Gráfelmélet

Bóka Dávid

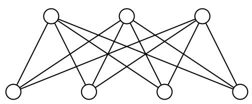
Tartalomjegyzék

1. Megoldások

1.1. Gráfelmélet

1.1.1. A gráfelmélet alapjai

1. (a) Izomorfak, egy lehetséges bijekció: $1 \mapsto b$, $2 \mapsto f$, $3 \mapsto c$, $4 \mapsto e$, $5 \mapsto a$ és $6 \mapsto d$
   (b) Izomorfak, egy lehetséges bijekció: $1 \mapsto b$, $2 \mapsto d$, $3 \mapsto f$, $4 \mapsto a$, $5 \mapsto c$, $6 \mapsto e$ és $7 \mapsto g$.
   (c) Nem, mert a bal oldalinak egy ötödfokú csúcsa van (4), míg a jobb oldaliban kettő is van (b és e).
   (d) Nem, mert a jobb oldaliban van három hosszú kör ($a - b - f$), míg a bal oldaliban nincs.

2. (a) 
   (b) Nincs ilyen, mert nem lehet egyszerre a gráfban izolált csúcs és olyan csúcs, amely minden más csúccsal össze van kötve.
   (c) Mivel a fokszámok össszege az élek számának kétszerese, ezért páros, vagyis ilyen gráf nem létezik.
   (d) A három ötödfokú csúcs között legfeljebb 3 él futhat, ezért a maradék 4 csúcsba még legalább 12 élnek kell futnia. Ez nem lehetséges, mivel a maradék 4 csúcs fokainak összege mindössze 7.
   (e) Ha elhagyjuk az elsőfokú csúcsokat, akkor egy olyan részgráfot kapunk, melyben 4 csúcs van és a fokszámok $2, 3, 4, 3$. Ilyen gráf nem létezik, mert 4 csúcs esetén nem lehet 4-edfokú csúcs a gráfban.

3. Nincs, mivel ekkor a maximális fokszám $n - 1$ lehet, tehát a csúcsok fokszámai $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Ez nem lehetséges, mert lenne egy izolált csúcs és egy olyan, ami minden más csúccsal össze van kötve.

4. Az első feltétel, hogy $n > k$ és a fokszámösszegre vonatkozó állítás miatt nk-nak párosnak kell lennie. Ez a két feltétel szükséges és elégséges is, mivel a követetkezőféleképpen tudjuk előállítani a megfelelő gráfot:
   - Ha k páros, akkor minden csúcsot összekötünk a $\frac{k}{2}$ bal és $\frac{k}{2}$ jobb oldali szomszédjával.
   - Ha k páratlan akkor n biztosan páros és ekkor minden csúcsot összekötünk a $\frac{k-1}{2}$ bal és $\frac{k-1}{2}$ jobb oldali szomszédjával, valamint a vele szemközt ülővel.

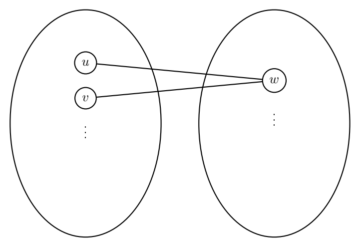
5. (a) Igen, mert különböző paritású csúcsok között fut él, azonos paritásúak között pedig két hosszú út.
   (b) Nem, mert a különböző maradékoszályok külön komponenseket alkotnak.
   (c) Igen, mert tetszőleges i csúcsból el tudok jutni az $(i+1)$. csúcsba. Ha $i \leq 91$, akkor az $i \to i+3 \to i+6 \to i+9 \to i+1$ úton, míg ha $i \geq 92$, akkor az $i \to i-8 \to i-5 \to i-2 \to i+1$ úton.
   (d) Nem, mert a 3-mal 1 maradékot adó csúcsokból az oszthatóság tulajdonságai miatt nem tudunk eljutni a többi maradékosztályba.

6. Tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő. Ekkor létezik legalább két komponense, és mivel a csúcsok száma $2n+1$, ezért az egyik komponensben legfeljebb n csúcs lehet. Ebben a komponensben a csúcsok foka legfeljebb $n-1$ lehet. Ez ellentmond a feltételnek hogy minden csúcs foka legalább n.

7. Tegyük fel, hogy G nem összefüggő. Ekkor létezik két (nem feltétlenül összefüggő) komponens, melyek a gráf összes csúcsát tartalmazzák és közöttük nem fut él. Legyenek ezek G_1 és G_2. Ekkor egy $u \in V(G_1)$ csúcs foka legfeljebb $|V(G_1)|$, és egy $v \in V(G_2)$ csúcs foka legfeljebb $|V(G_2)|$. Mivel u és v külön komponensben vannak, ezért nem szomszédosak, tehát $n-1 \leq |G_1|-1+|G_2|-1 = |G_1|+|G_2|-2 = n-2$. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát G összefüggő kell legyen.

8. Az e él törlésekor a két végpontjának fokszáma eggyel csökken, vagyis páros lesz és a két végpont külön komponensbe fog kerülni. Ekkor mindkét komponensben 1 darab páros fokú csúcs van, ezért a páratlan fokszámúakból páros soknak kell lennie. Tehát egy komponensben valóban páratlan darab csúcsnak kell lennie.

9. Ha G összefüggő, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy G nem összefüggő és legyenek a komponensei $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_n = (V_n, E_n)$. Ha az u és v csúcsok különböző komponensben vannak G-ben, akkor u és v össze lesz kötve $\overline{G}$-ben, míg ha azonos komponensben vannak G-ben (legyen ez G_i), akkor vegyünk egy w csúcsot egy másik komponensből (ilyen lesz, mert G nem összefüggő és jelöljük ezt G_j-vel). Ekkor $\overline{G}$-ben u és v is össze lesz kötve w-vel. Ezzel beláttuk, hogy bármely csúcsból bármely másik csúcsba el tudunk jutni $\overline{G}$-ben, tehát összefüggő.



G_i G_j

10. Mivel pontosan 1 páros fokú csúcs van és a fokok összegének párosnak kell lennie a gráfban, ezért a páratlan fokú csúcsokból páros soknak kell lennie, tehát $n-1$ páros, vagyis n páratlan. Ha egy csúcs foka a G gráfban d, akkor a komplementerben a foka $n-1-d$. Mivel n páratlan, ezért a d és $n-1-d$ paritása megegyezik, tehát egyetlen páros fokú csúcs lesz $\overline{G}$-ben.

11. Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf. Ha egy csúcs foka G-ben d, akkor a komplementerben a foka $n-d-1$. Tehát, ha G gráf csúcsainak fokai

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n,$$

akkor $\overline{G}$-ben a fokszámok

$$n - d_n - 1 \leq n - d_{n-1} - 1 \leq \cdots \leq n - d_1 - 1.$$

Az izomorfia miatt ez a két sorozat megegyezik, tehát $d_i + d_{n-i-1} = n-1$ minden i-re, sőt mivel 0 és $n-1$ fokú csúcs nem lehet egyszerre a gráfban, ezért $1 \leq d_i \leq n-1$. Az $n=4$ esetben egy ilyen fokszámsorozatot találunk, ez pedig az $1, 1, 2, 2$. Ez a gráf és a komplementere a következő ábrán látható.

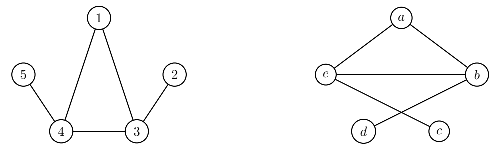
G $\overline{G}$

Egy lehetséges izomorf leképezés a csúcsokon: $1 \mapsto d$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto c$ és $4 \mapsto a$.

Az $n = 5$ esetben a következő esetek lehetségesek:

(a) $1, 2, 2, 2, 3$:
Ebben az esetben a G elsőfokú csúcsa a $\overline{G}$ harmadfokú csúcsca kell, hogy legyen, viszont az izomorfia miatt ekkor vagy mindkét gráfban (G és $\overline{G}$) össze vannak kötve vagy egyikben sem, ez viszont ellentmond a komplementer tulajdonságnak.

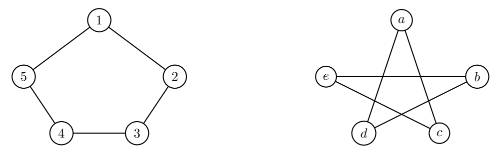
(b) $1, 1, 2, 3, 3$:
Itt könnyen látható, hogy a harmadfokú csúcsok össze lesznek kötve egymással G-ben, és így már könnyen felrajzolható G és a komplementere.



G $\qquad$ $\overline{G}$

Egy lehetséges izomorf leképezés a csúcsokon: $1 \mapsto a$, $2 \mapsto d$, $3 \mapsto b$, $4 \mapsto e$ és $5 \mapsto c$.

(c) $2, 2, 2, 2, 2$:
Egy egyszerű, összefüggő gráfban, ha minden pont foka pontosan 2, akkor az egy kör. A G gráf és komplementre a következőképpen rajzolható le.



G $\qquad$ $\overline{G}$

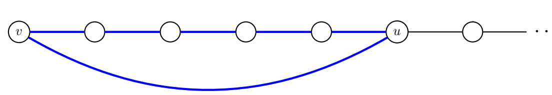
Egy lehetséges izomorf leképezés a csúcsokon: $1 \mapsto a$, $2 \mapsto c$, $3 \mapsto e$, $4 \mapsto b$ és $5 \mapsto d$.

12. A feltételekből tudjuk, hogy a feladathoz készített gráfban nincs háromszög és a komplementere nem tartalmaz hétcsúcsú teljes gráfot. Az átadott ajándékok száma éppen a fokszámok összege, vagyis azt kell látni, hogy a fokszámok összege kisebb, mint $6n$. Ennél többet bizonyítunk, méghozzá, hogy minden csúcs foka legfeljebb 6. Ez abból következik, hogy ha kiválasztunk egy v csúcsot, akkor v szomszédai között nem futhat él, mert nem lehet háromszög a gráfban, viszont emiatt v-nek legfeljebb 6 szomszédja lehet, mivel ha ennél több van és a szomszédai között nem futhat él, akkor a gráf komplementerében lenne K_7.

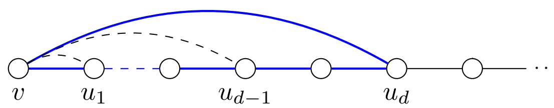
13. A gráfok nyelvére átfogalmazva azt kell megmutatni, hogy egy 6 csúcsú G gráfban vagy a komplementerében van háromszög. Vegyünk egy v csúcsot G-ből. Ennek a csúcsnak vagy G-ben, vagy $\overline{G}$-ben legalább 3 a foka. Feltehetjük, hogy ez G-ben történik. Ekkor tekintsük v három szomszédját G-ben. Ha fut közöttük legalább 1 él, akkor v-vel együtt háromszöget alkotnak, ha nem fut közöttük él, akkor ez a 3 szomszédja v-nek a komplementerben alkot háromszöget.

Háromszög G-ben (fut él v szomszédai között) $\qquad$ Háromszög $\overline{G}$-ben (nem fut él v szomszédai között)

14. Vegyünk egy leghosszabb utat a gráfból, és legyen ennek egy végpontja v. Ekkor v minden szomszédja szerepel az útban (ha nem szerepelne, akkor találnánk egy hosszabb utat), és mivel v foka legalább kettő, ezért lesz legalább 1 szomszédja (u) az útban és ezzel kört fog alkotni.



15. Vegyünk egy leghosszabb utat a gráfból, és legyen ennek egy végpontja v. Ekkor v minden szomszédja $(u_1, \ldots, u_{d-1}, u_d, \ldots)$ szerepel az útban (ha nem szerepelne, akkor találnánk egy hosszabb utat). Mivel v foka legalább d, ezért a tőle legtávolabbi szomszédja az úton legalább d távolságra van, így kaptunk egy $d+1$ hosszú kört.

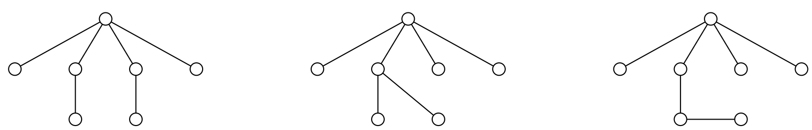


16. A két hosszú utaknak van egy középső csúcsuk. Ha ez a csúcs M-ben van, akkor őt m-féleképpen és hozzá a két végpontot $\binom{n}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Hasonlóan a helyzet, ha a középső csúcs N-ben van, tehát a kettő hosszú utak száma $n \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n}{2} = \frac{mn}{2} \cdot (m+n-2)$.

17. Legyen d_i az i. csúcs foka. Ekkor $A \leq d_i \leq B$, tehát

$$n \cdot A \leq \sum_{i=1}^{n} d_i = 2e \leq n \cdot B \Longrightarrow A \leq \frac{2e}{n} \leq B.$$

1.1.2. Fák

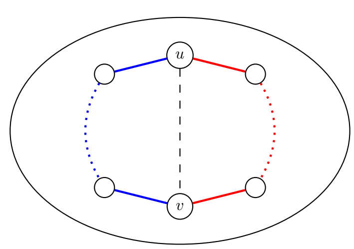
1. 

2. Ha egy fa csúcsainak száma n, akkor pontosan $n-1$ éle van, és $n(n-1)$ szorzat biztosan páros.

3. G-ben pontosan $n-1$ és van, míg a feltételek miatt komplementerében $15(n-1)$. G és komplementere együtt egy n csúcsú teljes gráf, ezért a kettőnek összesen $\binom{n}{2}$ éle van. Tehát a következő egyenlet írható fel: $\binom{n}{2} = (n-1) + 15(n-1)$. Ezt megoldva kapjuk, hogy $n = 1$ vagy $n = 32$.

4. Egy kör nélküli n csúcsú gráf éleinek száma legfeljebb $n-1$. Egy gráfnak és komplementerének összesen $\binom{n}{2}$ éle van, tehát, ha mindegyik körmentes, akkor az $\binom{n}{2} \leq 2n-2$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ezt megoldva $n \leq 4$-et kapunk, tehát egy legalább 5 csúcsú gráfra G vagy $\overline{G}$ tartalmaz kört.

5. Indirekt tfh. az u és v közé behúzott éllel több, mint egy kör keletkezik. Ez azt jelenti, hogy u és v között legalább két különböző út (piros és kék) is létezik a gráfban, ami azt jelenti, hogy kör is lenne a fában, ami ellentmondás.



6. Tekintsük a fában a leghosszabb utat (ha több van, akkor tetszőlegesen valamelyiket). Ennek az útnak a két végpontja elsőfokú kell legyen, mert ha nem az lenne, akkor találnánk még hosszabb utat.

7. 1. megoldás: Jelöljük f_k-val a pontosan k fokú csúcsok számát, d-vel a legnagyobb fokszámot és n-nel a csúcsok számát. Ekkor

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{i=1}^{d} i \cdot f_i = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots + df_d = 2(n-1) \text{ és}$$

$$\sum_{i=1}^{d} f_i = n$$

Ha kivonjuk a második egyenletből kétszereséből az elsőt, akkor a következőt kapjuk:

$$f_1 - f_3 - 2f_4 - \cdots - (d-2)f_d = 2$$

Ezt átrendezve kapjuk az állítást:

$$f_1 = 2+f_3+2f_4+3f_5+\cdots+(d-2)f_d = \underbrace{(f_3+f_4+f_5+\cdots+f_d)}_{c}+2+\underbrace{f_4+2f_5+\cdots+(d-3)f_d}_{\geq 0} \geq c+2$$

2. megoldás: Teljes indukció a csúcsok számára. Ha $n = 2$, akkor triviális az állítás. Tegyük fel, hogy n-ig igaz és tekintsünk egy $n+1$ csúcsú fát. Hagyjuk el a fa egyik elsőfokú csúcsát (ilyennek mindenképpen lennie kell). Ekkor egy n csúcsú fát kapunk, amire az indukciós feltevés miatt igaz, hogy $f_1^{(n)} \geq c^{(n)} + 2$. Most vegyük vissza a kitörölt elsőfokú csúcsot, és vizsgáljuk a szomszédját. Három eset lehetséges:

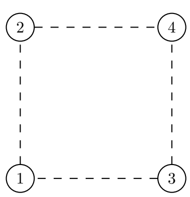
- A szomszédja elsőfokú: $f_1^{(n)} = f_1^{(n+1)}$ és $c^{(n)} = c^{(n+1)}$.
- A szomszédja másodfokú: $f_1^{(n)} + 1 = f_1^{(n+1)}$ és $c^{(n)} + 1 = c^{(n+1)}$.
- A szomszédja legalább harmadfokú: $f_1^{(n)} + 1 = f_1^{(n+1)}$ és $c^{(n)} = c^{(n+1)}$.

Tehát mindhárom esetben igaz lesz, hogy $f_1^{(n+1)} \geq c^{(n+1)} + 2$, vagyis az állítást igazoltuk.

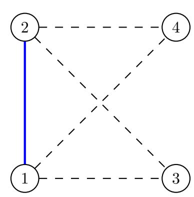
8. Tegyük fel indirekt, hogy G egy n csúcsú fa, melyben pontosan $n-3$ másodfokú csúcs van. Mivel egy fában van legalább 2 elsőfokú csúcs, ezért egyetlen csúcs fokszámát nem ismerjük. Legyen ez a fokszám d. Mivel a gráf egy fa, ezért az $1+1+2(n-3)+d = 2(n-1)$, amiből átrendezéssel kapjuk, hogy $d = 2$. Tehát találtunk egy újabb másodfokú csúcsot, ami ellentmondás.

9. A gráfban a fokszámok összege $6k$, tehát a gráfban $3k$ él van és $3k$ csúcs, tehát biztosan van benne kör.

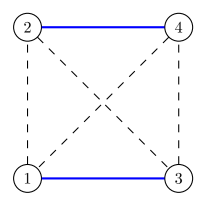
10. A gráf komplementerében minden pont foka legfeljebb 1, ezért tetszőleges 4 csúcs között legfeljebb 2 olyan él futhat, melyek különböző csúcsokhoz kapcsolódnak, ezért a 4 csúcs kört alkot G-ben.



nincs él a 4 csúcs között $\overline{G}$-ben



egy él a 4 csúcs között $\overline{G}$-ben

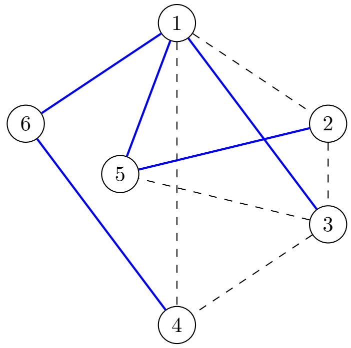


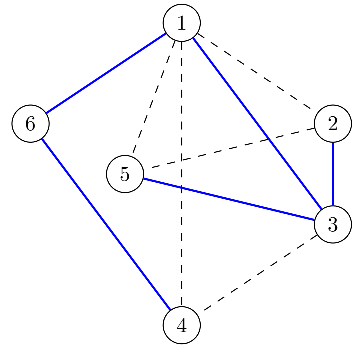
két él a 4 csúcs között $\overline{G}$-ben

11. Az állítás igaz. Tekintsük a gráf egy tetszőleges feszítőfáját. Ennek a feszítőfának létezik elsőfokú csúcsa. Ha ezt elhagyjuk, akkor a feszítőfa összefüggő marad és emiatt a gráf is.

12. Legyen a k-adfokú csúcs v. Töröljük a v csúcsot a gráfból. Ekkor a gráf k komponensre esik szét, melyek mindegyike fa. Ha a komponens izolált csúcs, akkor ez levél volt az eredeti gráfban, ha pedig legalább két csúcsa van, akkor a komponensnek, akkor ebben létezik legalább két levél, és ezek közül legalább egy nem lehetett szomszédja v-nek. Így minden komponensben találtunk legalább 1 olyan csúcsot, mely levele az eredeti gráfnak.

13. A minimális súly 13. Az alábbi ábrákon két lehetséges minimális súlyú feszítőfát láthatunk.





14. A Kruskal-algoritmus alapján először az 1 súlyú élekből választ annyit, hogy az x_i csúcsokból álló részgráf összefüggő és körmentes legyen. Ehhez $k-1$ él szükséges. Ezután hasonlóan a 2 súlyú élekből $m-1$ megfelelő élt fogunk választani. Végül a 3 súlyú élekből válsztunk. Ezek közül elég egy, mivel a tetszőleges, ha többet választanánk, akkor kör keletkezne. Tehát a minimális súly $k-1+2(m-1)+3 = k+2m$.

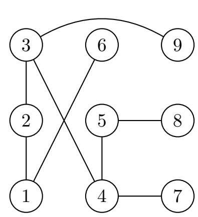
15. A feltételek szerint a berajzolt szakaszok gráfja összefüggő, emellett fának is kell lennie, mert ha lenne benne kör, akkor ennek valamelyik élét törölve nem sérülne az összefüggőség, az összhossz vizont csökkenne. Mivel minden szakasz egységnyi hosszú és összesen $(n+1)^2$ csúcsúnk van, ezért a minimális összhossz: $(n+1)^2-1$.

16. Ha $n=1$, akkor 1. Ha $n \geq 2$, akkor ezek a fák az utak. Izomorfia erejéig egyetlen cimkézetlen n hosszú út van. Ennek a csúcsait $n!$-féleképpen lehet cimkézni, azonban így minden számozott utat kétszer kaptunk meg (oda-vissza), így $\frac{n!}{2}$ fa van, mely megfelel a feltételeknek.

17. Mivel a gráf egyszerű, összefüggő és n csúcsára n él illeszkedik, ezért a gráfban pontosan egy kör van. A különböző feszítőfák abban különböznek, hogy a kör melyik élét hagyjuk el. Ezért csak akkor lehet n különböző feszítőfa, ha a kör a gráfban n élből ál, tehát ez a gráf a C_n.

18. Az első fa Prüfer-kódja: $(6,1,2,6,5,6,8)$, míg a másodiké: $(2,2,5,8,8,8,8,8,8,8,11,14,14)$.

19. Fejtsük vissza a kódot: $(1,2,3,4,5,4,3,9) \to (6,1,2,7,8,5,4,3)$. Ez alapján a gráf a következő:

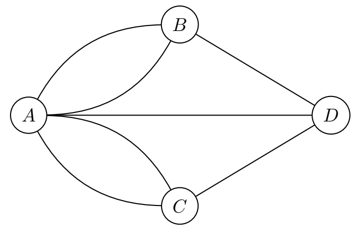


20. Tudjuk hogy az $(n-1)$. elem az n, ezért a kódban minden elem az n. Könnyen látható, hogy ez annak az n csúcsú csillagnak a Prüfer-kódja, melyben az n sorszámú pont a csillag középpontja.

21. Könnyen látható, hogy ha egy csúcs foka legalább 3, akkor a sorszáma legalább kétszer szerepel a Prüfer-kódban. Tehát minden csúcs foka legfeljebb 2, vagyis a fa egy út. Amennyiben a Prüfer-kód $(p1_,p2_, \ldots, p_{n-2})$, akkor az ehhez tartozó fa a $p - p_1 - \cdots - p_{n-1}$, ahol p a Prüfer-kódból hiányzó két sorszám közül a kisebbik.

1.1.3. Euler-út és Euler-kör

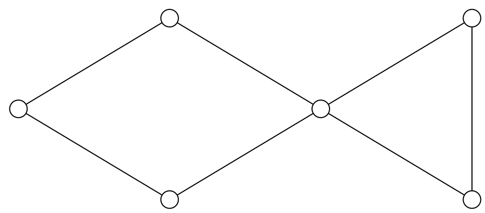
1. Átírva a feladatot a gáfok nyelvére azt kapjuk, hogy a következő gráfban létezik-e Euler-kör:



Mivel a gráfban van két páratlan fokú csúcs (A és D), ezért nincs benne Euler-kör.

2. Ellenőrizve a fokszámokat kapjuk hogy az elsőben egyik sincs, a másodikban csak Euler-út, míg a harmadikban Euler-út és Euler-kör is van.

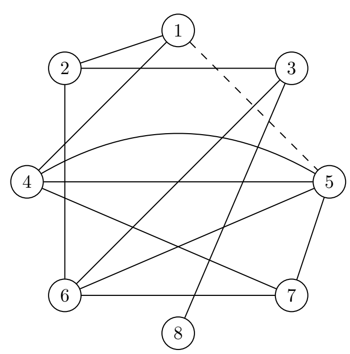
3. Igen, van ilyen gráf, például:



4. Mivel egy n csúcsú teljes gráfban minden csúcs foka $n-1$, ezért ha n páratlan, akkor mindkettő van benne, ha $n = 2$, akkor csak Euler-út és ha $n \geq 4$ és páros, akkor egyik sincs.

5. Az M-beli csúcsok foka n, míg az N-beli csúcsok foka m, ezért ha mindkettő páros, akkor van a gráfban Euler-kör és csak akkor van Euler-út, ha $n = 2$ és m páratlan, vagy $m = 2$ és n páratlan.

6. Feleltessünk meg az alaprajznak egy olyan gráfot, melyben a csúcsok a szobáknak felelnek meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha van ajtó a csúcsoknak megfelelő szobák között (multiplicitással). Ebben a gráfban Euler-utat keresünk. Látható, hogy 4 páratlan fokú csúcs lesz $(1, 2, 5, 3)$, amiből egy él elvételével 2-nek szabad maradnia. Azt is figyelembe véve, hogy a 2-es csúcs fokának páratlannak kell maradnia, ezért csak az 1-es és 5-ös szoba között ajtót falazhatták be, és ekkor a 3-as terem lesz a trónterem.



7. Az 1 és 100 csúcsok foka 2, a 2 és 99 csúcsok foka 3, míg a többi csúcs foka 4, ezért Euler-utat tartalmaz a gráf, de kört nem.

8. (a) A gráf összefüggő, mert 1 bit változtatásával bármely csúcsból bárhova el lehet jutni. Másrészt minden csúcs foka n, ezért akkor lesz G_n-ben Euler-kör, ha n páros.

   (b) A gráf nem összefüggő, mert 2 bit változtatásával az 1-esek számának paritása nem változik, tehát semmilyen n-re nincs G_n-ben Euler-kör.

9. Duplázzuk meg G minden élét, és az így kapott gráf legyen G'. Ebben a G'-ben lesz Euler-kör, mert minden csúcs foka páros, és ezen Euler-kör mentén G-en pontosan a feltételeknek megfelelő bejárást kapunk.

10. Mivel a gráfban minden csúcs foka páros, ezért van benne Euler-kör. Induljunk el egy tetszőleges v csúcsból és járjuk be az Euler-kört úgy, hogy az érintett éleket felváltva pirosra és kékre színezzük. Mivel minden v-től különböző csúcson kétszer haladtunk át és beérkezéskor valamint távozáskor egy-egy élet pirosra és kékre színeztünk, ezért ezeknél megfelelő a színezés. A v csúcson egyszer végigmentünk a bejárás során, vagyis egy piros és egy kék él már illeszkedik rám tehát azt kell csak megmutatni, hogy az Euler-kör első és utolsó éle ellentétes színű, vagyis a kör páros sok élből áll. Mivel az élek száma a fokok összegének fele és minden fokszám osztható 4-gyel, ezért az élek száma biztosan osztható 2-vel, vagyis az állítást beláttuk.

11. Vegyük észre, hogy a rács azon pontjai, melyek a rács szélén de nem a sarkain vannak, páratlan fokúak. Ezekből összesen $2(k-2)+2(l-2)$ darab van, tehát csak akkor lehet Euler-kör a gráfban, ha $2(k-2)+2(l-2)=0$, vagyis $k=l=2$, Euler út pedig pontosan akkor van, ha $2(k-2)+2(l-2) \leq 2$, ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $k=l=2$ vagy $k=1$ és $l=2$ vagy $k=2$ és $l=1$.

12. Legyen a 8-elemű halmaz H. A G gráfnak összesen $\binom{8}{2}=28$ csúcsa van. Egy (a,b) csúcs azokkal a csúcsokkal van összekötve, melyek nem tartalmazzák az a és b elemet, vagyis elemeit a $H \setminus \{a,b\}$ halmazból választjuk. Erre $\binom{6}{2}=15$ lehetőségünk van, tehát a gráfban nincs Euler-kör.

1.1.4. Hamilton-út és Hamilton-kör

1. Tegyük fel, hogy van Hamilton-kör a gráfban. Legyen ez $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$.Ha ebből a körből elveszünk k csúcsot, akkor a kör legfeljebb k összefüggő komponensre eshet szét, tehát ellentmondáshoz jutottunk. (Hamilton-útra ugyanez a gondoltmenet használható.)

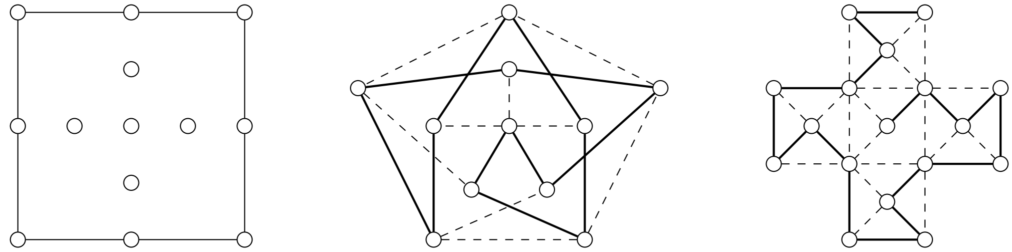
2. (a) Igaz, mert legyen G egy n hosszú kör. Ekkor a komplementerben minden csúcs foka $n-3$, vagyis ha $n \leq 6$, akkor a Dirac-tétel miatt lesz Hamilton kör, ha pedig $n=5$, akkor $\overline{G}$ is egy 5 hosszú kör.
   (b) Igaz, mert ha G egy n csúcsú csillag, akkor $n \geq 4$ esetén nincs benne Hamilton-út, míg a komplementerében a csillag középpontja izolált csúcs lesz, tehát benne sem lesz Hamilton-út.

3. Feleltessük meg a gyöngyöket egy G gráf csúcsainak és két csúcs akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő gyöngyök különböző színűek. Ekkor az a kérdés, hogy létezik-e Hamilton-kör ebben a gráfban. A "piros" csúcsok foka 350, a "kék" csúcsok foka 300, míg a "zöld" csúcsok foka 250, ezért a Dirac-tétel miatt létezik Hamilton-kör a gráfban.

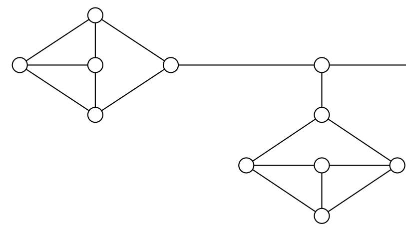
4. Igen, például az $1-3-5-\cdots-97-99-100-98-96-\cdots-4-2-1$ egy Hamilton-kör.

5. Legyenek az emberek egy G gráf csúcsai és két csúcs akkor van összekötve, ha a csúcsoknak megfelelő emberek ismerik egymást. Azt kell megmutatni, hogy vagy G-ben vagy $\overline{G}$-ben van Hamilton kör. A feladat feltétele miatt G-ben minden csúcs foka k és $\overline{G}$-ben pedig $20-1-k=19-k$. A skatulya elv miatt k vagy $19-k$ közül az egyik legalább 10, így a Dirac-tétel szerint G-ben vagy $\overline{G}$-ben lesz Hamilton-kör.

6. A elsőben nem létezik egyik sem, mert a 4 negyedfokú csúcsot elhagyva a gráf 6 komponensre esik szét. A másodikban van Hamilton-kör, míg a harmadikban a 4 hetedfokú csúcsot elhagyva a gráf 5 komponensre esik szét, ezért Hamilton-kör nincs benne, viszont hamilton-út van.



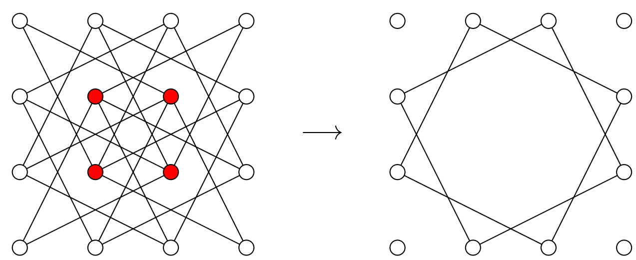
7. A következő gráfban a középső csúcsot elhagyva a gráf 3 komponensre esik szét, tehát nem lehet benne Hamilton kör.



8. A gráfnak $2^5 = 32$ csúcsa van. Egy v csúcs foka annyi, mint azon sorozatok száma, melyek legalább 3 helyen különböznek v-től. Ezeknek a száma: $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 16$, tehát a Dirac-tétel miatt lesz a gráfban Hamilton-kör.

9. Vegyünk G-hez egy új v csúcsot, melyet kössünk össze minden G-beli csúccsal és jelöljük ezt a gráfot G'-vel. Ebben a G'-ben $2k+2$ csúcs lesz. A v csúcs foka $2k+1$, míg a G-beli csúcsok foka legalább $k+1$ lesz. Így a Dirac-tétel miatt G'-ben lesz egy H Hamilton-kör. H-ból elvéve a v-t a maradék csúcsok egy utat alkotnak, mely G összes csúcsát tartalmazzák és élei is G közül kerülnek ki. Így ez az út Hamilton-út lesz G-ben.

10. Feleltessünk meg a sakktáblának egy G gráfot, melyben a csúcsok a tábla mezői, és két csúcs akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő mezők lóval elérhetőek egy lépésben. Akkor tudunk a feltételeknek megfelelő bejárást adni, ha G-ben van Hamilton-kör. Vegyük észre, ha a gráf középső 4 csúcsát elhagyjuk, akkor a gráf 6 komponensre esik szét, így nem lehet benne Hamilton-kör.



11. Az i. napi vacsora előtti állapothoz rendeljünk egy G_i gráfot, melynek csúcsai az emberek, élei pedig a még jó kapcsolatoknak felelnek meg. A társaság akkor marad még egy éjszakára, ha G_i-ben van Hamilton-kör. A G_i gráfból úgy nyerjük G_{i+1}-et, hogy egy Hamilton-körének éleit töröljük, vagyis minden csúcs fokát kettővel csökkentjük. Mivel a kezdeti gráf egy K_{100}, ezért minden csúcs foka kezdetben 99. Az eddigiek alapján tehát G_i-ben a csúsok foka $99 - 2(i-1)$ lesz. Ez a 25. napra 51, tehát a Dirac-tétel miatt lesz még Hamilton-kör G_{25}-ben, vagyis az állítást igazoltuk.

12. A bizonyításhoz teljes indukciót használunk a csúcsok számára. Ha $n = 2$, akkor a $00 - 01 - 11 - 10$ Hamilton-kör a gráfban. Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz az állítás és legyen a Hamilton-kör az $n-1$ csúcsú esetben $h_1 - h_2 - \cdots - h_{2^{n-1}}$. Egészítsük ki a Hamilton-kör tagjait egy 0-val vagy 1-gyel a következőképpen: $0h_1 - 0h_2 - \cdots - 0h_{2^{n-1}} - 1h_{2^{n-1}} - 1h_{2^{n-1}-1} - \cdots - 1h_2 - 1h_1$. Az indukciós feltevés miatt a h_i és h_{i+1} csúcsok pontosan 1 bitben térnek el, tehát a csúcsoknak ez a sorozata Hamilton-kör lesz az n csúcs esetben, mivel az összes 2^n darab csúcsot tartalmazza és igaz, hogy a szomszádosak pontosan 1 bitben térnek el egymástól.

13. A G_n csúcsainak száma 2^n és bármely csúcs fokszáma $2^n - n - 1$, erre pedig teljesül hogy $2^n - n - 1 \geq \frac{2^n}{2}$, ha $n \geq 3$, tehát a Dirac-tétel ételmében tartalmaz Hamilton-kört.

1.1.5. Irányított gráfok és a Dijkstra-algoritmus

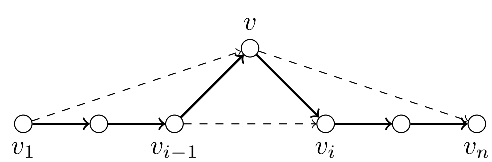
1. Az irányítástól eltekintve három páronként nemizomorf, 4 csúcsú és 3 élű egyszerű gráf létezik: egy háromszög és egy izolált csúcs, út és csillag. Ezek rendre 2-,4-, illetve 4-féleképpen irányíthatóak, tehát 10 ilyen gráf van.

2. Feleltessünk meg a feladatnak egy G irányított gráfot, melyben a csúcsok az emberek, és akkor megy irányított él két csúcs között, ha a megfelelő emberek között pénzátadás történt és az irányítás a pénzátadás irányának megfelelő. Azt kell megmutatni, hogy lesz két csúcs, melynek azonos a befoka. Indirekt tfh. a befokok különböznek. Ez csak úgy fordulhat elő, hogy ha a $0, 1, \ldots, 8$ mindegyike pontosan egyszer szerepel befokként, ami azt jelenti, hogy $0 + 1 + 2 + \cdots + 8 = 36$ él van a gráfban. Ez ellentmondás, mert összesen 45 pénzátadás történt.

3. Számozzuk meg a csúcsokat és az egyik részhalmazba kerüljenek a kisebb számú csúcsból a nagyobbakba, míg a másikba a nagyobb számú csúcsokból a kisebbekbe mutató élek.

4. A mérkőzésekből készítsünk gráfot, a játékosok legyenek a gráf csúcsai és a vesztes csúcsból mutasson nyíl a győztes felé. Azt kell belátni, hogy ebben a gráfban lesz irányított Hamilton-út. Indukcióval bizonyítunk. 1 csúcs esetén triviális, tfh. n-ig beláttuk és nézzük az $n + 1$ csúcsú gráfot. Hagyjuk el ennek a gráfnak egy tetszőleges v csúcsát és a hozzá tartozó éleket. A maradék gráfnak n csúcsa marad és az indukciós feltevés miatt ebben lesz irányított Hamilton-út: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Nézzük meg, hogy az elhagyott v csúcs, hogyan viszonyul ehhez a Hamilton-úthoz:

   - Ha a v és v_1 közötti él v_1-be mutat, akkor a $v, v_1, v_2, \ldots, v_n$ irányított Hamilton-út lesz.
   - Ha a v és v_n közötti él v-be mutat, akkor a $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ irányított Hamilton-út lesz.
   - Ha az előzőek egyike sem teljesül, akkor legyen i a legkisebb olyan index, melyre a v és v_i közötti él v_i-be mutat. Ilyen mindenképpen lesz, mert v_n-be megy v-ből él. Ekkor a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n$ irányított Hamilton-út lesz.



5. Ha $n > 15$, akkor a gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 15, 16, \ldots$ számok. Ezek közül az $1, 2, 4, 8, 16$ számú csúcsok egy K_5-öt határoznak meg, ezért G_n valóban nem síkbarajzolható.

6. G_1:

a	b	c	d	e	f	Választott csúcs	Kész halmaz
1	∞	3	∞	∞	∞	a	$\{S, a\}$
1	∞	**3**	6	5	∞	c	$\{S, a, c\}$
1	6	**3**	**5**	5	∞	d	$\{S, a, c, d\}$
1	6	**3**	**5**	**5**	∞	e	$\{S, a, c, d, e\}$
1	**6**	**3**	**5**	**5**	11	b	$\{S, a, c, d, e, b\}$
1	**6**	**3**	**5**	**5**	**9**	f	$\{S, a, c, d, e, b, f\}$

G_2:

a	b	c	d	e	Választott csúcs	Kész halmaz
1	∞	2	4	8	a	$\{S, a\}$
1	4	2	4	**2**	e	$\{S, a, e\}$
1	3	**2**	4	**2**	c	$\{S, a, e, c\}$
1	**3**	**2**	3	**2**	b	$\{S, a, e, c, b\}$
1	**3**	**2**	**3**	**2**	d	$\{S, a, e, c, b, d\}$

G_3:

a	b	c	d	e	f	Választott csúcs	Kész halmaz
∞	∞	5	∞	**2**	∞	e	$\{S, e\}$
11	∞	**5**	∞	**2**	6	c	$\{S, e, c\}$
9	∞	**5**	**6**	**2**	6	d	$\{S, e, c, d\}$
9	∞	**5**	**6**	**2**	**6**	f	$\{S, e, c, d, f\}$
8	8	**5**	**6**	**2**	**6**	a	$\{S, e, c, d, f\}$
8	**8**	**5**	**6**	**2**	**6**	b	$\{S, e, c, d, f, b\}$

7. Végezzük el a Dijkstra-algoritmust az S csúcsból kezdve:

a	b	c	d	F	Választott csúcs	Kész halmaz
2	∞	5	∞	∞	a	$\{S,a\}$
2	9	**min(2+x,5)**	∞	∞	c	$\{S,a,c\}$
2	9	**min(2+x,5)**	**min(6+x,9)**	∞	d	$\{S,a,c,d\}$
2	**min(7+x,9)**	**min(2+x,5)**	**min(6+x,9)**	**min(9+x,12)**	b	$\{S,a,c,d,b\}$
2	**min(7+x,9)**	**min(2+x,5)**	**min(6+x,9)**	**min(8+x,10)**	F	$\{S,a,c,d,b,F\}$

Tehát alegrövidebb út S-ből F-be $8+x$, ha $x \le 2$ és 10, ha $x > 2$.

1.1.6. Síkbarajzolható gráfok és az Euler-tétel

1. Az Euler-tétel szerint, ha egy síkgráf tartományainak száma t, éleié e, csúcsaié pedig n, akkor $n+t = e+2$.

   (a) Ha minden tartományt három él zár körül, akkor $e = \frac{3}{2}t$, mert ha az éleket tartományonként számoljuk össze, akkor minden élt kétszer számounk, hiszen minden él két tartományt választ el. Az Euler-tétel szerint tehát:
   $$t+n = \frac{2}{3}e + n = e+2.$$
   Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy $e = 3n-6$.

   (b) Hasonló gondolkodással itt azt kapjuk, hogy $e = \frac{4}{2}t = 2t$. Tehát
   $$t+n = \frac{1}{2}e + n = e+2.$$
   Vagyis azt kapjuk, hogy $e = 2n-4$.

2. (a) Tegyük fel, hogy a testnek p csúcsa és l lapja van. Ekkor $lk = pd = 2e$, ahol e az élek száma. Behelyettesítve az Euler-tételbe kapjuk, hogy
   $$l+p = \frac{2e}{k} + \frac{2e}{d} = e+2 \Rightarrow \frac{1}{k} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} > \frac{1}{2}.$$

   (b) Mivel $d \ge 3$, ezért összesen 5 esetben teljesül az előző egyenlőtlenség:

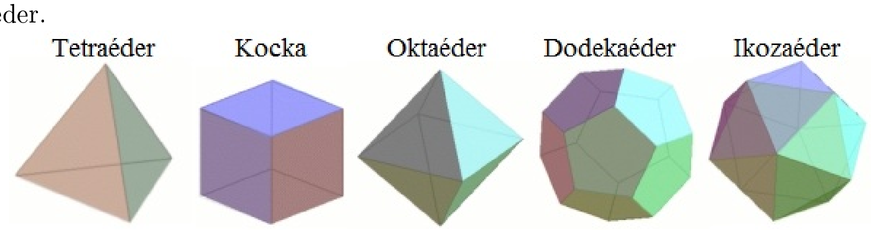
   i. $d = 3$ és $k = 3$: A test szabályos háromszögekből áll és egy csúcsban 3 lap találkozik. Ez a test a tetraéder.

   ii. $d = 3$ és $k = 4$: A test szabályos háromszögekből áll és egy csúcsban 4 lap találkozik. Ez a test az oktaéder.

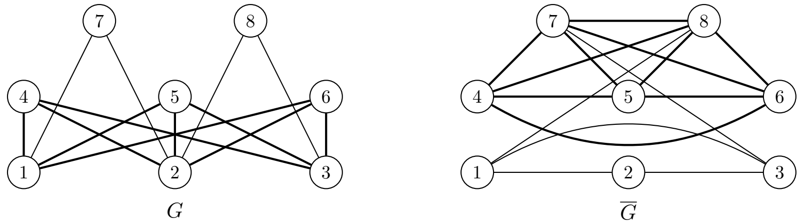
   iii. $d = 3$ és $k = 5$: A test szabályos háromszögekből áll és egy csúcsban 5 lap találkozik. Ez a test az ikozaéder.

   iv. $d = 4$ és $k = 4$: A test szabályos négyszögekből áll és egy csúcsban 4 lap találkozik. Ez a test a kocka.

   v. $d = 5$ és $k = 3$: A test szabályos háromszögekből áll és egy csúcsban 3 lap találkozik. Ez a dodekaéder.



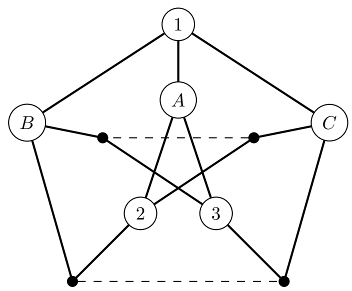
3. Az alábbi ábrákon láthatunk egy példát:



A G gráf $K_{3,3}$-at tartalmaz részgráfként, míg $\overline{G}$ K_5-öt.

4. Ha $n > 15$, akkor a gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 15, 16, \ldots$ számok. Ezek közül az $1, 2, 4, 8, 16$ számú csúcsok egy K_5-öt határoznak meg, ezért G_n valóban nem síkbarajzolható.

5. A Petersen-gráf azért nem síkbarajzolható, mert tartalmaz olyan részgráfot, amely a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf. Pl:



1.2. Algebra

1.2.1. Csoportok

1. (a) A $\circ$ nem művelet, mert nem függvény. Pl: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ és $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{7}$.
   (b) Félcsoport.
   (c) Ábel-csoport, $s = 0$, $(a + bi)^{-1} = -a - bi$).
   (d) Egységelemes kommutatív félcsoport (0-nak nincs inverze), $s = 1$.
   (e) Ábel-csoport, $s = 1$, $r^{-1} = \frac{1}{r}$).
   (f) Csoport, $s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, M^{-1} létezik az invertálhatóság miatt.
   (g) A művelet kommutatív, ezért csak egyoldali semleges elemet és inverzet vizsgálunk.
   Asszociativitás: $(a \circ b) \circ c = (a + b + 1) \circ c = a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$, míg $a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c + 1) = a + b + c + 1 + 1 = a + b + c + 2$, tehár a művelet asszociatív.
   Semleges elem: $s \circ a = s + a + 1 = a$, tehát $s = -1 \in \mathbb{Z}$.
   Inverz: $a^{-1} \circ a = a^{-1} + a + 1 = -1$, tehát $a^{-1} = -2 - a \in \mathbb{Z}$
   Ez egy Ábel-csoport.
   (h) A művelet kommutatív, ezért csak egyoldali semleges elemet és inverzet vizsgálunk.
   Asszociativitás: $(a \circ b) \circ c = (ab + a + b) \circ c = (ab + a + b)c + ab + a + b + c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$, míg $a \circ (b \circ c) = a \circ (bc + b + c) = a(bc + b + c) + a + bc + b + c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$, tehát a művelet asszociatív.
   Semleges elem: $s \circ a = sa + s + a = a$, tehát $s = 0 \in \mathbb{R}$.
   Inverz: $a^{-1} \circ a = a^{-1}a + a^{-1} + a = 0$, vagyis $a^{-1}(a + 1) = -a$. Ebből látszik, hogy a -1-nek nincs inverze, vagyis ez egy kommutatív egységelemes félcsoport. (Ha az alaphalmazból eltávolítjuk a -1-et, akkor már Ábel-csoportot kapnánk, amelyben $a^{-1} = \frac{a}{a+1} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

(i) Ábel-csoport, $s = 0$, $(2^x)^{-1} = 2^{-x}$.

(j) Egységelemes kommutatív félcsoport, $s = \emptyset$.

(k) Egységelemes kommutatív félcsoport, $s = H$.

(l) Ábel-csoport, $s = \emptyset$ és $A^{-1} = A$.

2. Az n. egységgyökök

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

alakban állnak elő. A szorzás nem vezet ki az n. egységgyökök halmazából, mivel ha $a^n = b^b = 1$, akkor $(ab)^n = a^n b^n = 1$. A szorzás asszociatív (és kommutatív) az egész komplex számok halmazán, tehát az egységgyökök között is. Semleges elem a szorzás esetén az 1, ami természetesen tetszőleges n pozitív egsész esetén egységgyök. A komplex számok trigonometrikus alakban történő szorzására vonatkozó De-Moivre tétel alapján $\epsilon_k^{-1} = \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n} = \epsilon_{n-k}$, ami szintén n. egységgyök.

3. (a) A struktúra műveleti táblája:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

A táblázatból könnyedén leolvasható, hogy a semleges elem az 1, illetve mivel a semleges elem minden sorban és oszlopban pontosan egyszer fordul elő, ezért minden elemnek van inverze (pl. a 4-nek a 2), tehát ez egy Ábel-csoport.

(b) A struktúra műveleti táblája:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

A táblázatból könnyedén leolvasható, szorzás kivezet a halmazból, tehát itt a szorzás nem művelet.

(c) Ha G redukált maradékrendszer modulo n.

4. (a)

$$(ab)^{-1}(ab) = e$$
$$(ab)^{-1}a = b^{-1}$$
$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

(b) Indukció n-re. Az $n = 2$ esetet bebizonyítottuk, most tegyük fel, hogy n-ig igaz. Ekkor $(a_1a_2\ldots a_na_{n+1})^{-1} = ((a_1a_2\ldots a_n)a_{n+1})^{-1} = a_{n+1}^{-1}(a_1a_2\ldots a_n)^{-1} = a_{n+1}^{-1}a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\ldots a_1^{-1}$.

5. A feltétel azt jelenti, hogy minden elem megegyezik az inverzével, tehát $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$.

6. A feltételt felhasználva: $abab = (ab)^2 = a^2b^2 = aabb$. Ezt szorozva balról a^{-1}-zel és jobbról b^{-1}-zel kapjuk, hogy $ba = ab$.

7. Legyen a három egymást követő szám, $k, k+1, k+2$. Ekkor $a^{k+1}b^{k+1} = (ab)^{k+1} = (ab)^k(ab) = a^kb^kab$, amiből kapjuk, hogy $ab^k = b^ka$. Ehhez teljesen hasonlóan megkapjuk, hogy $ab^{k+1} = b^{k+1}a = bb^ka = bab^k$, melyet jobbról szorozva b^{-k}-val kapjuk, hogy $ab = ba$.

8. $|D_n| = 2n$, mivel az elemei:
$$\{e, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \tau\varphi, \tau\varphi^2, \ldots, \tau\varphi^{n-1}\}$$
ahol τ egy adott tengelyre való tükrözés és φ a $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás. Több elem nem lehet, mivel $n-1$ forgatás és egy tengelyes tükrözés leírja az összes lehetséges egybevágósági transzformációt. A művelet nem vezet ki a halmazból, mivel két egymás után elvégzett transzformáció is egybevágosági transzformáció marad. Az asszociativitás triviális. Az egységelem a helybenhagyás (e) és minden elemnek létezik inverze.

9. Természetesen $\varphi^n = e$, mivel $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$-t forgatunk. $\tau^2 = e$, mivel a tükrözés csak a körüljárási irányt változtatja meg, amit kétszer egymás után elégezve természetesen helybenhagyást ad. $\varphi\tau = \tau\varphi^{n-1}$, mivel mindkét transzformáció megváltoztatja a körüljárási irányt és az i. pozícióban lévő csúcsot az $(i-1)$. pozícióba viszi.
$\varphi\tau\varphi^2\tau\varphi = \varphi\tau\varphi\varphi\tau\varphi = \varphi\tau\varphi\varphi\tau\varphi = \tau\varphi^{n-1}\varphi\tau\varphi^{n-1}\varphi = \tau e\tau e = \tau^2 = e$

10. Legyen $\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{8} + i\sin\frac{2k\pi}{8}$. Ekkor

Elem	Rendje	Generátuma
ϵ_0	1	$\{\epsilon_0\}$
ϵ_1	8	$\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7\}$
ϵ_2	4	$\{\epsilon_0, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_6\}$
ϵ_3	8	$\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7\}$
ϵ_4	2	$\{\epsilon_0, \epsilon_4\}$
ϵ_5	8	$\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7\}$
ϵ_6	4	$\{\epsilon_0, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_6\}$
ϵ_7	8	$\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7\}$

A csoport ciklikus, mert egy elem is tudja generálni, például $\epsilon 7$.