2=\left(1+x^2\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=(1+x^2+\sqrt{2}x)(1+x^2-\sqrt{2}x)$.

Tehát $\displaystyle\frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$, azaz

$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, amiből

$1=(A+C)x^3+(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)x^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x+B+D.$

A megfelelő együtthatók összehasonlításából:

$$\begin{aligned} A+C&=0\\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D&=0\\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D&=0\\ B+D&=1\,. \end{aligned}$$

Ezekből $B=D=\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}+\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)+C.$$

194. $\displaystyle 2\sqrt{7}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$

195. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arth}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}}+C$, ha $\sqrt{1-\sqrt{2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{2}}$, és

$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arcth}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}}+C$, ha $x<-\sqrt{1-\sqrt{2}}$, vagy $x>\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

196. Az $\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$ felbontással parciális integrálást végezve, majd a még integrálandó tag számlálójában $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ átalakítást alkalmazva a kiszámítandó I határozatlan integrálra az $I=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$ egyenletet kapjuk, amiből

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C.$$

197. $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C.$

198. $-\dfrac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|+C.$

199. $$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x\cos^2 x}\,dx=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x}\,dx=$$
$$=\operatorname{tg} x+\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C\,.$$

200. $-\operatorname{ctg} x-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C.$

201. $\operatorname{tg}^3 x\,dx=\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg} x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\operatorname{tg} x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C.$

202. $\displaystyle\int\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx=\int\frac{1}{\sin 2x}\,dx+\int\frac{\operatorname{tg} x}{2\sin x\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C.$

203. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}x+C.$

204. $\operatorname{tg}^2 x\,dx=\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x-x+C.$

205. $u=\operatorname{tg} x$ helyettesítéssel
$$\int\frac{u^5}{1+u^2}\,du=\int\left(u^3-u+\frac{u}{u^2+1}\right)du=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$$

206. $\operatorname{tg} x-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sin 2x}{4}+C.$

207. $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C.$

208. Az $u'=x$ és $v=(\operatorname{arctg} x)^2$ választással $\displaystyle\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx=\frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-$ $\displaystyle-\int\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$ (Lásd a 11.103/a és /b feladatokat.)

209. $a^x\left(\dfrac{x^2}{\ln a}-\dfrac{2x}{\ln^2 a}+\dfrac{2}{\ln^3 a}\right)+C.$

210. $\operatorname{ch} x+\dfrac{2}{\operatorname{ch} x}-\dfrac{1}{3\operatorname{ch}^3 x}+C.$

211. $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$ helyettesítéssel az eredmény: $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arth}\dfrac{a\operatorname{th}\frac{x}{2}-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

212. A kiszámítandó integrált I-vel jelölve

$$I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{(a+b\operatorname{sh}x)^2}\,dx = -\frac{1}{b^2}\int b\operatorname{ch}x\frac{-b\operatorname{ch}x}{(a+b\operatorname{sh}x)^2}\,dx - \frac{1}{b^2}\int\frac{b^2\operatorname{sh}^2 x}{(a+b\operatorname{sh}x)^2}\,dx.$$

Parciálisan integrálva a $g = b\operatorname{ch}x$ és $f' = \dfrac{-b\operatorname{ch}x}{(a+b\operatorname{sh}x)^2}$ választással

$$I = -\frac{1}{b^2}\left[\frac{b\operatorname{ch}x}{a+b\operatorname{sh}x} - \int\frac{a}{a+b\operatorname{sh}x}\,dx\right] - \frac{a^2}{b^2}I,$$

$$I = -\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b\operatorname{ch}x}{a+b\operatorname{sh}x} - \int\frac{a}{a+b\operatorname{sh}x}\,dx\right] + C.$$

Az utóbbi integrál kiszámításához lásd az előző feladatot.

213. $\frac{1}{2}x(\sin\ln x - \cos\ln x) + C.$

214. $\operatorname{arsh}x - \operatorname{arch}x + C.$

215. $|a| = |b|$ esetén az integrál $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{|a|}\,dx = \frac{1}{2|a|}\sin^2 x + C.$

$|a| \neq |b|$ esetben viszont $(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)' = 2(a^2-b^2)\sin x\cos x.$

Ekkor az eredmény: $\dfrac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2} + C.$

216. $\sqrt{3}\cos x = \operatorname{sh}u$-t véve $I = -\sqrt{3}\left[-\operatorname{cth}\operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos x) + \operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos x)\right] + C.$

217. $\displaystyle I = \int\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\sqrt{1+\cos^4 x}\,dx = \int\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}\sqrt{1+\cos^4 x}\,dx.$

Legyen $\cos^2 x = \operatorname{sh}u$, ekkor $-2\cos x\sin x\,dx = \operatorname{ch}u\,du$, és

$$I = \int\frac{-\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u}\,du = -\int\frac{1+\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u}\,du = \operatorname{cth}u - u + C = \frac{\operatorname{ch}u}{\operatorname{sh}u} - u + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{arsh}\cos^2 x + C.$$

218. Átalakításokkal $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{1}{4}(1+3\cos^2 2x).$

$\displaystyle I = \int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1+3\cos^2 2x}\,dx.$ Legyen $\sqrt{3}\cos 2x = \operatorname{sh}u$, akkor

$$I = -\frac{1}{16\sqrt{3}}\left[\operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos 2x) + \sqrt{3}\cos 2x\sqrt{1+3\cos^2 2x}\right].$$

219. $\displaystyle I = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(a+b\cos x)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{b^2}\int b\sin x\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^2}\,dx + \frac{1}{b^2}\int\frac{b^2\cos^2 x}{(a+b\cos x)^2}\,dx.$$

Parciálisan integrálva a $g = b\sin x$ és $f' = \dfrac{b\sin x}{(a+b\cos x)^2}$ választással

$$I = \frac{1}{b^2}\frac{b\sin x}{a+b\cos x} - \frac{1}{b^2}\int\frac{a}{a+b\cos x}\,dx + \frac{a^2}{b^2}I.$$

13. Határozott integrál (megoldások)

1. $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{5}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{91}{60}.$

2. A bal végpontokat választva: $x_i=\frac{i}{n}$, $x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n}$, $f(\xi_i)=\frac{i-1}{n}$.
$$\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$
A jobb végpontokat választva: $f(\xi_i)=\frac{i}{n}$,
$$\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

3. $\frac{1}{3}$. **4.** 4.

5. $\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{4}{2}-\frac{0}{2}=2.$

6. $\int_0^4\left(5x^3+1\right)dx=\left[\frac{5x^4}{4}+x\right]_0^4=324.$

7. A T 13.2 (6) tételt alkalmazzuk: a $[2,4]$ intervallumon az e^{-x^2} és a $\sin\frac{\pi x}{4}$ függvény is monoton csökkenő, így
$$0\le e^{-x^2}\sin\frac{\pi x}{4}\le e^{-4},\quad \text{tehát}\quad 0\le I\le 2e^{-4}.$$

8. Az integrál–középértéktétel alapján $\int_{-4}^{-1}3x^2\,dx=3c^2\cdot(-1-(-4))$.
Mivel $\int_{-4}^{-1}3x^2\,dx=[x^3]_{-4}^{-1}=-1-(-64)=63$, ezért $63=9c^2$, azaz $c=\pm\sqrt{7}$.
A $[-4,-1]$ intervallumba a $c=-\sqrt{7}$ érték esik.

9. $c=\frac{2257}{288}=7,837.$ **10.** $c=\arccos\sqrt{\frac{\pi}{4}}$. **11.** $c=\arcsin\frac{2}{\pi}$.

12. $c_1=\arcsin\frac{2}{\pi}$, $c_2=\pi-\arcsin\frac{2}{\pi}$.

13. $\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{1-(x/2)^2}}=\lim_{b\to 2-0}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^b=\frac{\pi}{2}.$

14. $\lim_{a\to-2-0}\left[5(x+2)^{1/5}\right]_{-3}^{a}+\lim_{b\to-2+0}\left[5(x+2)^{1/5}\right]_b^0=5(1+\sqrt[5]{2}).$

15. $\sqrt[3]{2}\lim_{a\to+0}\int_a^2 x^{-\frac{1}{3}}\,dx=3.$ **16.** $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^{2/3}}\,dx=6.$

17. $\frac{14}{5}$. **18.** $\sqrt{3}$. **19.** Nem konvergens.

20. Parciális integrálás után 2. **21.** 2.

22. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1.$

23. Nem konvergens.

24. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}\right).$

25. Nem konvergens.

26. $-\frac{1}{2}.$

27. 1, (mert $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=0.$)

28. Nem konvergens.

29. $\frac{1}{\ln 2}.$

30. A $\sin x-\cos x$ korlátossága miatt $\lim_{x\to\infty} e^{-x}(\sin x-\cos x)=0$. Ezért az improprius integrál értéke: $\frac{1}{2}$.

31. 2.

32. $\frac{1}{4}.$

33. $\int_0^b \ln x\,dx = \lim_{a\to+0}\left[x\ln x - x\right]_a^b = b\ln b - b - \lim_{a\to+0}(a\ln a - a).$

Mivel $\lim_{a\to+0} a\ln a = \lim_{a\to+0}\frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a\to+0}\frac{1/a}{-1/a^2}=0$, ezért $b\ln b-b=0$, amiből a keresett b-re $b=e$.

34. $32\left(1-\frac{1}{\ln 4}\right)+\frac{15}{\ln^2 4}.$

35. $\frac{\pi}{2}.$

36. $\frac{\pi}{\sqrt{6}}.$

37. Nem konvergens.

38. Nem konvergens.

39. 2.

40. $\frac{\pi}{4}$.

41. 6.

42.

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2||x-3|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)(3-x)}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} +$$
$$+\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = -\ln(3-2\sqrt{2})+\pi+\ln(2\sqrt{2}+3) = \ln(12\sqrt{2}+17)+\pi \approx$$
$$\approx 6.667\,.$$

43. Divergens, mivel a $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$ $\left(\text{és a } \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx\right)$ integrál divergens.

44.

$$p>1:\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^a = \frac{1}{p-1}$$
$$p<1:\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^a = \infty$$
$$p=1:\quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\ln x\right]_1^a = \infty\,.$$

45. Az előző feladathoz hasonlóan.

46. A keresett T terület: $T = \int_0^3 \frac{dx}{2x+4} = \frac{1}{2}\left[\ln(2x+4)\right]_0^3 = \ln\frac{\sqrt{10}}{2}$.

47. $\frac{59}{6}$.

48. A függvény grafikonja az $\left[1, \sqrt[3]{3}\right)$ intervallumon az x tengely alatt, a $\left(\sqrt[3]{3}, 2\right]$ intervallumon az x tengely felett halad. Ezért a keresett T terület:

$$T = -\int\limits_1^{\sqrt[3]{3}} (x^3-3)\,dx + \int\limits_{\sqrt[3]{3}}^{2} (x^3-3)\,dx = \frac{1}{4}\left(18\sqrt[3]{3}-19\right).$$

49. A függvény a $[0,1)$ intervallumon az x tengely alatt, az $(1,2]$ intervallumon az x tengely felett halad. Ezért a keresett T terület:

$$T = -\int_0^1 \operatorname{sh}(x-1)\,dx + \int_1^2 \operatorname{sh}(x-1)\,dx = 2(\operatorname{ch}1 - 1).$$

50. $\frac{163}{15}$. **51.** $\frac{2+4\sqrt{2}}{3}$. **52.** $\frac{\pi}{4}$. **53.** $\frac{46}{9}$.

54. A függvény grafikonja a $[0,2)$ intervallumon az x tengely felett, a $(2,4]$ intervallumon az x tengely alatt halad. Ezért a keresett T terület: $T =$

$$\int_0^2 (1-3^{x-2})\,dx - \int_2^4 \left(1-3^{x-2}\right)\,dx = \left[x - \frac{3^{x-2}}{\ln 3}\right]_0^2 - \left[x - \frac{3^{x-2}}{\ln 3}\right]_2^4 = \frac{64}{9\ln 3}.$$

55. A függvény grafikonja az $[1,2)$ intervallumon az x tengely alatt, a $(2,e]$ intervallumon az x tengely felett halad. A keresett T terület:

$$T = -\int_1^2 \ln\frac{x}{2}\,dx + \int_2^e \ln\frac{x}{2}\,dx = 3-(e+1)\ln 2.$$

56. $\frac{52}{3}$. **57.** $\frac{8}{5}$. **58.** 20. **59.** $\frac{1}{20}$.

60. Legyen $1-x=\cos^3 t$; $\frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t\sin t$.

Ha $x = 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$, akkor $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t = \frac{\pi}{6}$.

Ha $x = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$, akkor $\cos t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\pi}{3}$.

$$T = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \left(1-\left[1-\cos^2 t\right]^{3/2}\right) 3\cos^2 t\sin t = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\sin^3 t)3\cos^2 t\sin t =$$

$$\left[-\cos^3 t - \frac{3}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + \frac{\sin^3 2t}{16}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{21\sqrt{3}-8}{64} - \frac{\pi}{32}.$$

61. $T = \int_1^4 \lg\frac{4}{x}\,dx - \int_4^6 \ln\frac{4}{x}\,dx = \lg\frac{6^6\cdot e}{4^7}$.

62. 2. **63.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. **64.** $\frac{(5e-1)^2}{5e(1+\ln 5)}$.

65. Az $y = 2x^2 - 1$ egyenletű parabola és az x-tengely metszéspontjai $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, így $T = \left|\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^2 - 1)\, dx\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

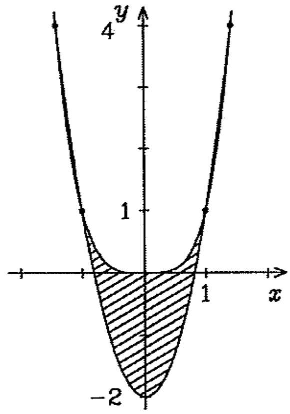
66. $T = \int_0^{1+\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{2})$.

67. $T = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2)\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

68. $T = \int_{1/3}^{4} \left(\frac{13}{3} - x - \frac{4}{3x}\right) dx = \frac{143}{18} - \frac{4}{3}\ln 12$.

69. Szimmetria miatt (l. az ábrát)

$$T = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 - 2 - x^4)\, dx + $$
$$+ 2 \cdot \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2)\, dx = \frac{24 - 8\sqrt{2}}{5}.$$



70. $T = 2\int_0^2 \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$.

71. $T = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \frac{4}{3}$.

72. $T = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}$.

73. $T = \int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{x}{2})\, dx = \frac{4}{3}$.

74. $T = \int_0^1 \left(1 - x - (1 - 2\sqrt{x} + x)\right) dx = \frac{1}{3}$.

75. Az $y^2 = x + 3$ egyenletű parabola az x tengelyre szimmetrikus és azt a $(-3, 0)$ pontban metszi. A feladatbeli két görbe metszéspontjai: $(-2, -1)$ és $(6, 3)$. Ezért:

$$T = 2 \cdot \int_{-3}^{-2} \sqrt{x+3}\, dx + \int_{-2}^{6} \left(\sqrt{x+3} - \frac{x}{2}\right) dx.$$

Egyszerűbb a terület kiszámítása, ha az x-t tekintjük y függvényének. Ekkor $T = \int_{-1}^{3} \left(2y - (y^2 - 3)\right) dy = \frac{32}{3}$.

76. Egyszerűbb az y tengely és a görbék közötti területek különbségét kiszámítani: $T = 2\int_0^4 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})\, dy = \frac{32}{3}$.

77. Egyszerűbb a számítás, ha az y tengely és a görbék közötti területek különbségét vesszük: $T = \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{4}y^2 + 1 - y^2\right) dy = \frac{8}{3}$.

78. Az x-et tekintjük y függvényének. A $\sqrt{y} = 2 - y$ egyenletből $y = 1$.
$T = \int_0^1 \left((2 - y) - \sqrt[3]{y}\right) dy = \frac{3}{4}$.

79. $T=\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\int\limits_0^a a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$. Legyen $\frac{x}{a}=\sin t$; ekkor $t_1=0$, $t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ és $T=4\int_{t_1}^{t_2} a\sqrt{1-\sin^2 t}a\cos t\,dt = 4a^2\int_{t_1}^{t_2}\cos^2 t\,dt =$ $a^2\pi$.

80. $T=\int\limits_a^a 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$. $\frac{x}{a}=\sin t$ helyettesítéssel $T=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 dt = ab\pi$.

81. Az integrálás közben $\frac{x}{4}=\sin t$ helyettesítést alkalmazva

$$T=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(-2+\sqrt{4^2-x^2}\right)dx = 2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(-2+4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\right)dx =$$

$$2\left[-2x+8\arcsin\frac{x}{4}+2\cdot x\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}.$$

82. A két kör metszéspontjainak koordinátái: $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$. Ezért a keresett terület x-tengely feletti része:

$$T_1=2\int_0^{\sqrt{3}}(2-\sqrt{4-x^2})\,dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$$=4\left[x-\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]_0^{\sqrt{3}}+4\left[\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]_{\sqrt{3}}^2 =$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}.$$

A keresett T terület az x-tengely alatti félkör területének és T_1-nek összege: $T=2\pi-\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$.

83. $T=\int_0^1\left(3x^{1/3}-3x^{2/3}\right)dx=\frac{9}{20}$.

84. $T=\int_0^{\pi/2}(x-\sin)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}-1$.

85. $T=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos x-(4x^2-\pi^2)\right)dx=2+\frac{2}{3}\pi^3$.

86. $3-e$.

87. $T=\int_0^4 xe^x\,dx=3e^4+1$.

88. $T=\int_0^2(16x-x\cdot 4^x)\,dx=32\left(1-\frac{1}{\ln 4}\right)+\frac{15}{\ln^2 4}$.

89. $\frac{9}{\ln 4}$.

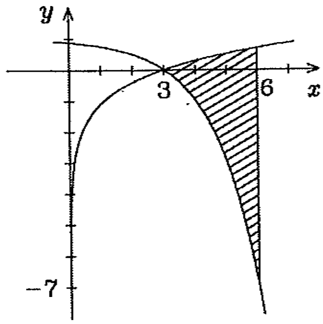
90. $T=\frac{6}{\ln 4}$.

91. A görbék metszéspontja: $x=1$, így:
$T=\int_0^1\left(5^{1-x}+2-3^x\right)dx=2-\frac{2}{\ln 3}+\frac{4}{\ln 5}$.

92. A görbék metszéspontja $x = 3$ (l. **ábra**):

$$T = \int_3^6 \left(\ln\frac{x}{3} - \left(1 - 2^{x-3}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{7}{\ln 2} + 6(\ln 2 - 1).$$



93. $2(e^2 + 1)$.

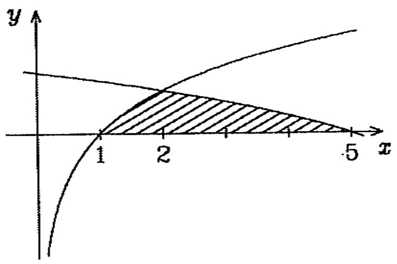
94. $4(\ln 4 - 1)$.

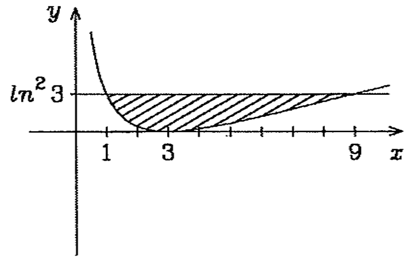
95. $T = \int_1^3 \ln x\, dx + \int_3^9 \left(\ln x - 2\ln\frac{x}{3}\right) dx = 4$.

96. $3 - e$. (L. **12. 98.**)

97. A metszéspontok az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ helyeknél vannak.

$$T = \int_1^2 \ln x\, dx + \int_2^5 \ln\frac{8-x}{3}\, dx = 4(\ln 4 - 1).$$





98. A metszéspontok az $x_1 = 1$, $x_2 = 9$ helyeknél vannak.

$T = \int_1^9 \left(\ln^2 3 - \ln^2\frac{x}{3}\right) dx = 20\ln 3 - 16$. Lásd a fenti jobboldali ábrát.

99. $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $T = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\, dt = 3a^2\pi$.

100. $\frac{1}{6}$. **101.** $a^2\pi$. **102.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

103. $\frac{3ab\pi}{32}$, l. **12.24.** **104.** $-a^2\pi(\pi^2 - 12)/48$.

105. $\dot{x} = 3\cos^2 t \sin t$, $T = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \sin^3 t) 3\cos^2 t \sin t\, dt = \frac{21\sqrt{3} - 8 - 2\pi}{64}$.

106. $a^2(15\sqrt{3}/8 - 1 - \pi)$. **107.** $\pi - \frac{\pi^2}{4}$. **108.** $2a^2\pi$.

109. $T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\, d\varphi = a^2\pi$. **110.** $\left(\frac{r_1^2}{2a}\right)^2$, $(r_1 = r(\varphi_1))$.

111. $\frac{a(a - r_1)}{2}$, $(r_1 = r(\varphi_1))$. **112.** $\frac{a^2\pi}{16}$.

113. $\frac{a^2}{4}$

114. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)$.

115. A **12.157.** szerint $T=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)^2}=$ (l. **11.157**)

$$-\frac{1/2}{1^2-(1/2)^2}\left[\frac{\frac{1}{2}\sin\varphi}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi}-\frac{2}{\sqrt{1^2-(1/2)^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}.$$

116. $T=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}=\frac{1}{4}\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=$
$\frac{1}{3}(5+4\sqrt{2})$.

117. $\frac{4a^2}{3}$.

118. $\frac{r_1^2-a^2}{4b}$, $(r_1=r(\varphi_1))$.

119. $t=\operatorname{tg}(\varphi)$-re $T=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=2ab\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)\right]_0^{\pi/2}=$
$ab\pi$.

120. $3a^2\pi$.

121. $T=\frac{1}{6}$.

122. $a^2\pi$.

123. $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$, $x\dot{y}-\dot{x}y=a^2(t\sin t-2+2\cos t)$, amiről kimutatható, hogy mindenütt nempozitív. $T=3a^2\pi$.

124. $\frac{2}{3}$.

125. $T=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

126. A vizsgált intervallumban x, $\dot{x}$ és y pozitív, $\dot{y}$ negatív.
$x\dot{y}-\dot{x}y=-3\sin^2 t\cos t-3\cos^2 t\sin t+\frac{3}{8}(1-\cos 4t)$.

$$T=\left|\frac{1}{2}\left[-\sin^3 t+\cos^3 t+\frac{3}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\right|=\frac{21\sqrt{3}-8-2\pi}{64}.$$

127. $\frac{8}{3\sqrt{3}}$.

128. $T=t_1$.

129. $\frac{7}{6}$.

130. $2\ln a$.

131. $\frac{3}{2}\cdot\frac{a-1}{\sqrt{a}}$.

132. $\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$.

133. Ebben az esetben a szektor megegyezik az ugyanehhez a függvényhez és intervallumhoz tartozó görbevonalú trapézzal. Területe:
$T=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{1/3}\left(1-x^{1/3}\right)^2+\left(1-x^{1/3}\right)^3\right)dx$ vagy $T=\int_0^1\left(1-x^{1/3}\right)^3dx$;
$t=x^{1/3}$ helyettesítés után: $T=\frac{1}{20}$.

134. $1/12$.

135. $\frac{e-2}{2}$.

136. $\frac{e}{2}+\ln 16-4$.

137. $T=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4\cos^2\varphi-\cos^2\varphi)\,d\varphi=\frac{3\pi}{16}+\frac{3}{8}$.

138. $T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left(4 \cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{5}{2}.$

139. $T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \operatorname{tg}^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{1 - \cos^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2} - \varphi\right]_0^{\pi/8} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}.$

140. $T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(e^{2\varphi} - \varphi^2\right) d\varphi = \frac{1}{12} \left(3e^{2\pi} - 2\pi^3 - 3\right).$

141. $T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(e^{2\varphi} - e^{\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{4} \left(e^{2\pi} - 2e^{\pi} + 1\right).$

142. $T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4^2 - \frac{4}{\cos^2\varphi}\right) d\varphi = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$

143. Szimmetria miatt $T = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/3} \frac{4d\varphi}{\cos^2\varphi} + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4^2 \, d\varphi\right) = 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$

144. A két kör metszéspontjai a $2 = 4 \sin\varphi$ egyenletből: $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$.

$T = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (16 \sin^2\varphi - 2^2) \, d\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$

145. Az ívhosszúságot s-sel jelölve: $s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2} \, dx = \sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1 =$

$= \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$

146. $s = \operatorname{arsh} 1 + \sqrt{2} = \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}.$

147. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$ **148.** $\frac{p}{2} \operatorname{arsh} \frac{a}{p} + \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}}.$

149. A $[0, a]$ intervallumon $x \geq 0$ és $x - 3a < 0$. Így a $[0, a)$ intervallumhoz tartozó, x tengely alatti görbeíven $y = \frac{x - 3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$; ebből $s = \int_0^a \frac{x + a}{2\sqrt{ax}} dx = \frac{4}{3}a.$

150. Két ilyen ív van a görbén; az alábbi számítás mind a kettőre érvényes. Implicit függvényként differenciálva: $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$, ebből

$y'^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$. Másrészt az eredeti egyenletből: $\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} = \left(\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1$, tehát

$y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1.$ $s = \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx = \sqrt[3]{a} \int_0^a \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \sqrt[3]{a} \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^a = \frac{3}{2}a.$

151. $s = 1 - \operatorname{arcth} 3 + \operatorname{arcth} 2 = 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

152. $s = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} + 2 \operatorname{arcth} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \ln 3.$

153. $\ln\sqrt{3}.$ **154.** $\ln\sqrt{3}.$ **155.** $\frac{a(a + 2)}{2}.$

156. Polárkoordinátásan:

(1) $$r^2 = y^2 + x^2 = \frac{2ax^2}{2a - x},$$

amiből $x = r\cos\varphi$ helyettesítéssel és az így kapott egyenlet megoldásával:

(2) $$r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

$r^2 + \dot r^2 = 4a^2\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}(1+3\cos^2\varphi);$

$\int\sqrt{r^2+\dot r^2}\,d\varphi = 2a\int\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$ (Ez utóbbi integrál kiszámításához lásd a 12.213. feladatot). A határok polárkoordinátásan: Ha $x=0$, akkor (1)-ből $r=0$, és így (2)-ből $\varphi = 0$; ha $x = \dfrac{5}{3}a$, akkor (1)-ből $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 5a$, és így $x = r\cos\varphi$-ből $\dfrac{5}{3}a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}5a\cos\varphi$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$. Ezeket felhasználva

$$s = -2\sqrt{3}a\left[-\operatorname{cth}\operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos\varphi) + \operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos\varphi)\right]_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}} =$$
$$2a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

157. $s = \operatorname{arsh}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3}+2) + 2\sqrt{3}.$

158. $\dfrac{5}{2}.$

159. $\dfrac{1}{27}\left(\sqrt{\left(4+9t_1^2\right)^3} - 8\right).$

160. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arsh} t_1 + t_1\sqrt{1+t_1^2}\right).$

161. $\dot x = -\sin t,\quad \dot y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos 2t,$

$$\dot x^2 + \dot y^2 = \sin^2 t + \frac{1}{8}\cos^2 2t = \frac{1-\cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t}{2} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t\right)^2}{2}.$$
$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}.$$

162. $8a.$

163. $2a\pi^2.$

164. $\dot x = -5a\cos^4 t\sin t,\quad \dot y = 5a\sin^4 t\cos t.$
$\dot x^2 + \dot y^2 = 25a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^6 t + \sin^6 t)$. Kiszámítjuk a (zárt) görbe hosszának negyedét, vagyis a $[0, \frac{\pi}{2}]$-n integrálunk, és azt négyszer vesszük.

$$s = 4\cdot 5a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\,dt.$$ (l. **12.215.**)

$$s = -\frac{4\cdot 5a}{16\sqrt{3}}\left[\operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos 2t) + \sqrt{3}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right]_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{5a}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arsh}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) = 5a\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right).$$

165. $\dot x^2 + \dot y^2 = \cos^2 t(1+16\sin^2 t)$. $s = \int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{1+16\sin^2 t}\,dt$. Legyen $4\sin t = \operatorname{sh} u$, akkor $s = \frac{1}{4}\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,du = \dfrac{1}{8}\ln(4+\sqrt{17}) + \dfrac{1}{2}\sqrt{17}.$

166. $\sqrt{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)$. **167.** $a\ln\frac{a}{y_1}$, ahol $y_1=y(t_1)$.

168. $s=\operatorname{arsh}1=\ln(1+\sqrt{2})$. **169.** $s=2\operatorname{arth}\frac{1}{\sqrt{3}}=\ln(2+\sqrt{3})$.

170. $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\frac{9}{4}\operatorname{sh}^2 2t\operatorname{ch}2t$; $s=\frac{1}{2}\left[(\operatorname{ch}2t_1)^{3/2}-1\right]$.

171. $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{ch}t\right)^2$. $s=\ln a+\frac{a^2-1}{4a}$.

172. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arch}t_1^2-\operatorname{arch}t_2^2\right]$; az integrált helyettesítéssel számíthatjuk ki.

173. $\operatorname{sh}^2 t_1$.

174. $\dot{r}=0$, $r^2+\dot{r}^2=a^2$. $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2}\,d\varphi=a[\varphi]_0^{2\pi}=2a\pi$.

175. $\frac{a}{2}\left(\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}+\operatorname{arsh}\varphi_1\right)$.

176. $a\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{\varphi_1{}^2+1}}{\varphi_1}+\ln\frac{\varphi_1+\sqrt{\varphi_1{}^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

177. $2a$. **178.** $8\sqrt{3}$. **179.** 8.

180. $r^2+\dot{r}^2=\frac{a^2}{\cos^6\frac{\varphi}{2}}$. Mivel $\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C$, (lásd a plt. **12.193.** feladatot), $s=a\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}=a\left[\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\pi/4}=$ $a\left(\sqrt{2}+\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)=a(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

181. $p\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$. **182.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

183. $8a\sin\frac{\varphi_1}{2}$. **184.** $\frac{3a\pi}{2}$.

185. Átalakításokkal $r^2+\dot{r}^2=a^2\frac{\operatorname{ch}^2\varphi}{(1+\operatorname{ch}\varphi)^2}$; $t=\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}$ helyettesítéssel $s=a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$.

186. $a(\varphi_1-r_1)$, ahol $r_1=r(\varphi_1)$. **187.** $\frac{8a}{3}$.

188. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi_1}-1\right)$.

189. $\frac{16}{3}\pi$. **190.** 12π.

191. $\frac{3\pi^2}{8}$. **192.** $\frac{\pi}{2}(2+\operatorname{sh}2)$. **193.** $\frac{\pi}{2}$.

194. $\pi(3\ln^2 3-6\ln 3+4)$.

195. $\frac{\pi}{4}$. **196.** $\frac{4a^3\pi}{3}$. **197.** $\frac{4a^3\pi}{3}$.

198. $V = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \frac{16}{15}\pi.$ **199.** $V = \pi \int_{-1}^1 \left(1-x^{2/3}\right)^3\,dx = \frac{32\pi}{105}.$

200. $\frac{4ab^2\pi}{3}.$

201. $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{125}-1\right).$

202. A kiszámítandó felszínt A-val jelölve $A = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx.$

A $\cos x = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel

$\int \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[u+\frac{\operatorname{sh}2u}{2}\right]+C$; így

$A = -\pi\left[\operatorname{arsh}\cos x + \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\right]_0^\pi = \pi\left(2\sqrt{2}+2\ln(1+\sqrt{2})\right).$

203. $A = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx = \pi\left[\frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{arsh}\cos^2 x\right]_0^{\pi/4} =$

$\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}})$. (Az integrál kiszámításához lásd az **12.214.** feladatot.)

204. $a^2\pi(2+\operatorname{sh}2).$

205. $y\sqrt{1+y'^2} = \left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}$, (az y' legegyszerűbben az eredeti egyenlet mindkét oldalának differenciálásával számítható ki). Legyen $x = a\cos^3 u$.

$A = 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u\cos u\,du = 6a^2\pi\left[\frac{\sin^5 u}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{6a^2\pi}{5}.$

206. $4a^2\pi.$

207. $y\sqrt{1+y'^2} = b\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}$, ahol $\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$

$A = 2b\cdot 2\pi \int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\,dx.$ Legyen $\frac{\varepsilon x}{a} = \sin u.$

$A = \frac{4ab\pi}{\varepsilon}\int_{u_1}^{u_2} \cos^2 u\,du = \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\left[u+\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\right]_{u_1}^{u_2} =$

$= \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\left[\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}+\frac{\varepsilon x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\right]_0^a = 2b\pi\left(\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon+b\right).$

208. $A = 2\pi \int_{-2}^2 (\operatorname{ch}2-\operatorname{ch}x)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \pi\operatorname{sh}4-4\pi.$

209. $A = 2\pi \int_{-1}^1 (1-x^2)\sqrt{1+(2x)^2}\,dx.$

$2x = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel $A = \frac{\pi}{16}\left(17\operatorname{arsh}2+14\sqrt{5}\right).$

210. $4a^2\pi.$

211. $A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt = \frac{6a^2\pi}{5}.$

212. $A = 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \dfrac{64a^2\pi}{3}.$

213. $y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 4\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{3/2}\sin t.$

$A = 2\pi \cdot 4\sqrt{2}a^2 \cdot \int_0^{\pi}(1-\cos t)^{3/2}\sin t\,dt = \dfrac{128a^2\pi}{5}.$

214. $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = 2e^{2t},\quad A = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2} e^{2t}\cos t\,dt = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left[e^{2t}(\sin t + 2\cos t)\right]_0^{\pi/2} =$
$\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left(e^{\pi}-2\right).$

215. $M_x = \dfrac{1}{14},\quad M_y = \dfrac{1}{5},\quad T = \dfrac{1}{4},\quad x_s = \dfrac{4}{5},\quad y_s = \dfrac{2}{7}.$

216. $M_x = \dfrac{3}{8},\quad M_y = 3,\quad T = \ln 4,\quad x_S = \dfrac{3}{\ln 4} = 2,16;\quad y_S = \dfrac{3}{8\ln 4} = 0,27.$

217. $M_x = \dfrac{13}{81},\quad M_y = \ln 3,\quad T = \dfrac{2}{3},\quad x_S = \dfrac{3\ln 3}{2} = 1,65,\quad y_S = \dfrac{13}{54} = 0,24.$

218. $M_x = \dfrac{2a^3}{3},\quad M_y = 0,\quad T = \dfrac{a^2\pi}{2},\quad x_S = 0,\quad y_S = \dfrac{4a}{3\pi}.$

219. $M_x = \dfrac{2ab^2}{3},\quad M_y = 0,\quad T = \dfrac{ab\pi}{2},\quad x_S = 0,\quad y_S = \dfrac{4b}{3\pi}.$

220. $M_x = \dfrac{2a^3}{3},\quad M_y = 0,\quad T = \dfrac{a^2\pi}{2},\quad x_S = 0,\quad y_S = \dfrac{4a}{3\pi}.$

221. $M_x = \dfrac{2ab^2}{3}.\quad M_y = 0,\quad T = \dfrac{ab\pi}{2},\quad x_S = 0,\quad y_S = \dfrac{4b}{3\pi}.$

222. $M_x = \dfrac{5}{2}a^3\pi,\quad M_y = 3a^3\pi^2,\quad T = 3a^2\pi,\quad x_S = a\pi,\quad y_S = \dfrac{5a}{6}.$
(A T-re nézve l. a **99**. feladatot.)

223. $M_x = \dfrac{8a^3}{105},\quad M_y = \dfrac{8a^3}{105},\quad T = \dfrac{3a^2\pi}{32},\quad x_S = y_S = \dfrac{256a}{315\pi}.$
(A T-re nézve lásd a **103**. feladatot.)

224. $M_x = \dfrac{a^3}{3},\quad M_y = \dfrac{a^3}{3},\quad T = \dfrac{a^2\pi}{4},\quad x_S = \dfrac{4a}{3\pi},\quad y_S = \dfrac{4a}{3\pi}.$

225. $M_x = \dfrac{a^3}{3}(\pi^3-6\pi),\quad M_y = a^3(4-\pi^2),\quad T = \dfrac{a^2\pi^3}{6},\quad x_S = \dfrac{6a}{\pi^3}(4-\pi^2),$
$y_S = \dfrac{2a}{\pi^3}(\pi^3-6\pi).$

226. $M_x = \dfrac{32a^3}{3},\quad M_y = 5a^3\pi,\quad T = 3a^2\pi,\quad x_S = \dfrac{5a}{3},\quad y_S = \dfrac{32a}{9\pi}.$
(A T-re nézve l. a **120**. feladatot.)

227. $M_x = \dfrac{a^3}{30}\left(e^{3\pi}+1\right),\quad M_y = -\dfrac{a^3}{10}\left(e^{2\pi}+1\right),\quad T = \dfrac{a^2e^{2\pi}}{4},$
$x_S = -\dfrac{2a}{5e^{2\pi}}\left(e^{3\pi}+1\right),\quad y_S = \dfrac{2a}{15e^{2\pi}}\left(e^{3\pi}+1\right).$
(A T-re nézve l. a **114**. feladatot.)

	Téglalap-módszer	Trapéz-módszer	Parabola-módszer		Téglalap-módszer	Trapéz-módszer	Parabola-módszer
217.	1,23239;	1,22613;	1,23530.	**218.**	3,22023;	3,28326;	3,23961;
219.	36,6024;	34,7768;	35,6757.	**220.**	10,64646;	10,52355;	10,61165;
221.	44,5073;	44,2467;	44,4089.	**222.**	0,84459;	0,82999;	0,83682;
223.	1,08884;	1,19949;	1,08943.	**224.**	2,57979;	2,60902;	2,59083;
225.	0,94830;	0,94579;	0,94802.	**226.**	0,98560;	0,98517;	0,98546;
227.	0,91608;	0,91573;	0,91597.	**228.**	17,3843;	17,2277;	17,3222;
229.	5,40258;	5,40257;	5,40258.	**230.**	1,22939;	1,22905;	1,22927;
231.	0,69266;	0,69412;	0,69315.	**232.**	1,46746;	1,46746;	1,46746;
233.	0,83587;	0,83521;	0,83565.				

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyüjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **MATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY I.**

A jegyzet szerzői: **Babcsányi - Gyurmánczi - Szabó - Wettl**

A jegyzet azonosítója: **075001**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:
(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)