Gráfelmélet

Bóka Dávid

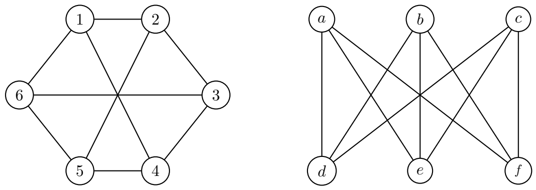
Tartalomjegyzék

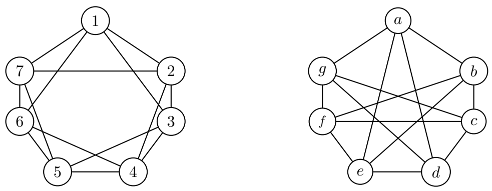
1. Feladatok

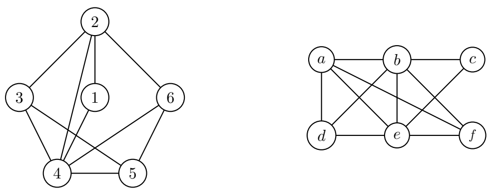
1.1. Gráfelmélet

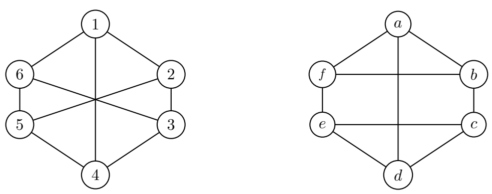
1.1.1. A gráfelmélet alapjai

1. Izomorfak-e az alábbi gráfok?

   (a) 

   (b) 

   (c) 

   (d) 

2. Van-e olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyben a csúcsok fokszámai:

   (a) $4, 4, 4, 3, 3, 3, 3$
   (b) $6, 3, 3, 2, 2, 2, 0$
   (c) $5, 5, 5, 4, 4, 2, 2$
   (d) $5, 5, 5, 2, 2, 2, 1$
   (e) $1, 1, 1, 2, 3, 4, 6$

3. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}^+$ csúcsú egyszerű gráf, melyben minden pont foka különböző?

4. Milyen n és k pozitív egész számokra lehetséges, hogy egy n fős társaságban mindenkinek pontosan k ismerőse van, ha az ismertségek kölcsönösek?

5. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$. Összefüggő-e G, ha az i és j csúcs akkor van összekötve, ha

   (a) $i - j$ páratlan,
   (b) $i - j$ osztható 3-mal és $i \neq j$,
   (c) $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 8$
   (d) $|i - j| = 6$ vagy $|i - j| = 9$

6. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $G = (V, G)$ egyszerű gráf, melynek legfeljebb $2n + 1$ csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall v \in V$ esetén $d(v) \geq n$ akkor G összefüggő!

7. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy n csúcsú G gráfot, melyben két nem szomszédos csúcs fokának összege legalább $n - 1$. Mutassuk meg, hogy G összefüggő!

8. Egy összefüggő G gráfról tudjuk, hogy minden pontjának a foka páratlan és van egy olyan e éle, melyet elhagyva a gráf két komponensre esik szét. Mutassuk meg, hogy ekkor mindkét komponens páratlan darab csúcsot tartalmaz!

9. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges G egyszerű gráf vagy a komplementere összefüggő!

10. Ha egy $n \in \mathbb{N}^+$ csúcsú egyszerű gráfban pontosan egy csúcs foka páros, akkor hány páros fokú csúcs van G komplementerében?

11. Adjuk meg az összes 4, illetve 5 csúcsú egyszerű gráfot, melyek izomorfak a komplementerükkel!

12. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsuk be, hogy bármely időpontban van három olyan versenyző, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, akik közül semelyik kettő nem játszott még!

13. Egy csoportban tudjuk, hogy bármely három ember között van kettő, akik nem ismerik egymást, de bármely hét ember között van kettő, akik ismerik egymást (az ismertség kölcsönös). Karácsonykor mindenki megajándékozza az összes ismerősét a csoportban. Bizonyítsuk be, hogy n ember esetén legfeljebb $6n$ ajándéktárgyat adtak át!

14. Mutassuk meg, hogy ha egy véges gráf minden foka legalább 2, akkor van kör a gráfban!

15. Mutassuk meg, hogy ha egy véges gráfban $d > 1$ jelöli a fokszámok minimumát, akkor létezik a gráfban legalább $d + 1$ hosszú kör!

16. Hány kettő hosszú út van $K_{m,n}$-ben?

17. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban a legkisebb fokszám A és a legnagyobb fokszám B, akkor

$$A \leq \frac{2e}{n} \leq B,$$

ahol $e = |E(G)|$ és $n = |V(G)|$.

1.1.2. Fák

1. Rajzoljuk le az összes 4-edfokú csúcsot tartalmazó fát!

2. Bizonyítsuk be, hogy egy fában a pontok és élek számának szorzata páros!

3. Hány csúcsa van egy G fának, ha éleinek száma pontosan tizenötöde a komplementerben lévő élek számának?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 5$ egész szám esetén egy n csúcsú gráfban vagy komplementerében van kör!

5. Mutassuk meg, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik!

6. Mutassuk meg, hogy egy fában mindig lesz legalább két elsőfokú csúcs!

7. Jelöljük egy véges fa elsőfokú ontjainak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát c-vel. Mutassuk meg, hogy $f_1 \geq c + 2$, ha a csúcsok száma legalább kettő!

8. Bizonyítuk be, hogy egy $n \geq 1$ csúcsú fában a másodfokú csúcsok száma nem lehet pontosan $n - 3$!

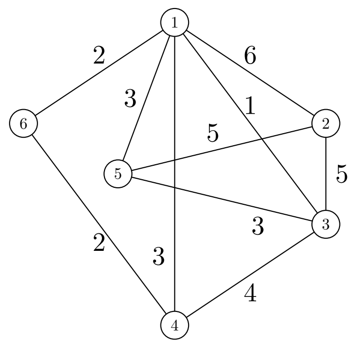
9. Legyen G egy $3k \geq 6$ csúcsú gráf, melynek fokai $1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3$. Bizonyítsuk be, hogy van kör a gráfban!

10. G egy 6 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden pont foka legalább 4. Mutassuk meg, hogy bármely 4 csúcsa kört alkot!

11. Igaz-e, hogy minden legalább két csúcsból álló összefüggő gráfnak van olyan pontja, melyet a hozzá tartozó élekkel együtt elhagyva még mindig összefüggő gráfot kapunk?

12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fában van k-adfokú csúcs, akkor a fában legalább k levél van!

13. Keressünk minimális súlyú feszítőfát az alábbi gráfban és adjuk meg a súlyát!



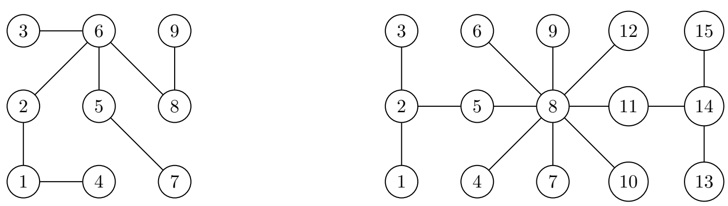
14. Egy teljes gráf csúcshalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m$. Az (x_i, x_j) élek költsége 1, az (y_i, y_j) éleké 2, míg az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyi a minimális súlyú feszítőfa költsége?

15. Az $n \times n$-es négyzetrács vonalrendszeréből rajzoljunk be annyit, hogy a négyzetrács bármely pontjából bármely pontjába el lehessen jutni a berajzolt szakaszok mentén. Számítsuk ki a berajzolt szakaszok összhosszának minimumát!

16. Hány olyan csúcscimkézett fa van n csúcson, melyben minden csúcs foka legfeljebb 2?

17. Egy n csúcsú és n élű egyszerű, összefüggő csúcscimkézett gráfnak összesen n különböző feszítőfája van. Mi ez gráf?

18. Határozzuk meg az alábbi fák Prüfer-kódjait:



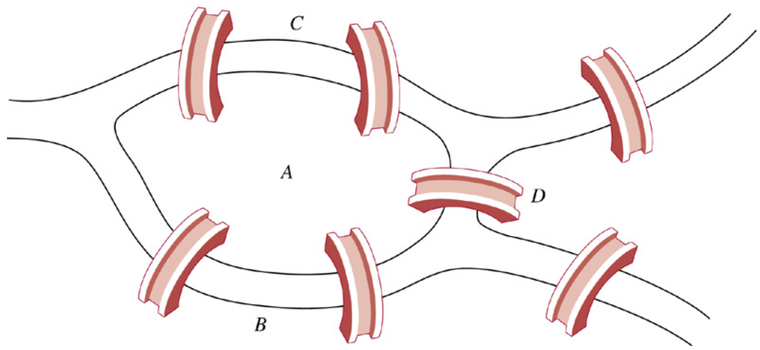
19. Rajzoljuk le azt a fát, melynek Prüfer-kódja $(1, 2, 3, 4, 5, 4, 3)$!

20. Egy n csúcsú fa Prüfer-kódja csupa azonos számjegyből áll (az $(n-1)$. jegyet is beleértve). Milyen fát kódol ez a kód?

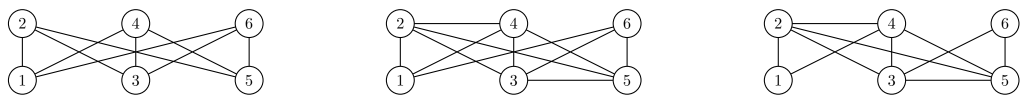
21. Egy fa Prüfer kódja csupa különböző számból áll. Hogyan jellemezhetjük ezt a fát?

1.1.3. Euler-út és Euler-kör

1. Königsbergi-hidak (1730): Át lehet-e menni a város minden hídján úgy, hogy mindegyiken csak egyszer megyünk keresztül és visszaérünk a kiindulási helyre?



2. Van-e Euler-út vag Euler-kör az alábbi gráfokban?

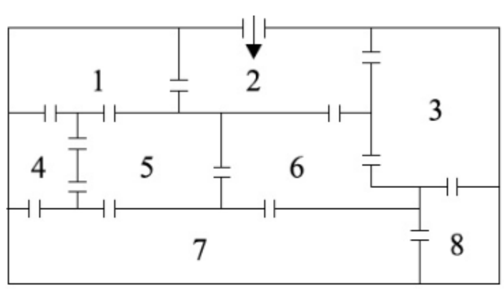


3. Van-e olyan Euler-gráf, melynek páros számú pontja és páratlan számú éle van?

4. Mely $n \geq 2$ esetén tartalmaz K_n Euler-utat vagy Euler-kört?

5. Mely $n, m \geq 1$ esetén tartalmaz $K_{n,m}$ Euler-utat vagy Euler-kört?

6. Az alábbi ábrán egy király palota alaprajza látható. Tíz évvel ezelőtt az egyik ajtót befalazták, ám ezt a változást még nem jelölték az alaprajzon. Minden reggel a király belép a nyíllal jelölt bejáraton, majd úgy sétál végig a szobák között, hogy minden ajtón pontosan egyszer megy át. Sétája végén leül a trónteremben és fogadja a látogatóit. Melyik ajtót falazták be és melyik terem a trónterem?



7. Egy G gráf csúcsai az $1, 2, 3, \ldots, 100$ számok és az i és j csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i - j| < 3$. Tartalmaz-e G Euler-utat vagy Euler-kört?

8. A G_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú $0-1$ bitsorozatok. Mely $n \geq 3$ esetén tartalmaz G_n Euler-kört, ha két csúcs akkor van összekötve, ha
   (a) pontosan 1 bitben térnek el?
   (b) pontosan 2 bitben térnek el?

9. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges összefüggő G gráf élei bejárhatóak úgy egy élsorozat mentén, hogy minden élen pontosan kétszer megyünk végig!

10. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráf minden csúcsának a foka osztható 4-gyel, akkor az élei kiszínezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két piros és két kék él illeszkedjen!

11. Egy $k \times l$ ponból álló rácsban k és l mely értékeire van Euler-kör vagy Euler-út?

12. Egy G gráf csúcsai egy 8-elemű halmaz 2-elemű részhalmazainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve éllel, ha a pontoknak megfelelő részhalmazok diszjunktak. Van-e G-ben Euler-kör?

1.1.4. Hamilton-út és Hamilton-kör

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G gráfban létezik k olyan csúcs, melyeket elhagyva a gráf több, mint k $(k+1)$ komponensre esik szét, akkor a gráfban nem létezik Hamilton-kör (Hamilton-út)!

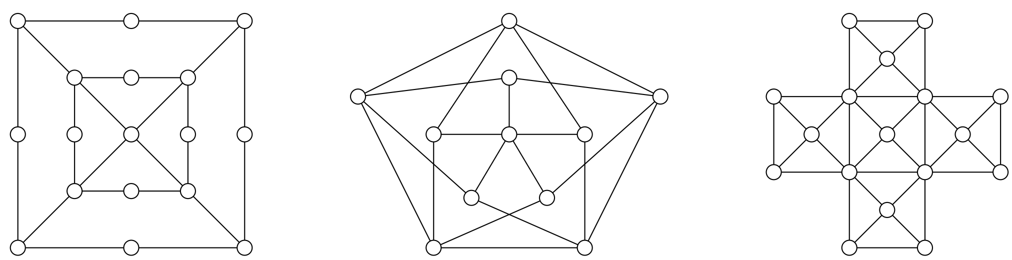
2. Melyik igaz az alábbi állítások közül minden $n \geq 5$ esetén?
   (a) Létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, hogy G és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamiton-kört.
   (b) Létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamiton-utat.

3. A boltban vásároltunk 100 piros, 150 kék, és 200 zöld színű gyöngyöt. Mutassuk meg, hogy lehet olyan nyakláncot készíteni az összes gyöngy felhasználásával, melyben azonos színűek nem kerülnek egymás mellé!

4. A G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok. Az i és j csúcs össze van kötve, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört?

5. Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismertség kölcsönös). Igazoljuk, hogy leültethetők egy kerekasztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!

6. Létezik-e Hamilton-út vagy Hamilton-kör az alábbi gráfokban?



7. Keressünk olyan 3-reguláris gráfot, melyben nincs Hamilton-kör!

8. Egy G gráf csúcsai legyenek az 5 hosszú $0-1$ bitsorozatok. Két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő sorozatok legalább 3 helyen különböznek egymástól. Van-e a gráfban Hamilton-kör?

9. Bizonyítsuk be, hogy egy $2k+1$ csúcsú egyszerű gráfban, ha minden csúcs foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!

10. Bejárható-e egy 4×4-es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk, és a bejárás végén visszaérünk a kiindulási helyre?

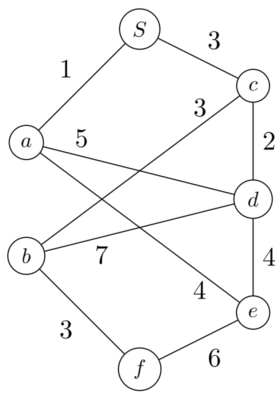
11. Egy hotelba egy 100 fős társaság érkezett, akik közül kezdetben bármely két ember jóban volt egymással. Esténként egyetlen kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy-egy vacsora alkalmával az egymás mellé kerülő emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki jóban legyen a szomszédaival. Ha ez lehetetlen, akkor az összes résztvevő még aznap hazamegy, előbb azonban nem. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tölt a társaság!

12. A G_n egyszerű gráf csúcsai legyenek az n hosszú $0-1$ bitsorozatok és két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő bitsorozatok pontosan 1 bitben térnek el egymástól. Bizonyítsuk be, hogy G_n minden $n \geq 2$ esetén tartalmaz Hamilton-kört!

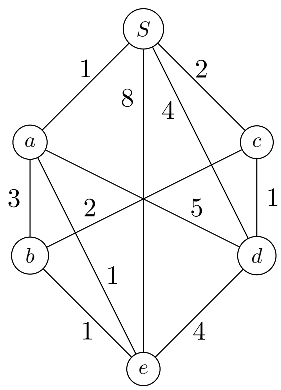
13. A G_n egyszerű gráf csúcsai legyenek az n hosszú $0-1$ bitsorozatok és két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő bitsorozatok legalább 2 bitben térnek el egymástól. Bizonyítsuk be, hogy G_n minden $n \geq 3$ esetén tartalmaz Hamilton-kört!

1.1.5. Irányított gráfok és a Dijkstra-algoritmus

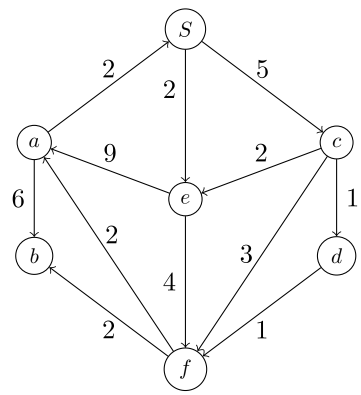
1. Hány páronként nemizomorf 4 csúcsú és 3 élű, egyszerű irányított gráf létezik?
2. Egy 9 tagú társaságban mindenki átad öt általa választott embernek 100-100 forintot. Mutassuk meg, hogy az ajándékozás után lesz két olyan ember, akiknek ugyanannyi forinttal változott a pénze!
3. Bizonyítsuk be, hogy egy hurokmentes irányított gráf élhalmaza felbontható két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik sem tatalmaz irányított kört!
4. Bizonyítsuk be, hogy egy körmérkőzéses pingpongverseny résztvevői sorba állíthatóak úgy, hogy mindenki legyőzte a közvetlenül mögötte állót! (Ha egy tetszőleges irányítatlan teljes gráfból készítünk egy irányított gráfot, akkor mindig lesz az utóbbiban irányított Hamilton-út.)
5. Határozzuk meg, hogy az S csúcsból kiindulva mennyi a legrövidebb út az gráf összes többi csúcsába!



G_1

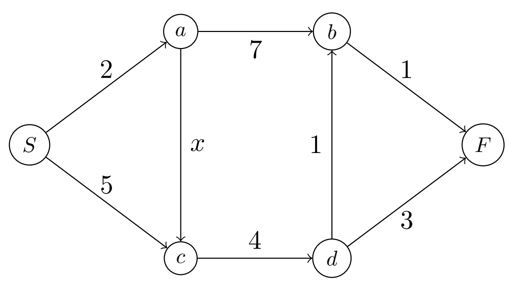


G_2



G_3

6. Határozzuk meg a legrövidebb út hosszát S-ből F-be az x paraméter tetszőleges pozitív, valós értéke esetén!



1.1.6. Síkbarajzolható gráfok és az Euler-tétel

1. Hány éle van egy n csúcsú összefüggő síkgráfnak, ha minden tartománya (a külső is)
   (a) háromszög,
   (b) négyszög?
2. Egy szabályos test minden lapja egybevágó szabályos k-szög és minden csúcsnál pontosan d lap ($d \geq 3$) találkozik. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) $\frac{1}{k} + \frac{1}{d} > \frac{1}{2}$!
   (b) csak 5 szabályos test létezik!
3. Keressünk olyan 8 csúcsú G gráfot, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem síkbarajzolható!

4. A G_n gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, n$ számok, és két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő számok közül a kisebb osztója a nagyobbnak. Mutassuk meg, hogy ha $n > 15$, akkor G_n nem síkbarajzolható!

5. Bizonyítsd be, hogy a Petersen-gráf nem síkbarajzolható!

1.2. Algebra

1.2.1. Csoportok

1. Milyen algebrai struktúrát alkotnak a halmazok az adott művelettel?

   (a) $(\mathbb{Q}, \circ)$, ahol $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

   (b) $(\mathbb{N}^+, +)$

   (c) $(\mathbb{C}, +)$

   (d) $(\mathbb{R}, \cdot)$

   (e) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

   (f) $(\mathbb{R}^{n \times n}$ invertálhatóak, $\times)$

   (g) $(\mathbb{Z}, \circ)$, ahol $a \circ b = a + b + 1$

   (h) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$

   (i) $(2^{\mathbb{Z}}, \cdot)$, ahol $2^{\mathbb{Z}} = \{2^x : x \in \mathbb{Z}\}$

   (j) $(P(H), \cup)$

   (k) $(P(H), \cap)$

   (l) $(P(H), \triangle)$

2. Bizonyítsuk be, hogy rögzített $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az n. komplex egységgyökök a szorzással csoportot alkotnak!

3. Igaz-e, hogy a modulo 7 maradékosztályok halmazából elhagyva a 0 által reprezentált maradékosztályt, a szorzásra Ábel-csoportot kapunk-e? És igaz-e ugyanez a 6-os maradékosztályokra? Milyen G alaphalmaz esetén lesz a $(G, \cdot_n)$ struktúra Ábel-csoport?

4. Bizonyítsuk be, hogy egy G csoport minden elemére teljesülnek a következőek:

   (a) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

   (b) $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoport minden elemére teljesül, hogy $a^2 = e$, akkor G Abel-csoport!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoport minden a, b elemére teljesül, hogy $(ab) = a^2b^2$, akkor G Abel-csoport!

7. Mutassuk meg, hogy ha egy G csoportban három egymást követő pozitív egész i számra és minden $a, b \in G$ elemre igaz, hogy $(ab)^k = a^k b^k$, akkor G Ábel-csoport!

8. Bizonyítsuk be, hogy egy n oldalú szabályos sokszög egybevágósági transzformációinak halmaza (D_n) a transzformációk egymás utáni végrehajtásával, mint művelettel csoportot alkot, hogy $|D_n| = 2n$ és hogy $\varphi\tau = \tau\varphi^{n-1}$! (Ez a D_n diédercsoport).

9. Mutassuk meg, hogy a D_n diédercsoportban $\varphi^n = e$, $t^2 = e$, $\varphi\tau = \tau\varphi^{n-1}$ majd hozzuk egyszerűbb alakra a $\varphi \circ \tau \circ \varphi^2 \circ \tau \circ \varphi$ kifejezést!

10. Határozzuk meg a 8. komplex egységgyökök szorzással alkotott csoportjában az egyes elemek rendjét, generátumát és bizonyítsuk be, hogy a csoport ciklikus!

1.2.2. Gyűrűk

1. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák? Melyik nullosztómentes?

   (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

   (b) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$

   (c) $(2\mathbb{Z}+1, +, \cdot)$

   (d) $(\mathbb{R}^{3\times 3}, +, \cdot)$

   (e) $(a+b\sqrt{2}|a, b \in \mathbb{Z}, +, \cdot)$

   (f) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

   (g) $(P(H), \triangle, \cap)$

2. Mutassuk meg, hogy egy $(T, +, \cdot)$ test nem lehet nullosztómentes!

3. Végezzük el az adott maradékos osztást az adott testek felett!

   (a) $(x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 4x - 5)$ $\quad$ $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}_3$ felett

   (b) $(2x^3 - 4x + 3) : (4x^2 + x - 2)$ $\quad$ $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ felett