Biztosításmatematika

Életbiztosítás

Dr. Barabás Béla
egyetemi docens
BME Természettudományi Kar
Matematika Intézet
Sztochasztika Tanszék

2012. március 30.

Tartalomjegyzék

1. Szemelvények a biztosítási törvényből

A biztosító és ezen belül az aktuáriusok (biztosítás matematikusok) tevékenységét törvény szabályozza. A biztosítási törvényből itt azok a részek vannak kiemelve, amelyek olyan alapvető fogalmakat és szabályokat határoznak meg, amellyel minden aktuáriusnak tisztában kell lenni.

1.1. 2003. évi LX. törvény a biztosítókról és a biztosítási tevékenységről

Részletek a törvényből:

1. § . A törvény hatálya kiterjed:
a Magyar Köztársaság területén végzett biztosítási és azzal közvetlenül összefüggő tevékenységre.

2. § (1) E törvény hatálya nem terjed ki:
a) a társadalombiztosítási tevékenységre,
c) a biztosítás azon módszerére, amelyben a veszélyközösség tagjai arra vállalnak kötelezettséget, hogy ha a veszélyközösség tagjának meghatározott káresemény folytán anyagi szükséglete keletkezik, azt egymás között utólag felosztják, és a tagokra kirójják a rájuk eső részt (felosztó-kirovó rendszer),
d) az állami megbízásból vagy állami garanciával végzett exporthitel-biztosítási tevékenységre,
e) az önkéntes kölcsönös biztosító pénztárak és a magánnyugdíjpénztárak tevékenységére,
f) a nemzetközi gépjármű-biztosítási megállapodásból (Zöld Kártya Egyezmény) eredő feladatok ellátására,(stb.)

Biztosító: az a szervezet, amely a hatályos magyar jogi szabályozás, illetve valamely hatályos tagállami szabályozás szerint biztosítási és azzal közvetlenül összefüggő tevékenységre jogosult;

4. § A biztosítási tevékenység biztosítási szerződésen, jogszabályon vagy tagsági jogviszonyon alapuló kötelezettségvállalás, amely során a tevékenységet végző megszervezi az azonos vagy hasonló kockázatoknak kitett személyek közösségét (veszélyközösség), matematikai és statisztikai eszközökkel felméri a biztosítható kockázatokat, megállapítja és beszedi a kötelezettségvállalás ellenértékét (díját), meghatározott tartalékokat képez, a létrejött jogviszony alapján a kockázatot átvállalja és teljesíti a szolgáltatásokat.

Biztosítási tevékenységet kizárólag biztosító végezhet.

Biztosító a 4. § szerinti biztosítási tevékenységen és azzal közvetlenül összefüggő tevékenységen kívül más üzletszerű tevékenységet nem folytathat.

A Magyar Köztársaság területén biztosító részvénytársaság, szövetkezet, egyesület, vagy harmadik országbeli biztosító magyarországi fióktelepe formájában létesíthető.

66. §
(1) A biztosító tevékenységének megkezdésekor a biztosító részvénytársaságnak legalább olyan nagyságú jegyzett tőkével, a szövetkezetnek részjegytőkével, az egyesületnek induló tőkével, illetve a harmadik országbeli biztosító fióktelepének dotációs tőkével kell rendelkeznie, amely elegendő
a) a működés megkezdéséhez szükséges személyi és tárgyi feltételek biztosítására, valamint
b) a tevékenység megkezdésekor felvállalt kockázatokból adódó kötelezettségek teljesítésére (minimális biztonsági tőkerész).
(2) Az 58. § b) pontjában meghatározott pénzeszközök minimális értéke
a) biztosító részvénytársaságnál és harmadik országbeli biztosító fióktelepénél 100 millió forint,
b) biztosító szövetkezetnél 50 millió forint,
c) biztosító egyesületnél 1 millió forint.

12. § Biztosító szövetkezetet legalább 10 tag alapíthat.

19. § A biztosító egyesület olyan önkéntesen létrehozott, kölcsönösségi alapon működő szervezet, amely kizárólag tagjai részére, nyereségérdekeltség nélkül, a tagsági hozzájárulás ellenében, a biztosítási feltételekben meghatározott biztosítási események bekövetkezése esetében, biztosítástechnikai elvek alapján, előre meghatározott szolgáltatást nyújt.

57. §
(1) A Felügyelet engedélye szükséges:
a) a biztosító alapításához (58-62. §),
b) a biztosítási tevékenység megkezdéséhez és megszüntetéséhez, illetve a biztosítási tevékenységgel közvetlenül összefüggő tevékenység megkezdéséhez (63. §),
c) a független biztosításközvetítői, illetve vezérügynöki tevékenység végzéséhez (38. §, 50. §),
d) a biztosítási tevékenység módosításához (92. §),
e) a biztosítási állomány átruházásához (93-95. §),
f) a biztosító átalakulásához, egyesüléséhez, szétválásához,
g) a biztosító biztosítástechnikai tartalékainak e törvényben meghatározott mértéket meghaladó befektetéséhez, illetve az eszközkategóriáktól való eltéréshez,

71. §
(1) A biztosító köteles a Felügyeletnek 2 munkanapon belül bejelenteni, ha
a) fizetési kötelezettségét pénzügyi fedezet hiányában nem képes teljesíteni,
b) biztosítástechnikai tartalékai nem érik el a szükséges mértéket, vagy a biztosítástechnikai tartalékok fedezete nem kielégítő,
c) szavatoló tőkéje nem éri el a minimális szavatoló tőke, illetve a biztonsági tőke szintjét,
d) más vállalkozásban saját jegyzett tőkéjének 10 százalékát meghaladó részesedést szerez,
e) a vezető állású személyek, valamint az egyéb vezetők megválasztását, foglalkoztatását, illetve a személyükben történt változást,
f) székhelye megváltozott,
g) könyvvizsgálója megbízatása megszűnt,
h) hitelviszonyból származó kötelezettségeinek értéke meghaladja a jegyzett tőkéjének 5 százalékát.

A BIZTOSÍTÁSI RENDSZER EGYÉB RÉSZTVEVŐI

A biztosításközvetítő

Biztosításközvetítői tevékenységet függő biztosításközvetítő, illetve független biztosításközvetítő végezhet
A függő biztosításközvetítő (a továbbiakban: ügynök) egy biztosító biztosítási termékeit vagy több biztosító egymással nem versenyző biztosítási termékeit közvetíti.
Független biztosításközvetítő minden egyéb biztosításközvetítő.

45. §
A független biztosításközvetítő biztosításközvetítői tevékenysége során
a) az ügyfél megbízásából jár el (alkusz), vagy
b) egyidejűleg több biztosítóval fennálló jogviszony alapján azok egymással versengő termékeit közvetíti (többes ügynök).

38. §
(1) Független biztosításközvetítői tevékenységet a Felügyelet - alkuszi vagy többes ügynöki tevékenységre vonatkozó - engedélye alapján olyan
a) részvénytársaság,
b) legalább 5 millió forint törzstőkével rendelkező korlátolt felelősségű társaság,
c) harmadik országban székhellyel rendelkező független biztosításközvetítő legalább 5 millió forint tőkével rendelkező magyarországi fióktelepe végezhet, amely e tevékenységet kizárólagosan végzi.

(6) A független biztosításközvetítői tevékenység irányítója kizárólag olyan személy lehet, aki
a) büntetlen előéletű, továbbá nem vezető tisztségviselője olyan gazdasági társaságnak, amellyel szemben a kérelem benyújtását megelőző három évben csőd- vagy felszámolási eljárás indult,
b) felsőfokú végzettséggel rendelkezik, továbbá korábban biztosítónál, biztosításközvetítői tevékenységet folytató gazdálkodó szervezetnél, az államigazgatásban pénzügyi, illetve gazdasági területen vagy a megfelelő szakmai érdek-képviseleti szervnél legalább 3 évig biztosításszakmai vezető beosztást töltött be, vagy biztosítási szaktanácsadóként működött, vagy e szerveknél összesen 5 éves munkaviszonnyal, köztisztviselői jogviszonnyal vagy munkavégzésre irányuló egyéb jogviszonnyal rendelkezik; illetve középfokú végzettséggel rendelkezik és korábban biztosítónál vagy biztosításközvetítést folytató gazdálkodó szervezetnél legalább 7 éven át biztosításszakmai vezetői beosztást töltött be, és
c) kizárólag az adott biztosításközvetítőnél folytatja közvetítői tevékenységét,
d) biztosítóval nem áll munkaviszonyban vagy munkavégzésre irányuló egyéb jogviszonyban.

51. §
(1) A biztosítási szaktanácsadó (a továbbiakban: szaktanácsadó) írásos megbízási szerződés

alapján, kizárólag a megbízótól származó tanácsadói díj ellenében a biztosítási tevékenységgel összefüggő biztosítási szaktanácsot nyújt és személyesen is közreműködik annak megvalósításában. A szaktanácsadó biztosítási (viszontbiztosítási) szerződést nem közvetíthet.
(2) Szaktanácsadói tevékenységet kizárólag olyan természetes személy vagy gazdálkodó szervezet végezhet, akit a Felügyelet nyilvántartásba vett. A felügyeleti nyilvántartás adatait e törvény 5. számú mellékletének 1.C) és 1.D) pontja tartalmazza.

(3) A szaktanácsadói tevékenységet folytató természetes személy, gazdálkodó szervezet és a külföldi szaktanácsadó magyarországi fióktelepe (a továbbiakban: szaktanácsadói fióktelep) köteles e tevékenységére káreseményenként legalább 50 millió forint összegű felelősségbiztosítással, vagy 50 millió forint összegű vagyoni biztosítékkal rendelkezni. A szaktanácsadó felelősségbiztosítási szerződés minimális tartalmi követelményeit a Kormány rendeletben állapítja meg. A felügyeleti nyilvántartásba vétel feltétele, hogy a szaktanácsadó igazolja a Felügyeletnek a felelősségbiztosítási szerződés megkötését vagy a vagyoni biztosíték meglétét.

A BIZTOSÍTÓ VEZETŐ ÁLLÁSÚ SZEMÉLYEIRE ÉS EGYÉB VEZETŐIRE VONATKOZÓ RENDELKEZÉSEK
(3) Biztosítónál vezető állású személy kizárólag olyan személy lehet, aki
a) büntetlen előéletű,
b) szakmai alkalmassággal és üzleti megbízhatósággal rendelkezik,
c) legalább 5 éves biztosítási vagy vállalati gazdálkodási, illetve az államigazgatás pénzügyi és gazdasági területén szerzett vezetői gyakorlattal rendelkezik (az előírt szakmai gyakorlat befejezése nem eshet az engedély iránti kérelem benyújtását 10 évvel megelőző időpontnál korábbi időpontra),
d) felsőfokú iskolai végzettséggel rendelkezik,
e) biztosítónál nem tevékenykedik könyvvizsgálóként.

Ügyvezető, Egyéb vezető állású személyek

85. §
(1) A biztosító a biztosítási tevékenység folytatásához
a) vezető biztosításmatematikust (aktuáriust),
b) vezető jogtanácsost,
c) számviteli rendért felelős vezetőt,
d) belső ellenőrzési vezetőt (belső ellenőrt),
e) ha az 1. számú mellékletben meghatározott nem életbiztosítási ág A) részének, vagy a 2. számú mellékletben meghatározott életbiztosítási ágba tartozó tevékenységet folytat, vezető orvost (a továbbiakban: egyéb vezetők) köteles foglalkoztatni.

A biztosító vezető biztosításmatematikusa (aktuáriusa)

86. §

(1) A biztosító vezető biztosításmatematikusaként (aktuáriusaként) az alkalmazható, aki
a) szakirányú egyetemi végzettséggel és külön jogszabályban meghatározott biztosításmatematikusi (aktuáriusi) képesítéssel rendelkezik;
b) legalább 5 éves, biztosítónál, a Felügyeletnél, a biztosításmatematikusok (aktuáriusok) vagy biztosításközvetítők, szaktanácsadók szakmai érdekvédelmi szervénél, biztosításközvetítői tevékenységet folytató gazdálkodó szervezetnél, biztosító könyvvizsgálójánál szerzett gyakorlattal vagy biztosítási szaktanácsadói szakmai gyakorlattal rendelkezik;
c) büntetlen előéletű;
d) szakmai alkalmassággal és üzleti megbízhatósággal rendelkezik;
e) a biztosítóval munkaviszonyban áll.
(2) A biztosító vezető biztosításmatematikusa (aktuáriusa) aláírásával igazolja:
a) az éves beszámolóban szereplő tartalékok képzésének és mértékének helyességét,
b) a szavatoló tőke szükséglet számításának helyességét,
c) az életbiztosítási ág befektetési hozamának felosztását,
d) a díjkalkulációk szakmai helyességét,
e) az a)-d) pontokra vonatkozó adatok, valamint a tartalékok helytállóságát.
(3) A (2) bekezdésben foglaltakon túl a biztosító vezető biztosításmatematikusa igazolja, hogy a rendelkezésre álló adatok elégségesek, teljesek és összehangoltak voltak, az alkalmazott módszerek a kockázatok természetének megfeleltek.

(4) A biztosító vezető biztosításmatematikusa az éves beszámolóval együtt ahhoz kapcsolódóan benyújtja a Felügyeletnek a biztosító éves külön aktuáriusi jelentését.

(5) Az aktuáriusi jelentés tartalmi követelményeit a pénzügyminiszter rendeletben állapítja meg.
Fogalmak:
7. biztosítási ág: a biztosítások kockázati ismérvek alapján elhatárolt 2 fő csoportja: a nem-élet- (1. számú melléklet) vagy az élettípusú (2. számú melléklet) biztosítási ágak;
8. biztosítási ágazat: a biztosítások biztosítási ágon belüli azonos, illetve egymáshoz hasonló kockázatok alapján elhatárolt csoportja;
9. biztosítási termék: meghatározott biztosítási kockázatokra vagy kockázatcsoportokra kidolgozott feltétel- és teljesítési rendszer;
A biztosítástechnikai tartalékok

117. §
(1) A biztonságos üzletmenet érdekében a biztosítónak a mérleg fordulónapján fennálló, várható kötelezettségei teljesítésére, a károk ingadozására, valamint a várható biztosítási veszteségekre biztosítástechnikai tartalékokat kell képeznie.
(2) Biztosítástechnikai tartaléknak minősülnek:
a) a meg nem szolgált díjak tartaléka;
b) a matematikai tartalékok, ezen belül:
1. az életbiztosítási díjtartalék,
2. a betegségbiztosítási díjtartalék,
3. a balesetbiztosítási járadéktartalék,
4. a felelősségbiztosítási járadéktartalék;

c) a függőkár tartalékok, ezen belül:
1. a bekövetkezett és bejelentett károk tartaléka (tételes függőkár tartalék),
2. a bekövetkezett, de még be nem jelentett károk tartaléka (IBNR);
d) az eredménytől függő díj-visszatérítési tartalék;
e) az eredménytől független díj-visszatérítési tartalék;
f) a káringadozási tartalék;
g) a nagy károk tartaléka;
h) a törlési tartalék;
i) a befektetési egységekhez kötött (unit-linked) életbiztosítások tartaléka;
j) az egyéb biztosítástechnikai tartalékok.
A biztosító szavatoló tőkéje

121. §

(1) A szavatoló tőke a biztosítónak a 123-124. §a szerint korrigált saját tőkéje, amely arra szolgál, hogy a biztosító akkor is teljesíteni tudja kötelezettségeit, ha erre a beszedett díjak, illetve a biztosítástechnikai tartalékok nem nyújtanak fedezetet.
(2) A biztosítónak a biztosítási szerződésből eredő kötelezettségei mindenkori teljesíthetősége érdekében biztosítási áganként folyamatosan legalább annyi szavatoló tőkével kell rendelkeznie, mint az általa folytatott biztosítási tevékenység terjedelmének megfelelő minimális szavatoló tőke szükséglet.
(3) A biztosító minimális szavatoló tőke szükségletének számítási módját a 8. számú melléklet tartalmazza.
A biztonsági tőke

125. §

A minimális szavatoló tőke szükséglet egyharmada képezi a biztosító biztonsági tőkéjét akkor, ha ez nagyobb, mint a 126. §ban meghatározott minimális biztonsági tőke értéke. Egyébként a biztosító biztonsági tőkéje megegyezik a 126. § szerinti minimális biztonsági tőkével.

126. §

(1) A részvénytársaság, a szövetkezet és a harmadik országbeli biztosító fióktelepének minimális biztonsági tőkéje:
a) az életbiztosítási ág esetén (2. számú melléklet) 750 millió forint szorozva a külön jogszabályban meghatározott értékkövetési indexszel,
b) a nem életbiztosítási ág esetén (1. számú melléklet) 500 millió forint szorozva a külön jogszabályban meghatározott értékkövetési indexszel, azonban a 10., 11., 12., 13., 14., 15. ágazatok bármelyikének művelésére vonatkozó engedéllyel rendelkező biztosító esetén 750 millió forint szorozva a külön jogszabályban meghatározott értékkövetési indexszel.
(2) Egyesületnél - a (3)-(4) bekezdésekben foglalt kivételekkel - a minimális biztonsági tőke az (1) bekezdésben meghatározott értékek 75 százaléka.

BEFEKTETÉSI SZABÁLYOK

132. §

(1) A biztosító biztosítástechnikai tartalékai fedezetét képező eszközöket a művelt biztosítási

ágnak és a kötelezettségek lejárati szerkezetének figyelembevételével úgy kell befektetni, hogy a befektetések a biztosító mindenkori likviditásának megőrzése mellett egyidejűleg a lehető legnagyobb biztonságot és jövedelmezőséget teljesítsék.

1.2. 1. számú melléklet a 2003. évi LX. törvényhez

A) rész

A nem életbiztosítási ág ágazatok szerinti besorolása

1. Baleset (beleértve a munkahelyi balesetet és a foglalkozásból adódó megbetegedést)
a) egyszeri szolgáltatások,
b) többszöri vagy folyamatos szolgáltatások,
c) kombinált szolgáltatások,
d) szállított személyeknek nyújtott szolgáltatások.
2. Betegség
a) egyszeri szolgáltatások,
b) többszöri vagy folyamatos szolgáltatások,
c) kombinált szolgáltatások.
3. Szárazföldi jármű-casco (sínpályához kötött járművek nélkül)
a) közúti járművekben,
b) egyéb szárazföldi gépi meghajtású járművekben, munkagépekben,
c) gépi meghajtással nem rendelkező szárazföldi járművekben bekövetkezett károk.
4. Sínpályához kötött járművek cascoja
Sínpályához kötött járművekben bekövetkezett károk.
5. Légijármű-casco Légi járművekben bekövetkezett károk.
6. Tengeri-, tavi és folyami jármű-casco
a) folyami,
b) tengeri járművekben bekövetkezett károk.
7. Szállítmány (beleértve árukat, poggyászokat és valamennyi más vagyontárgyat) A szállított árukban vagy poggyászokban keletkezett károk, függetlenül a használt szállítási eszköz típusától.
8. Tűz- és elemi károk
Minden olyan vagyoni kár - ha nem tartozik a 3., 4., 5., 6. vagy a 7. ághoz -, melynek az okozója
a) tűz,
b) robbanás,
c) vihar,
d) a viharon kívüli, egyéb természeti (elemi) kár,
e) atomenergia,
f) talajsüllyedés és földrengés.
9. Egyéb vagyoni károk
A 3., 4., 5., 6. és 7. ágazatba nem tartozó vagyontárgyakban bekövetkezett olyan kár, amelyet jégverés vagy fagy, valamint bármilyen más, a 8. ágazatba nem tartozó esemény okozott, így például lopás.
10. Önjáró szárazföldi járművekkel összefüggő felelősség Önjáró szárazföldi járművek használatából eredő felelősség, beleértve a fuvarozó felelősségét is, ideértve a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítást.
11. Légi járművekkel összefüggő felelősség Légi járművek használatából eredő felelősség, beleértve a fuvarozó felelősségét is.
12. Tengeri, tavi és folyami járművekkel összefüggő felelősség Tengeri, tavi és folyami járművek használatából eredő felelősség, beleértve a fuvarozó felelősségét is.

13. Általános felelősség
Minden olyan egyéb felelősség, amelyik nem tartozik a 10., 11. és 12. ágazatokba, így például a környezetszennyezéssel kapcsolatos felelősség.
14. Hitel
a) általános fizetésképtelenség,
b) exporthitelezés,
c) részletfizetési ügylet,
d) jelzálog-hitelezés,
e) mezőgazdasági hitelezés.
15. Kezesség, garancia
a) közvetlen kezesség, garancia,
b) közvetett kezesség, garancia.
16. Különböző pénzügyi veszteségek
a) foglalkoztatással összefüggő kockázatok,
b) elégtelen jövedelem,
c) rossz időjárás,
d) nyereségkiesés,
e) folyó mellék- és többletköltségek bármely fajtája,
f) előre nem látható üzleti mellék- és többletköltségek,
g) értékvesztés,
h) bérleti díj- vagy jövedelemkiesés,
i) az eddig említettektől eltérő közvetett kereskedelmi veszteségek,
j) nem kereskedelmi pénzbeli veszteségek,
k) egyéb pénzügyi veszteségek.
17. Jogvédelem
A jogvédelmi biztosítás a jogi eljárási költségek viselésére és a biztosítási fedezetből fakadó más szolgáltatások nyújtására vonatkozó kötelezettség díj ellenében történő elvállalása, így különösen
- a biztosított által elszenvedett kár peren kívüli egyezséggel vagy polgári, illetve büntetőeljárás során történő megtérülésének biztosítása,
- a biztosított polgári, büntető-, államigazgatási vagy egyéb eljárásban, illetve a biztosítottal szemben támasztott kártérítési igény esetében való védelme vagy képviselete.
18. Segítségnyújtás
19. Temetési biztosítás
B) rész
A több ágazatra is kiterjedő engedélyek megnevezése
C) rész
Kiegészítő kockázatok
D) rész
Nagykockázatok

1.3. 2. számú melléklet a 2003. évi LX. törvényhez

Az életbiztosítási ág ágazatok szerinti kockázati besorolása
I. Hagyományos életbiztosítások, úgymint
- határozott tartamú és teljes életre szóló haláleseti biztosítás,
- elérési és díjvisszatérítéses elérési biztosítás,
- halálesetre és elérésre szóló vegyes biztosítás,
- meghatározott tartamra szóló (term fix) biztosítás,
- halasztott, még meg nem indult járadékbiztosítás,
- azonnal induló, illetve már megindult járadékbiztosítás,
- baleseti és betegségi kiegészítő biztosítások.

II. Házassági biztosítás, születési biztosítás, ahol a házasság vagy a születés biztosítási esemény.
III. Befektetési egységekhez kötött életbiztosítás.
IV. Egyéni és csoportos nyugdíjbiztosítás
- nyugdíjalapok kezelése,
- egyéni nyugdíjszámlák kezelése.

V. Társadalombiztosítási nyugdíjat kiegészítő járadékbiztosítás.

2. A halandósági mutatókról

2.1. Alapfogalmak, definíciók:

Jelölje ξ egy újszülött egyén jövőbeli élettartamát. Feltesszük, hogy ξ folytonos, nem negatív valószínűségi. Eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = P(\xi < t)$$

és az

$$S(t) = 1 - F(t)$$

függvényt túlélési függvénynek (survival function) nevezzük. Életbiztosítási szempontból egy x éves egyén halálozási valószínűsége az érdekes. Annak valószínűségét, hogy egy x éves egyén t éven belül meghal jelölje ${}_tq_x$. Ez egy feltételes valószínűség. Nyilvánvalóan

$${}_tq_x = P(\xi < x + t|\xi > x) = \frac{P(x < \xi < x + t)}{P(\xi > x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)} = G_x(t).$$

Legyen

$${}_tp_x = 1 -_t q_x$$

Ez annak a valószínűsége, hogy az x éves egyén még legalább t évig élni fog, ezért elérési valószínűségnek hívjuk. Bevezetve az $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ és $g_x(t) = \frac{d}{dt}G_x(t)$
sűrűségfüggvényeket (amennyiben léteznek)

$$f(t)dt = dF(t) = P(t \leq \xi < t + dt)$$

Egy újszülött várható élettartama:

$$M(\xi) = \int_0^\infty t \cdot f(t)dt = \int_0^\infty [1 - F(t)]dt = e^\circ_{x=0}$$

Hasonlóan egy x éves egyén várható élettartama:

$$e^\circ_x = \int_0^\infty t \cdot g_x(t)dt = \int_0^\infty [1 - G_x(t)]dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

Az $x + e^\circ_x$ a várható életkor.

2.1. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy újszülött élettartamának valószínűségeloszlása

$$F(t) = \frac{\sqrt{t+1} - 1}{\sqrt{101} - 1} \qquad ha \qquad 0 \leq t \leq 100$$

a) Határozza meg az újszülött várható élettartamát!
b) Határozza meg egy 50 éves egyén várható élettartamát és várható életkorát!

2.2. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy újszülött élettartamának valószínűségeloszlása

$$F(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\alpha} \qquad ha \qquad 0 \le t \le 100$$

a) Határozza meg az újszülött várható élettartamát!
b) Határozza meg egy 50 éves egyén várható élettartamát és várható életkorát!

2.2. A halálozási intenzitás

Annak valószínűsége, hogy egy x éves egyén a t és $t+dt$ időintervallumban hal meg feltéve, hogy a $t > x$ kort megérte:

$$\mu_{x,t} \cdot dt = P(t < \xi < t + dt | \xi > x) = \frac{f(t)dt}{1 - F(x)}$$

Definíció: $\mu_{x,t}$ a halálozási intenzitás. Tipikusan $x = t$ esetén μ_t egy t éves egyén halálozási intenzitása. Más alkalmazások esetén általában kockázati rátának (hazard rate) nevezik.

$$\mu_t = -\frac{d}{dt} ln[1 - F(t)]$$

A $\mu_t =$ konstans >0 azt fejezi ki, hogy egy t éves egyén halálozási valószínűsége nem függ az életkorától. Ez az "örökifjú" tulajdonság. Matematikailag:

$$-\frac{d}{dt} ln[1 - F(t)] = \lambda,$$

amiből

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

azaz az élettartam exponenciális eloszlású.

Történelmi próbálkozások elméleti modellekkel:
Abraham DeMoivre egyszerű modelljében ω az életkor felső határa. A $(0; \omega)$ intervallumon a halálozás valószínűsége egyenletes eloszlású.

2.3. Feladat.

- Határozza meg DeMoivre modellje alapján egy újszülött várható élettartamát!
- Halálozási intenzitását!
- Egy x éves egyén ${}_tp_x$ túlélési valószínűségét!

Gompertz halandósági modelljében a halálozási intenzitás exponenciális: $\mu_t = Ac^t$.

2.4. Feladat.

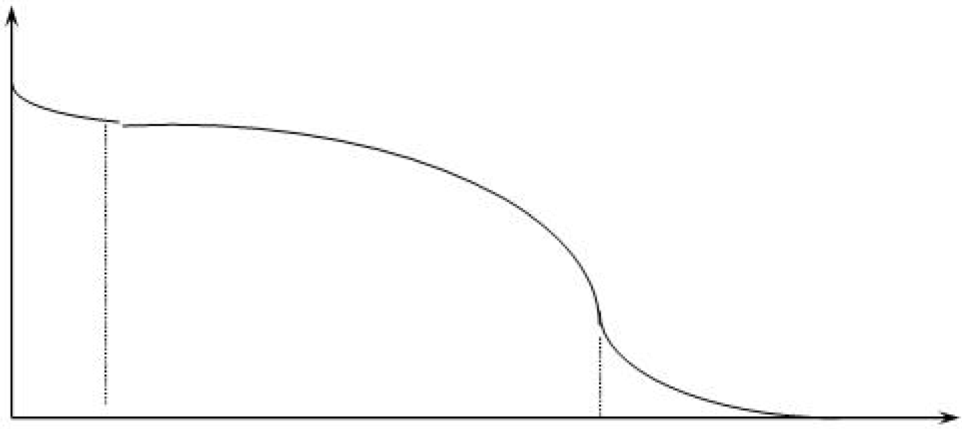
Milyen feltételeknek kell megfelelni az A és c konstansoknak?
- Határozza meg egy x éves egyén ${}_tp_x$ túlélési valószínűségét!
- Egy újszülött várható élettartamát!
Makeham halandósági modelljében a halálozási intenzitás: $\mu_t = A + Bc^t$.

2.5. Feladat.

- Milyen feltételeknek kell megfelelni az A, B és c konstansoknak?
- Határozza meg egy x éves egyén ${}_tp_x$ túlélési valószínűségét!
- Egy újszülött várható élettartamát!

2.3. A halandósági függvény

Jelölje L_0 az újszülöttek egy zárt alaphalmazát és legyen L_x az x évvel később életben lévők halmaza $L_\omega = \emptyset$. Az L_x halmaz elemeinek száma: l_x a halandósági függvény. A halandósági függvény tapasztalatok szerint olyan, amilyet az alábbi ábra mutat:



Gyakorlatban a halandósági táblát használjuk. (lsd. a jegyzet végén) Az újszülöttek zárt alaphalmaza 100000 egyedből áll. Az x évvel később életben levők száma l_x. A halandósági táblázatban x egészszám.
Jelölje

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

azok számát, akik az x éves kort elérik, de az $x + 1$ éves kort már nem.
Az elérési valószínűség ezzel a jelöléssel:

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

A halálozási valószínűség:

$${}_tq_x = 1 -_t p_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

$$F(t) = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$f(t) = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_{x+t}}{dt}$$

$$\mu_{x,t} = \frac{f(t)}{1-F(x)} = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_{x+t}}{dt} \cdot \frac{l_x}{l_{x+t}} = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{dl_{x+t}}{dt}$$

azaz

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{dx} = -\frac{d}{dx} ln l_x$$

végül

$$\mu_x l_x = -\frac{dl_x}{dx} = b(x)$$

az úgynevezett halálozási függvény

A várható élettartam becslése:

$$e_x^\circ = \int_0^\infty [1-F(t)]dt \approx \sum_t {}_tp_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} dt \approx \sum_i \frac{l_{x+i} + l_{x+i+1}}{2l_x}$$

2.6. Feladat.

A halandósági táblázat segítségével határozza meg annak a valószínűségét, hogy egy 30 éves személy eléri a 60 éves kort.

2.7. Feladat.

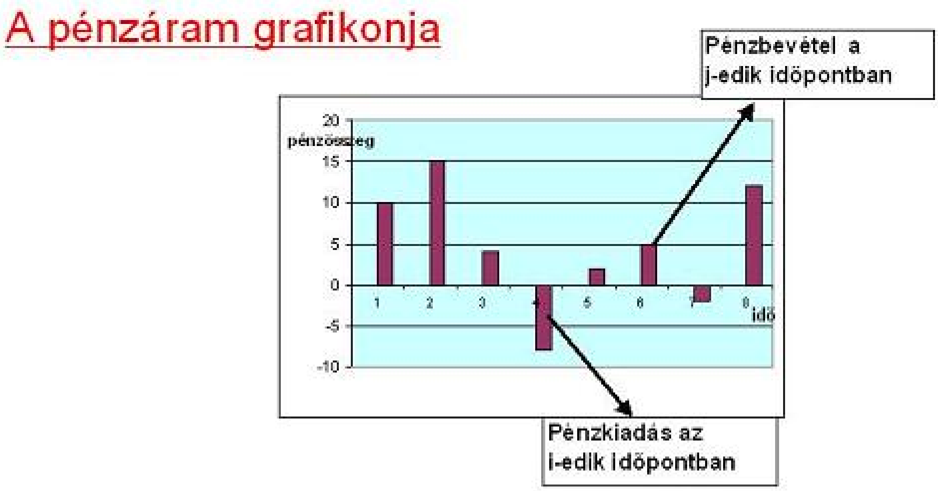
A halandósági táblázat segítségével határozza meg annak a valószínűségét, hogy meghal 50 éves kora előtt.

2.8. Feladat.

A halandósági táblázat segítségével határozza meg annak a valószínűségét, hogy 60 és 80 éves kor között hal meg.

2.4. Pénzügyi alapfogalmak

Egy adott időtartam alatt befolyó pénzbevételek és kiáramló pénzkiadások sorozata



jelen idő: t_0
Az egy év múlva esedékes időpont $t_1, \ldots$ stb

2.4.1. Jelenérték ⇔ Jövőérték

2.1. Példa.

100 ezer Ft-ot kölcsönadunk és egy év múlva 120 ezer Ft-ot kapunk vissza.
A nominális kamatláb $r_n = 20\%$ vagy $r_n = 0.2$ (r, mint return).
Kérdés: Mennyivel lettünk gazdagabbak, ha az infláció mértéke 10%?
Megoldás:
Ha az infláció 10%-os, akkor az 1 év múlva esedékes 120 ezer Ft értéke most $\frac{120}{1.1}$ezer$= 109.09$ezer
A tényleges értéknövekedés: 9,09 ezer, azaz $9,09\% = r_r$ reálkamat.
Figyelem!

$$r_r \neq r_n - i$$

Hogyan számíthatjuk ki a reálkamatot?
Kezdetben van C_0 összeg
r_n: nominális kamatláb
i: infláció
r_r: reálkamat
Egy év múlva esedékes összeg: $C_1 = C_0 \cdot (1 + r_n)$
C_1 értéke most $PV = \frac{C_1}{1+i} = C_0 \cdot \frac{1+r_n}{1+i}$
Tehát $C_0 \cdot (1 + r_r) = C_0 \cdot \frac{1+r_n}{1+i}$ ebből $r_r = \frac{1+r_n}{1+i} - 1 = \frac{r_n - i}{1+i}$
Megjegyzés: $r_r = r_n - i$ jó közelítés, ha i kicsi.

Jelenérték:
n év múlva esedékes C_n összeg értéke most r hozamráta mellett.

$PV_n = \frac{C_n}{(1+r)^n}$ (Present value)

Jövőérték:
C_0 összeg értéke n év múlva r hozamráta mellett.
$FV_n = C_0 \cdot (1+r)^n$ (Future value)
Megjegyzés: PV és FV mindig számított összeg

Technikai kamatláb: az a kamatláb, amellyel a biztosító az élet- és betegségbiztosítási díj és díjtartalék, illetve a balesetbiztosítási és felelősségbiztosítási járadéktartalék megállapításakor kalkulál, amelynek maximális mértékét külön jogszabály állapítja meg.

2.9. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy járadék kifizetése úgy történik, hogy a járadékos P összeget kap az első periódus végén, Pr összeget a második periódus végén, Pr^2 összeget a harmadik periódus végén, és így tovább, az $n-$edik periódusig, amikor is Pr^n összeget kap. Mennyi ennek a járadéknak a jelenértéke?

2.10. Feladat.

Egy személy 1000EUR-t kap kölcsön r éves kamatra. A kölcsönvevő azt vállalja, hogy 6 év múlva visszafizet 1000EUR-t, majd újabb 6 év után 2000EUR-t. Megváltozik azonban a pénzügyi helyzete és ezért az első törlesztés után 3 évvel rendezi adósságát. Mekkora összeget kell ekkor kifizetnie?

2.11. Feladat.

Mekkora összeget kell elhelyezni most a bankban, ha a bank 6 % éves kamatot ígér havi lekötéssel és mi 1 millió forintot szeretnénk kapni a 3. év végén?

3. Az ekvivalencia elv

A biztosítás díjkalkulációjának alapelve az "ekvivalencia elv", amely szerint a várható bevételnek meg kell egyezni a várható kiadással. A várható bevételt és a várható kiadást természetesen ugyan arra az időpontra számoljuk. Ez szokásos módon jelenérték. Ezen elv alapján határozzuk meg a nettó díjat, amelyet majd módosítunk a költségek figyelembevételével.

3.1. Példa.

Tegyük fel, hogy egy 42 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy 20 év múlva, ha megéri ezt a kort, akkor a biztosító fizessen neki 100 000 EUR-t. Ha a biztosított közben meghal, akkor a biztosítót nem terheli semmiféle kötelezettség. Mekkora legyen az egyszeri, azonnal fizetendő díj?

Megoldás

Ekvivalencia elv:

várható bevétel = várható kiadás
Bevétel: 1 valószínűséggel az $A_{\overset{\ \ 1}{42:\overline{20|}}}$ díj.
Kiadás: ${}_{42}q_{20}$ valószínűséggel 0 EUR
${}_{42}p_{20}$ valószínűséggel 100000 EUR
Bevétel várható értéke: $A_{\overset{\ \ 1}{42:\overline{20|}}}$
Kiadás várható értéke 20 év múlva:

$$100000 \cdot {}_{42}p_{20}$$

amelynek a jelen időpontra diszkontált értéke:

$$100000 \cdot {}_{42}p_{20} \cdot \nu^{20},$$

ahol $\nu = \frac{1}{1+i}$ ha i jelöli a kamatlábat.
Tehát

$$A_{\overset{\ \ 1}{42:\overline{20|}}} = 100000 \frac{l_{62}}{l_{42}} \nu^{20}$$

1998-as halandósági táblával és 3%-os technikai kamattal:

$$A_{\overset{\ \ 1}{42:\overline{20|}}} = 100000 \cdot \frac{65132}{92430} \cdot (\frac{1}{1.03})^{20} = 39015,5EUR$$

Megjegyzés: Ha az ügyfél a 39015,5 EUR összeget nem elérési biztosításba fektetné, hanem elhelyezné egy bankban 3%-os éves kamatos kamatra, akkor 20 év múlva csak $39015,5 \cdot 1,03^{20} = 70466,33EUR$ járna neki.

3.2. Példa.

Tegyük fel, hogy egy 42 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy 20 év múlva, ha megéri ezt a kort, akkor a biztosító fizessen neki 100 000 EUR-t. Ha a biztosított közben meghal, akkor a biztosítót nem terheli semmiféle kötelezettség. A biztosított arra vállal kötelezettséget, hogy a biztosítás díját három egyenlő részletben fizeti. Az első részletet azonnal, a második és harmadik részletet egy-egy évvel később. Mekkora legyen az éves díj?
Megoldás A várható kiadás jelen időpontra diszkontált értéke most is

$$100000 \cdot {}_{42}p_{20} \cdot \nu^{20}$$

Ha a fizetendő díjat P jelöli, akkor a bevétel jelen időpontra diszkontált értéke:

$$P + P \cdot {}_{42}p_1 \cdot \nu + P \cdot {}_{42}p_2 \cdot \nu^2.$$

Tehát

$$P = 100000 \cdot \frac{{}_{42}p_{20} \cdot \nu^{20}}{1 + {}_{42}p_1 \cdot \nu + {}_{42}p_2 \cdot \nu^2}$$

Ugyancsak az 1998-as halandósági táblával és 3%-os technikai kamattal számolva:

$${}_{42}p_1 \cdot \nu = \frac{91696}{92430} \cdot \frac{1}{1,03} = 0,963164 \qquad s_{42}p_2 \cdot \nu^2 = \frac{90912}{92430} \cdot \frac{1}{1,03^2} = 0,927115,$$

ezért

$$P = \frac{39015,5}{2,890279} = 13498,9EUR$$

4. A kommutációs függvények

$$D_x = l_x \cdot \nu^x, (x = 0, 1, 2, \dots, \omega)$$

ahol $\nu = \frac{1}{1+i}$ a diszkonttényező és az i a kamatláb.
D_x tehát az x éves élők számának a 0 időpontra diszkontált értéke.
Továbbá:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega$$

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \dots + N_\omega$$

Bevezetünk további három kommutációs függvényt:

$$C_x = d_x \cdot \nu^{x+1}, (x = 0, 1, 2, \dots, \omega)$$

ahol $d_x = l_x - l_{x+1}$
C_x tehát a halottak számának diszkontált értéke.
Továbbá:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \dots + C_\omega$$

$$R_x = M_x + M_{x+1} + \dots + M_\omega$$

4.1. Összefüggés a kommutációs függvények között

$$C_x = \nu \cdot D_x - D_{x+1}$$

$$M_x = D_x - d \cdot N_x, (d = 1 - \nu)$$

d az úgynevezett diszkontláb

$$R_x = N_x - d \cdot S_x$$

4.2. Elérési biztosítás nettó készpénzértéke

Egy x éves egyén arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy n év múlva – feltéve, hogy megéri az $x + n$ éves kort, 1 pénzegységet kapjon. Egyébként a biztosítót nem terheli kötelezettség. Mennyi legyen az induláskor fizetendő egyszeri biztosítási díj, azaz mennyi a biztosítás készpénzértéke?

Az ekvivalencia elv alapján:

$$l_x \cdot A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = l_{x+n} \cdot \nu^n$$

ahonnan

$$A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \nu^n = \frac{l_{x+n} \cdot \nu^{x+n}}{l_x \cdot \nu^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

4.1. Példa.

A 3.1. példa megoldása a kommutációs függvények segítségével:

$$100000 \cdot A_{\overset{1}{42:\overline{20}|}} = 100000 \cdot \frac{D_{42+20}}{42} = 100000 \cdot \frac{10420,45}{26708,50} = 39015,5EUR$$

4.3. Haláleseti biztosítás

Egy x éves egyén azzal a feltétellel köt biztosítást, hogy annak az évnek a végén, amikor meghal, az örököse 1 pénzegységet kapjon.
A biztosítás készpénzértéke (egyszeri nettó díja) A_x, akkor

$$l_x \cdot A_x = d_x\nu + d_{x+1}\nu^2 + d_{x+2}\nu^3 + \cdots$$

ahol $d_{x+j} = l_{x+j} - l_{x+j-1}$
Tehát

$$A_x = \frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{\infty} d_{x+j}\nu^{j+1} = \frac{1}{l_x\nu^x}\sum_{j=0}^{\infty} d_{x+j}\nu^{x+j+1} = \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\infty} C_{x+j}$$

azaz

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

4.2. Példa.

Tegyük fel, hogy egy 42 éves férfi azzal a feltétellel köt biztosítást, hogy halála esetén, annak az évnek a végén örököse kapjon 100000EUR-t. Mennyi ennek a biztosításnak a készpénzértéke most?

Megoldás

$$A_{42} = \frac{M_{42}}{D_{42}} = \frac{12600,21}{26708,5} = 0,47177821,$$

ezért a 100000Eur-os biztosítás készpénzértéke: 47177 EUR.

4.3.1. Időszakos haláleseti biztosítás

A haláleseti biztosítás érvénye csupán n évre terjed ki. (A biztosító kötelezettsége n év után mindenképpen megszűnik.) Készpénzértéke $A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}$ akkor,

$$l_x \cdot A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = d_x\nu + d_{x+1}\nu^2 + d_{x+2}\nu^3 + \cdots + d_{x+n-1}\nu^n = \sum_{j=0}^{n-1} d_{x+j}\nu^{j+1}$$

ahonnan

$$A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

4.3. Példa.

Tegyük most fel, hogy egy 42 éves férfi azzal a feltétellel köt biztosítást, hogy ha 62 éves kora előtt meghal, akkor annak az évnek a végén örököse kapjon 100000EUR-t. Ha megéri a 62 éves kort, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Mennyi ennek a biztosításnak a készpénzértéke most?

Megoldás

$$A_{\overset{1}{42:\overline{20|}}} = \frac{M_{42} - M_{62}}{D_{42}} = \frac{12600,21 - 7025,82}{26705,5} = 0,208736,$$

ezért a 100000Eur-os biztosítás készpénzértéke: 20873,6 EUR.

4.3.2. Elhalasztott haláleseti biztosítás

A biztosító kötelezettsége nem azonnal kezdődik, hanem f év múlva.
Készpénzértéke:
f év múlva kezdődő életfogytig tartó esetben: ${}_{f|}A_x$
f év múlva kezdődő és onnan számítva n évig tartó esetben: ${}_{f|}A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}$ (Figyelem a biztosítás teljes tartama $f + n$ év.)

$${}_{f|}A_x = A_x - A_{\overset{1}{x:\overline{f|}}} = \frac{M_{x+f}}{D_x}$$

$${}_{f|}A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = A_{\overset{1}{x:\overline{n+f|}}} - A_{\overset{1}{x:\overline{f|}}} = \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_x}$$

4.4. Példa.

Tegyük fel, hogy egy 42 éves férfi azzal a feltétellel köt biztosítást, hogy ha 50 és 70 éves kora között meghal, akkor annak az évnek a végén örököse kapjon 100000EUR-t. Minden más esetben a biztosítót nem terheli kötelezettség. Mennyi ennek a biztosításnak a készpénzértéke most?

Megoldás

$$_{8|}A_{\overset{1}{42:\overline{20|}}} = A_{\overset{1}{42:\overline{28|}}} - A_{\overset{1}{42:\overline{8|}}} = \frac{M_{50} - M_{70}}{D_{42}} = 0,236296$$

ezért a 100000Eur-os biztosítás készpénzértéke: 23629,6 EUR.

4.3.3. Változó összegű haláleseti biztosítás készpénzértéke

a) A haláleseti biztosítás n évre szól és a kifizetendő pénzmennyiség az $1, 2, 3, \dots, n$ számtani sorozat szerint alakul.
Ennek készpénzértéke:

$$(JA)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1} d_{x+j}(j+1)\nu^{j+1} = \frac{1}{l_x\nu_x}\sum_{j=0}^{n-1} d_{x+j}(j+1)\nu^{x+j+1} = \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\cdot C_{x+j} =$$

$$= \frac{R_x - R_{x+n} - n\cdot M_{x+n}}{D_x}$$

4.5. Példa.

Egy 22 éves nő azzal a feltétellel kíván 28 évre szóló haláleseti biztosítást kötni, hogy ha 28 éven belül meghal, akkor a biztosító fizessen az örökösének az elhalálozás évétől függően $30, 40, 50, \dots, 300$ ezer EUR-t. A biztosító kötelezettsége, ha a nő életben van, 28 év múlva lejár. Mekkora legyen az egyszeri, azonnal fizetendő díj? (Technikai kamat: 3%)

Megoldás

A feladatot két részre bontjuk:
Egyik rész egy 20ezer EUR összegű 28 évre szóló haláleseti biztosítás. A másik rész egy 28 évre szóló változó összegű haláleseti biztosítás, amely 10ezer EUR-val kezdődik és növekménye 10ezer EUR. Ezért a díj:

$$A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} + (JA)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = S_1\cdot\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + S_2\cdot\frac{R_x - R_{x+n} - n\cdot M_{x+n}}{D_x} =$$

$$= 20\cdot\frac{M_{22} - M_{50}}{D_{22}} + 10\cdot\frac{R_{22} - R_{50} - 28\cdot M_{50}}{D_{22}} =$$

$$= \frac{20\cdot(11145 - 9671) + 10\cdot(540562 - 241519 - 28\cdot 9671)}{51481,56} = 6,06260 ezer = 6062,6 EUR$$

4.3.4. Vegyes életbiztosítás készpénzértéke

Egy x éves egyén egyidejűleg n évre szóló elérési és haláleseti biztosítást kíván kötni, azaz ha n éven belül meghal, akkor fizessen a biztosító az örökösöknek $S1$ összeget, ha pedig a biztosított eléri az $x + n$ éves kort, akkor kap $S2$ összeget. Mennyi ennek a biztosításnak a készpénzértéke?
Válasz:

$$K_{\overline{x:n|}} = S_1 \cdot A_{\overset{1}{\overline{x:n|}}} + S_2 \cdot A_{\overline{x:\overset{1}{n|}}} = S_1 \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + S_2 \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

4.6. Példa.

Egy 22 éves nő arra kíván biztosítást kötni, hogy ha 28 éven belül meghal, akkor a biztosító fizessen az örökösének 50 000 EUR-t. Ha pedig eléri az 50 éves életkort, akkor kapjon a biztosítótól 100000 EUR-t. Mekkora legyen az egyszeri, azonnal fizetendő díj? (Technikai kamat: 3%)
Megoldás

$$A_{\overline{22:28|}} = 50 \cdot \frac{M_{22} - M_{50}}{D_{22}} + 100 \cdot \frac{D_{50}}{D_{22}} = \frac{50 \cdot (11144 - 9670) + 100 \cdot 21342}{51481} = 42889EUR$$

4.1. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 40 éves nő arra kíván biztosítást kötni, hogy 20 év múlva, ha megéri ezt a kort, akkor a biztosító fizessen neki 100 000 EUR-t. Ha a biztosított közben meghal, akkor a biztosítót nem terheli semmiféle kötelezettség. Mekkora legyen az egyszeri, azonnal fizetendő díj, azaz mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.2. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 40 éves nő arra kíván biztosítást kötni, hogy 20 év múlva, ha megéri ezt a kort, akkor a biztosító fizessen neki 100 000 EUR-t. Ha a biztosított közben meghal, akkor a biztosítót nem terheli semmiféle kötelezettség. A biztosított arra vállal kötelezettséget, hogy a biztosítás díját két egyenlő részletben fizeti meg. Az első részletet azonnal, a másodikat egy évvel később. Mekkora legyen a fizetendő díj?

4.3. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 40 éves nő arra kíván biztosítást kötni, hogy halála esetén fizessen a biztosító az örökösének 100 000 EUR-t. Mekkora legyen az egyszeri, azonnal fizetendő díj, azaz mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.4. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 40 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy halála esetén fizessen a biztosító az örökösének 100 000 EUR-t. Mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.5. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 60 éves nő arra kíván biztosítást kötni, hogy halála esetén fizessen a biztosító az örökösének 100 000 EUR-t. Mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.6. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 40 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy ha 20 éven belül meghal fizessen a biztosító az örökösének 100 000 EUR-t. Ha eléri a 60 éves kort, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.7. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 60 éves nő arra kíván biztosítást kötni, hogy ha 20 éven belül meghal fizessen a biztosító az örökösének 100 000 EUR-t. Ha eléri a 80 éves kort, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.8. Feladat.

Tegyük fel, hogy egy 40 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy ha 50 és 60 éves kora között meghal fizessen a biztosító az örökösének 100 000 EUR-t. Ha eléri a 60 éves kort, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

4.9. Feladat.

Egy 40 éves nő azzal a feltétellel kíván 20 évre szóló biztosítást kötni, hogy ha 20 éven belül meghal, akkor a biztosító fizessen az örökösének 50 000 EUR-t. Ha pedig eléri a 60 éves kort, akkor ő kapjon a biztosítótól 100 000 EUR-t. Mekkora ennek a biztosításnak a készpénzértéke?

5. Járadékok

5.1. Járadékok nettó díja

5.1.1. Életjáradék nettó díja

Egy x éves egyén minden év elejére 1 pénzegység folyósítását kívánja magának biztosítani egészen haláláig. Ilyenkor beszélünk azonnal kezdődő, életfogytig tartó előleges életjáradékról. Ennek készpénzértéke:

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{\infty} l_{x+j}\nu^j = \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\infty} D_{x+j} = \frac{N_x}{D_x}$$

5.1. Példa.

Mennyiért folyósítható egy azonnal kezdődő, évi másfél milliós életjáradék egy 60 éves nő számára?

Megoldás

$$1.5\cdot\ddot{a}_x = 1.5\cdot\frac{N_x}{D_x} = 1.5\cdot\frac{N_{60}}{D_{60}} = 1.5\cdot\frac{218391}{14713} = 1,5\cdot 14,8434 = 22,265105M$$

5.1.2. Évjáradék nettó díja

5.2. Példa.

Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy a járadékot legfeljebb $n = 10$ éven át folyósítjuk feltéve, hogy a biztosított életben van.

Megoldás

Ekkor:

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1} l_{x+j}\nu^j = \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{n-1} D_{x+j} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

A példában:

$$1.5\cdot\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = 1.5\cdot\frac{N_{60}-N_{70}}{D_{60}} = 1.5\cdot\frac{218391-96541}{14713} = 1,5\cdot 8,281791 = 12,422687M$$

5.1.3. Halasztott járadék nettó díja

A járadékfizetési kötelezettség nem azonnal kezdődik, hanem f évvel később.

Ekkor:

$$_{f|}\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x}\sum_{j=f}^{\infty} l_{x+j}\nu^j = \frac{1}{D_x}\sum_{j=f}^{\infty} D_{x+j} = \frac{N_{x+f}}{D_x}$$

$$_{f|}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=f}^{f+n-1} l_{x+j}\nu^j = \frac{1}{D_x}\sum_{j=f}^{f+n-1} D_{x+j} = \frac{N_{x+f}-N_{x+f+n}}{D_x}$$

5.1.4. Utólagos járadék

A kifizetés nem az év elején, hanem az év végén történik.
A készpénzérték jelölése:

$$a_x, \qquad a_{\overline{x:n}|}, \qquad {}_{f|}a_x, \qquad {}_{f|}a_{\overline{x:n}|}$$

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

$$a_{\overline{x:n}|} = \ddot{a}_{\overline{x:n+1}|} - 1$$

$$a_x = \frac{1}{l_x}\sum_{j=1}^{\infty} l_{x+j}\nu^j = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{\overline{x:n}|} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=1}^{n} l_{x+j}\nu^j = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_{f|}a_x = \frac{1}{l_x}\sum_{j=f+1}^{\infty} l_{x+j}\nu^j = \frac{N_{x+f+1}}{D_x}$$

$${}_{f|}a_{\overline{x:n}|} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=f+1}^{f+n} l_{x+j}\nu^j = \frac{N_{x+f+1} - N_{x+f+n+1}}{D_x}$$

5.1.5. Változó járadék

Előleges évjáradék, ha a kifizetések az $1, 2, 3, \ldots, n$ számtani sorozat szerint alakulnak.
Ekkor:

$$(I\ddot{a})_{\overline{x:n}|} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1} l_{x+j}(j+1)\nu^j = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$$

5.3. Példa.

Egy 60 éves nő azonnal kezdődő évjáradékot szeretne kapni 10 éven keresztül, amely 1,5 millió Ft-tal kezdődik és évente 200ezer Ft-tal nő. Mennyi ennek a készpénzértéke?
Megoldás
A feladatot két járadékfizetésre bontjuk. Egyszer van egy azonnal kezdődő 10 évre szóló 1,3 millió kifizetésű évjáradék. Másrészt van egy 200ezer Ft-tal növő változó összegű évjáradék.
Ezek értéke:

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = S_1 \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + S_2 \cdot \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} =$$

$$= 1300 \cdot \frac{218391 - 96541}{14713} + 200 \cdot \frac{2335178 - 745124 - 10 \cdot 96541}{14713} =$$

$$19257,378 ezer Ft = 19.257.378 Ft$$

5.1. Feladat.

Mennyiért folyósítható egy azonnal kezdődő, évi 2 millió Ft-os életjáradék egy 62 éves nő számára?

5.2. Feladat.

Egy 62 éves nő egyéni számláján 12 millió Ft gyülemlett fel, amelyet azonnal kezdődő életjáradékra kíván átváltani. Mekkora nettó összeg jár neki minden év elején?

5.3. Feladat.

Mennyiért folyósítható egy azonnal kezdődő, évi 2 millió Ft-os 10 évre szóló évjáradék egy 62 éves nő számára?

5.4. Feladat.

Egy 62 éves nő egyéni számláján 12 millió Ft gyülemlett fel, amelyet azonnal kezdődő 10 évre szóló évjáradékra kíván átváltani. Mekkora nettó összeg jár neki minden év elején?

5.5. Feladat.

Egy 62 éves nő azonnal kezdődő évjáradékot szeretne kapni 10 éven keresztül, amely 2 millió Ft-tal kezdődik és évente 100ezer Ft-tal nő. Mennyi ennek a készpénzértéke?

5.6. Feladat.

Egy 62 éves nő azonnal kezdődő életjáradékot szeretne kapni, amely 2 millió Ft-tal kezdődik és évente 100ezer Ft-tal nő. Mennyi ennek a készpénzértéke?

6. Éves díjak

6.1. Nettó díj

Jelentse $K_{\overline{x:n|}}$ egy olyan biztosítás készpénzértékét, amelyet egy x éves egyén n évre köt. Tegyük fel, hogy a biztosítás díját k egyenlő évi előleges részletekben kívánja megfizetni. Mekkora legyen az évente fizetendő összeg? Ha egy-egy részlet $P_{\overline{x:k|}}$ pénzegység, akkor

$$P_{\overline{x:k|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}} = K_{\overline{x:n|}}$$

$$P_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

Például egy S összegű *kockázati* biztosítás esetén

$$P_{\overline{x:k|}} = S \cdot \frac{K_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

6.1. Példa.

Egy 40 éves nő 20 évre szóló elérési biztosítást kíván kötni azzal a feltétellel, hogy ha eléri a 60 éves kort, fizessen neki a biztosító 100ezer EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy 10 éven keresztül évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mennyi a biztosítás készpénzértéke és mennyi legyen az éves nettó díj?
Megoldás

$$\ddot{a}_{\overline{x:k|}} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = \frac{658713 - 40743}{29753} = 8.67035$$

$$K_{\overline{x:n|}^{\,1}} = S \cdot A_{\overline{x:n|}^{\,1}} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = 100000 \cdot \frac{14713}{29753} = 49451 EUR$$

$$P_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}^{\,1}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{49451}{8,67035} = 5703 EUR$$

6.2. Példa.

Egy 40 éves nő arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha meghal, kapjanak az örökösei 100000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy 10 éven keresztül évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mennyi a biztosítás készpénzértéke és mennyi legyen az éves nettó díj?
Megoldás

$$K_x = S \cdot \frac{M_x}{D_x} = 100000 \cdot \frac{10567}{29753} = 35517$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:k|}} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = \frac{658713 - 400743}{29753} = 8.67035$$

$$P_{\overline{x:k|}} = \frac{K_x}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{35517}{8.67035} = 4096 EUR$$

6.3. Példa.

Egy 40 éves nő arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha meghal, kapjanak az örökösei 100000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy élete végéig évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mennyi a biztosítás készpénzértéke és mennyi legyen az éves nettó díj?
Megoldás A biztosítás készpénzértéke most is

$$K_x = S \cdot \frac{M_x}{D_x} = 100000 \cdot \frac{10567}{29753} = 35517$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{658713}{29753} = 22,139$$

$$P_x = \frac{K_x}{\ddot{a}_x} = \frac{35517}{22.139} = 1604EUR$$

6.1. Feladat.

Egy 45 éves apa úgy kíván gondoskodni egyetemi tanulmányait megkezdő gyermekéről, hogy időszakos haláleseti biztosítást köt 5 évre. A biztosító vállalja, hogy az apa 5 éven belüli elhalálozása esetén fizet az örökösnek 5 millió forintot. Az apa vállalja, hogy évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mennyi legyen a biztosítás nettó díja?

6.2. Feladat.

Egy 40 éves apa úgy kíván gondoskodni egyetemi tanulmányait 5 év múlva megkezdő gyermekéről, hogy időszakos haláleseti biztosítást köt a gyermeke tanulmányai idejére. A biztosító kötelezettsége 5 év múlva kezdődik és onnan kezdve 5 évig tart. Ha a biztosított ezen az időszakon belül elhalálozik, akkor a biztosító fizet az örökösnek 5 millió forintot. Az apa vállalja, hogy a biztosítás díját évi egyenlő részletekben azonnal kezdve 5 éven át fizeti . Mennyi legyen a biztosítás nettó díja?

6.3. Feladat.

Egy 45 éves apa úgy kíván gondoskodni egyetemi tanulmányait éppen megkezdő gyermekéről, hogy változó összegű időszakos haláleseti biztosítást köt a gyermeke tanulmányai idejére. A szerződés szerint, ha a biztosított 5 éven belül elhalálozik, akkor a biztosító fizessen az örökösnek az elhalálozás évétől függően 2, 2 és fél, 3, 3 és fél, vagy 4 millió forintot. Az apa vállalja, hogy a biztosítás díját évi egyenlő részletekben azonnal kezdve 5 éven át fizeti . Mennyi legyen a biztosítás nettó díja?

6.4. Feladat.

Egy 45 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, fizessen neki a biztosító 100ezer EUR-t. Ha előbb meghal, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Ennek fejében vállalja, hogy 15 éven keresztül évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mennyi a biztosítás készpénzértéke és mennyi legyen az éves nettó díj?

6.5. Feladat.

Egy 45 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, fizessen neki a biztosító 100ezer EUR-t. Ha pedig előbb meghal, akkor fizessen örökösének a biztosító 100ezer EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy 15 éven keresztül (ha életben van) évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mennyi a biztosítás készpénzértéke és mennyi legyen az éves nettó díj?

6.2. Bruttó díj

- α **-költségek:** A biztosítás megkötésével kapcsolatos kiadások, mint pl. orvosi díj, szerzési jutalék. Egyszeri költségeknek is nevezzük.
- β **-költségek:** Ide sorolják a behajtási költségeket. Ezek csak a díjfizetés időtartama alatt lépnek fel.
- γ **-költségek:** Általános ügyviteli költségek. A biztosítás teljes tartama alatt fellépnek, ezért folyamatos költségnek is szokás nevezni.

Ha a, b, c jelenti az illető költségfajta egy időszakra eső részét, akkor a biztosítás bruttó értéke:
Mivel

$$K^b_{\overline{x:n|}} = P^b_{\overline{x:k|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}$$

$$K^b_{\overline{x:n|}} = K_{\overline{x:n|}} + a + b \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}} + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}$$

$$K_{\overline{x:n|}} = P_{\overline{x:k|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}$$

$$b = \beta \cdot P^b_{\overline{x:k|}}$$

α és γ gyakran az S biztosítási összeg százalékában van megadva:

$$a = \alpha \cdot S, \qquad c = \gamma \cdot S$$

ezért

$$P^b_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

vagy

$$P^b_{\overline{x:k|}} = \frac{P_{\overline{x:k|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

Bruttó díj felbontva:

$$P^b_{\overline{x:k|}} = P_{\overline{x:k|}} + \frac{a}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} + \beta \cdot P^b_{\overline{x:k|}} + c \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

6.4. Példa.

Egy 40 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha 10 éven belül meghal, akkor kapjon az örököse 100000EUR-t. Ha pedig eléri az 50 éves kort, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját egyenlő részletekben mindig az év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$?

Megoldás

$$P^b_{\overline{x:k}|} = \frac{K_{\overline{x:n}|} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k}|}} =$$

$$K_{\overline{40:10}|} = S \cdot \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{40}} = 100000 \cdot \frac{12984 - 10696}{28737} = 7963$$

$$\ddot{a}_{\overline{40:10}|} = \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} = \frac{540834 - 297182}{28737} = 8,4787$$

Ezért az éves bruttó díj:

$$P^b_{\overline{40:10}|} = \frac{7963 + 5000 + 500 \cdot 8,4787}{0,9 \cdot 8,4787} = 2254EUR$$

Nézzük a díj felbontását:

Nettó díj:

$$P_{\overline{x:k}|} = \frac{K_{\overline{40:10}|}}{\ddot{a}_{\overline{40:10}|}} = \frac{7963}{8,4787} = 939EUR$$

alfa költségre:

$$\frac{a}{\ddot{a}_{\overline{x:k}|}} = \frac{5000}{8.4787} = 590EUR$$

béta költségre:

$$\beta \cdot P^b_{\overline{x:k}|} = 225EUR$$

gamma költségre:

$$c \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{x:n}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:k}|}} = 500EUR$$

6.5. Példa.

Egy 40 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 60 éves kort, akkor fizessen neki a biztosító 100000EUR-t. Ha pedig meghal 60 éves kora előtt, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját 10 egyenlő részletben év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$?

Megoldás

$$\ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = \frac{540834 - 139366}{28737} = 13,97$$

Ezért

$$P^b_{\overline{x:k}|} = \frac{K_{\overline{x:n}|}^{\;\;1} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k}|}} = \frac{40867 + 5000 + 500 \cdot 13,97}{0.9 \cdot 8,4787} = 6926EUR$$

Itt is nézzük meg a bruttó díj felbontását:

Nettó díj: 4820EUR

alfa költség: 590EUR
béta költség: 691EUR és
gamma költség: 825EUR

6.6. Példa.

Egy 40 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha meghal, akkor kapjon az örököse 100000EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját 20 egyenlő részletben év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$?
Megoldás

$$P^b_{\overline{x:k|}} = \frac{K_x + a + c \cdot \ddot{a}_x}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{45183 + 5000 + 500 \cdot 18,82}{0,9 \cdot 13,97} = 5137EUR$$

6.3. Fix lejáratú biztosítás

Egy x éves egyén arra köt biztosítást, hogy n év múlva neki, vagy örökösének S összeg álljon rendelkezésére. A biztosított ennek érdekében k éven keresztül kívánja fizetni a díjakat előleges részletekben. $(k \leq n)$
Mennyi a biztosítás nettó értéke?
Mivel az S biztosítási összeg n év múlva biztosan kifizetésre kerül:
A díjfizetés időtartama függ a véletlentől, ezért

$$K_{\overline{x:n|}} = S \cdot \nu^n$$
$$P_{\overline{x:n|}} = \frac{S \cdot \nu^n}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

6.7. Példa.

Egy 40 éves nő 20 évre szóló fix lejáratú (term fix) biztosítást kíván kötni 100ezer EUR értékre. Ennek fejében vállalja, hogy 10 éven keresztül évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját.
a) Mennyi a biztosítás készpénzértéke?
b) Mennyi legyen az éves nettó díj?
c) Mennyi az éves bruttó díj, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$?
Legyen a technikai kamat 3 %.
Megoldás
A biztosítás nettó készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n|}} = 100000 \cdot 1.03^{-20} = 55367$$

Éves nettó díja:

$$P_{\overline{x:k|}} = \frac{55367}{8,6703} = 6386EUR$$

Éves bruttó díja:

$$P^b_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{55367 + 5000 + 500 \cdot 14,7991}{0,9 \cdot 8,6703} = 8684EUR$$

6.8. Példa.

Oldjuk most meg az előző feladat paramétereivel vegyes biztosításként. Azaz, egy 40 éves nő 20 évre szóló vegyes biztosítást kíván kötni 100ezer EUR értékre. Ennek fejében vállalja, hogy 10 éven keresztül évi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját.
a) Mennyi a biztosítás készpénzértéke?
b) Mennyi legyen az éves nettó díj?
c) Mennyi az éves bruttó díj, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$?
Legyen a technikai kamat 3 %.
Megoldás
A (6.1) példában láttuk, hogy az elérési rész nettó készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n|}} = 49451 EUR$$

és nettó díja:

$$P_{\overline{x:n|}} = 5703 EUR$$

A haláleseti rész készpénzértéke:

$$K_x = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 100000 \cdot \frac{10567 - 8352}{29753} = 7445$$

A vegyes biztosítás készpénzértéke: $49451 + 7445 = 56896 EUR$
Nettó díja:

$$P_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{56896}{8,6703} = 6562 EUR$$

Bruttó díj:

$$P^b_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{56895 + 5000 + 500 \cdot 14,7991}{0,9 \cdot 8,6703} = 8880 EUR$$

6.4. Elérési biztosítás díjvisszatérítéssel

Egy x éves egyén azzal a feltétellel köt S összegű elérési biztosítást, hogy

- a díjakat évi előleges részletekben fizeti a biztosítás egész tartama alatt.
- Ha időközben meghal, akkor az örökösök megkapják a befizetett nettó díjak összegét a kamatokkal együtt.

Mennyi a biztosítás nettó készpénzértéke?
Mennyi az éves nettó díj?
Mennyi legyen a bruttó díj?
Megoldás
A biztosító jövőbeli kötelezettségeinek készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n|}} = S \cdot A_{\overline{x:n|}} + P_{\overline{x:n|}} \cdot D_{\overline{x:n|}}$$

ahol $D_{\overline{x:n}|}$ az esetleges díjvisszafizetés diszkontált értékét meghatározó faktor.
Tegyük fel, hogy a haláleset az $(x+j; x+j+1)$ intervallumban következik be. Ekkor a visszafizetendő összeg jelenértéke:

$$P_{\overline{x:n}|} \cdot (1+\nu+\nu^2+\cdots+\nu^j) = P_{\overline{x:n}|} \cdot \frac{1-\nu^{j+1}}{1-\nu}$$

Ennek valószínűsége:

$$\frac{l_{x+j}-l_{x+j+1}}{l_x}$$

Tehát

$$D_{\overline{x:n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-\nu^{j+1}}{1-\nu} \cdot \frac{l_{x+j}-l_{x+j+1}}{l_x} = \frac{1}{1-\nu} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{l_{x+j}-l_{x+j+1}}{l_x} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_{x+j}\nu^{j+1}}{l_x}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\nu} \cdot \left[\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{C_{x+j}}{D_x}\right] = \frac{1}{1-\nu} \cdot \left[{}_nq_x - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right]$$

Az éves nettó díj:

$$P_{\overline{x:n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|} = S \cdot A_{\overline{x:n}|}^{\;\;1} + P_{\overline{x:n}|} \cdot D_{\overline{x:n}|}$$

$$P_{\overline{x:n}|} = S \cdot \frac{A_{\overline{x:n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - D_{\overline{x:n}|}}$$

A bruttó díj pedig:

$$P^b_{\overline{x:n}|} = \frac{P_{\overline{x:n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|}}$$

6.9. Példa.

Egy 40 éves nő 10 évre köt 100000EUR biztosítási összegű díjvisszatérítéses életbiztosítást.
Mennyi a biztosítás nettó készpénzértéke?
Mennyi az éves nettó díj?
Mennyi legyen a bruttó díj?
Megoldás

$$D_{\overline{x:n}|} = \frac{1}{1-\nu} \cdot \left[{}_nq_x - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right] = \frac{1,03}{0,3} \cdot \left[\frac{97056-93565}{97056} - \frac{10567-9670}{29753}\right] = 0.19984$$

Az elérési biztosítás 1 pénzegységre eső értéke:

$$A_{\overline{x:n}|}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{50}}{D_{40}} = \frac{21343}{29753} = 0,717339$$

Tehát a biztosítás nettó díja:

$$P_{\overline{x:n}|} = S \cdot \frac{A_{\overline{x:n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{\overline{x:n}|} - D_{\overline{x:n}|}} = 100000 \cdot \frac{0,717339}{8,6703 - 0.19984} = 8469$$

készpénzértéke

$$K_{\overline{x:n}|} = P_{\overline{x:n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|} = 8469 \cdot 8,6703 = 73426$$

bruttó díja

$$P^b_{\overline{x:n}|} = \frac{73426 + 5000 + 500 \cdot 8,6703}{0,9 \cdot 8,6703} = 10606 EUR$$

Megjegyzés: Ugyan ez elérési biztosítás esetén

$$P^b_{\overline{x:n}|} = \frac{71733 + 5000 + 500 \cdot 8,6703}{0,9 \cdot 8,6703} = 10389 EUR$$

További megjegyzések a díjvisszatérítéshez:
Gyakran a
Bruttó díj = várható kár +bruttó díj * költséghányad +

+bruttó díj * kármentesség valószínűsége * díjkedvezmény
Ha pl. a költséghányad csak 0.5, a kármentesség valószínűsége 0.9 és a díjkedvezmény 0.2, akkor

$$P = K + P \cdot 0.5 + P \cdot 0.9 \cdot 0.2 = K + P \cdot 0.68$$

$$P \cdot 0.32 = K$$

$$P = \frac{K}{0.32} \approx 3 \cdot K$$

díjvisszatérítés nélkül $P \cdot 0.5 = K$, azaz $P = 2 \cdot K$

6.6. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy halála esetén kapjon az örököse 100000EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját egyenlő részletekben mindig az év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 1\%$?

6.7. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha 15 éven belül meghal, akkor kapjon az örököse 100000EUR-t. Ha pedig eléri az 65 éves kort, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját egyenlő részletekben mindig az év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 1\%$?

6.8. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor fizessen neki a biztosító 100000EUR-t. Ha pedig meghal 65 éves kora előtt, akkor a biztosítót nem terheli kötelezettség. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját 10 egyenlő részletben év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 1\%$?

6.9. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor fizessen neki a biztosító 100000EUR-t. Ha pedig meghal 65 éves kora előtt, akkor kapjon az örököse 100000EUR-t a biztosítótól. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját 10 egyenlő részletben év elején fizeti. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 1\%$?

6.10. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra kíván biztosítást kötni, hogy 15 év múlva neki, vagy örökösének 100000EUR álljon rendelkezésére. A biztosított ennek érdekében 10 éven keresztül kívánja fizetni a díjakat előleges részletekben. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 1\%$?

6.11. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor fizessen neki a biztosító 100000EUR-t. Ha pedig meghal 65 éves kora előtt, akkor a biztosító fizesse vissza az örökösöknek a befizetett nettó díjak összegét a kamatokkal együtt. Ennek fejében vállalja, hogy a biztosítás díját egyenlő részletekben év elején fizeti a biztosítás tartama alatt. Mennyi legyen a biztosítás bruttó díja, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 1\%$?

7. Az életbiztosítási alapesetek általános összefoglalása

Egy x éves egyén n évre köt biztosítást (x és n egészszám). Ha $x + n < \omega$ akkor időszakos, egyébként életfogytig tartó biztosítás. A biztosító a biztosítási időszak $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ időpontjában a következő kifizetéseket vállalja:

- e_j pénzegységet fizet, ha a biztosított eléri az $x + j$ életkort.
- h_j pénzegységet fizet, ha a biztosított eléri az $x + j - 1$ életkort, de nem éri el az $x + j$ kort.
- b_j pénzegységet fizet feltétel nélkül.

Ha $j > n$, akkor $e_j = h_j = b_j = 0$. A biztosító évenként esedékes P_j nettó díjat kalkulál. $P_j = 0$, ha $j \geq n$.

Elérési biztosítás esetén:

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_{n-1}, e_n = S$$

$$h_j = b_j = 0$$

Halálozási biztosítás esetén:

$$h_0 = 0, h_1 = h_2 = \cdots = h_n = S$$

$$e_j = b_j = 0$$

Életjáradék S kezdőértékkel és évi ε emelkedéssel:

$$e_0 = S, e_1 = S + \varepsilon, \ldots, e_{n-1} = S + (n-1)\varepsilon, e_n = 0$$

$$h_j = b_j = 0$$

Fix lejáratú biztosítás:

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0, b_n = S$$

$$h_j = e_j = 0$$

Elérési biztosítás díjvisszatérítéssel:

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_{n-1} = 0, e_n = S, b_j = 0$$

$$h_0 = 0, h_1 = P \cdot r, \ldots, h_n = P \cdot (r + r^2 + \cdots + r^n)$$

Általános esetben a biztosítás készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n|}} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{n} \left(e_j l_{x+j} \nu^j + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j+1} \right) + \sum_{j=0}^{n} b_j \nu^j$$

Ha a díjfizetés k éven keresztül egyenlő részletekben történik, akkor az éves nettó díj:

$$P = \frac{K_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

A bruttó érték meghatározása szokásos módon:

$$K^b_{\overline{x:n|}} = K_{\overline{x:n|}} + a + \beta \cdot \sum_{j=0}^{n} P^b_j \frac{l_{x+j}}{l_x} \nu^j + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}$$

Ha a díjfizetés k éven keresztül egyenlő részletekben történik, akkor

$$P^b_0 = P^b_1 = \cdots = P^b_{k-1} = P^b$$

és

$$P^b_k = \cdots = P^b_n = 0$$

ezért

$$P^b = \frac{K_{\overline{x:n|}} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta)\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

7.1. Biztosítás évközi fizetéssel

Díjfizetés vagy járadékfizetés történhet havi, negyedévi vagy félévi részletekben is. Osszuk az évet m egyenlő részre. (m rendszerint 1, 2, 4, vagy 12.)

Szokásos feltételek:

- Egy évnél rövidebb időszakra egyszerű kamatot számolunk.
- Két egymást követő év között a halandósági függvényt lineárisnak vesszük, azaz

$$l_{x+j+\frac{k}{m}} = \left(1 - \frac{k}{m}\right) l_{x+j} + \frac{k}{m} \cdot l_{x+j+1} = l_{x+j} - \frac{k}{m} \cdot d_{x+j}$$

(k=0, 1, 2, ..., m-1)

7.2. Az életjáradék

Meghatározandó az életfogytig tartó előleges életjáradék készpénzértéke, ha a biztosító $\frac{1}{m}$ évenként $\frac{1}{m}$ pénzegységet köteles fizetni. Ekkor az $(x + j, x + j + 1)$ intervallumban a k-adik kifizetés értéke az $x + j$ időpontra diszkontálva:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{\left(1 - \frac{k}{m}\right) l_{x+j} + \frac{k}{m} \cdot l_{x+j+1}}{1 + \frac{k}{m} i} = \frac{1}{m} \cdot \frac{m-k}{m+ki} \cdot l_{x+j} + \frac{1}{m} \cdot \frac{k}{m+ki} \cdot l_{x+j+1}$$

Összegezve kapjuk az m számú kifizetés együttes értékét az $x + j$ időpontban:

$$R_j = A(m) \cdot l_{x+j} + B(m) \cdot l_{x+j+1}$$

ahol

$$A(m) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m-k}{m+ki}$$

$$B(m) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k}{m+ki}$$

Nyilván

$$A(m) + rB(m) = 1$$

ahol $r = 1 + i$ és

$$A(1) = 1, B(1) = 0$$

A járadék készpénzértéke:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{\infty} R_j \nu^j$$

Mivel

$$\ddot{a}_x^{(m)} = A(m) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j}}{l_x} \nu^j + B(m) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j+1}}{l_x} \nu^j$$

és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j}}{l_x} \nu^j = \ddot{a}_x$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j+1}}{l_x} \nu^j = r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j+1}}{l_x} \nu^{j+1} = r(\ddot{a}_x - 1)$$

miatt

$$\ddot{a}_x^{(m)} = [A(m) + rB(m)] \cdot \ddot{a}_x - rB(m) = \ddot{a}_x - rB(m)$$

$rB(m)$ értékei 3%-os technikai kamat esetén:

$m =$	1	2	4	12
$rB(m) =$	0	0.2537	0.3796	0.4632

∘

Speciálisan 0 %-os technikai kamatláb esetén ($i = 0, \quad r = 1$)

$$B(m) = \frac{m-1}{2m},$$

ezért

$m =$	1	2	4	12
$rB(m) =$	0	0.25	0.375	0.45833

7.1. Példa.

Egy 65 éves nő az önkéntes nyugdíjpénztári számláján felgyülemlett 12 millió forintját életjáradékra váltja.
a) Mekkora összegű életjáradék jár neki év elején?
b) Mekkora összegű járadék jár neki, ha nem évente egyszer, hanem havonta kapja a járadékot?
Megoldás
a)

$$\ddot{a}_{65} = \frac{N_{65}}{D_{65}} = \frac{150567.64}{11881.14} = 12.67282$$

Ebből

$$J = \frac{12000000}{12.67282} = 946908Ft$$

b)

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - rB(m) = 12.67282 - 0.4632 = 12.20962$$

azaz évente

$$J = \frac{12000000}{12.20962} = 982831Ft$$

vagyis havonta

$$J = \frac{982831}{12} = 81902Ft$$

Az $\ddot{a}_x^{(m)}$ a kommutációs számokkal így is kifejezhető:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = A(m) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j}}{l_x} \nu^j + B(m) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j+1}}{l_x} \nu^j = A(m) \frac{N_x}{D_x} + B(m) \frac{N_{x+1}}{\nu D_x}$$

7.2.1. Időszakos járadék

Az éves kifizetésű életjáradék mintájára, évközi fizetéssel fennáll

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}^{(m)}_x - \ddot{a}^{(m)}_{x+n} \cdot A_{\substack{\;\;1\\x:\overline{n|}}}$$

ahol

$$A_{\substack{\;\;1\\x:\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

ugyanis

$$\ddot{a}^{(m)}_x = A(m)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{l_{x+j}}{l_x}\nu^j + B(m)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{l_{x+j+1}}{l_x}\nu^j = \frac{A(m)\cdot(N_x - N_{x+n})}{D_x} + \frac{B(m)\cdot(N_{x+1} - N_{x+n+1})}{\nu D_x} =$$

$$= \frac{A(m)\cdot(N_x)}{D_x} + \frac{B(m)\cdot(N_{x+1})}{\nu D_x} - \frac{A(m)\cdot(N_{x+n})}{D_x} - \frac{B(m)\cdot(N_{x+n+1})}{\nu D_x} = \ddot{a}^{(m)}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\ddot{a}^{(m)}_{x+n}$$

Itt felhasználva, hogy $\ddot{a}^{(m)}_x = \ddot{a}_x - rB(m)$ és $\ddot{a}^{(m)}_{x+n} = \ddot{a}_{x+n} - rB(m)$, ezért

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+n}A_{\substack{\;\;1\\x:\overline{n|}}}\right) - rB(m)(1 - A_{\substack{\;\;1\\x:\overline{n|}}}) = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - rB(m)(1 - A_{\substack{\;\;1\\x:\overline{n|}}})$$

adódik.

7.2. Példa.

Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy a járadékot legfeljebb 15 éven át fizetik havonta!
Megoldás
Ekkor

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 10.400869$$

$$rB(m) = 0.4632$$

$$A_{\substack{\;\;1\\x:\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = 0.358826$$

azaz

$$\ddot{a}^{(m)}_x = 10.103877$$

Tehát évente fizetendő

$$J = \frac{12000000}{10.103877} = 1187663$$

havonta: 98971 Ft.

7.2.2. Halasztott életjáradék

$$_{f|}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:n|}} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=f}^{f+n-1} R_j\nu^j$$

vagy

$$_{f|}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:n|}} = _{f|}\ \ddot{a}_{\overline{x:n|}} - rB(m)(A_{\frac{1}{x:f|}} - A_{\frac{1}{x:n\ +\ f|}})$$

Utólagos járulék esetén R_j helyébe

$$\hat{R}_j = \hat{A}(m)\cdot l_{x+j} + \hat{B}(m)\cdot l_{x+j+1}$$

lép, ahol

$$\hat{A}(m) = \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{m-k}{m+ki}$$

$$\hat{B}(m) = \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m+ki}$$

Érvényesek a következő összefüggések:

$$a^{(m)}_{\overline{x:n|}} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1}\hat{R}_j\nu^j$$

és

$$_{f|}a^{(m)}_{\overline{x:n|}} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=f}^{f+n-1}\hat{R}_j\nu^j$$

továbbá

$$\hat{A}(m) + r\hat{B}(m) = 1$$

$$\hat{A}(1) = 0, \hat{B}(1) = \nu$$

Igaz továbbá az

$$\ddot{a}^{(m)}_x - a^{(m)}_x = \frac{1}{m}$$

összefüggés.

7.2.3. Folytonos járadék esete

(m tart végtelenbe)

$$B(m) = \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k}{m+ki} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\frac{k}{m}}{1+\frac{k}{m}i}\cdot\frac{1}{m} = \sum_{t\in T}\frac{t}{1+it}\Delta t$$

ahol

$$\frac{1}{m} = \Delta t$$

és

$$\frac{k}{m} = t$$

valamint

$$T = \{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\}$$

ezért

$$\lim_{m\to\infty} B(m) = \int_0^1 \frac{t}{1+it}dt = \frac{t}{i} - \frac{ln(1+it)}{i^2}|_0^1 = \frac{i - ln(1+i)}{i^2}$$

és

$$A(m) + rB(m) = 1$$

miatt

$$\lim_{m\to\infty} A(m) = 1 - r\lim_{m\to\infty} B(m) = 1 - (1+i)\frac{i - ln(1+i)}{i^2} = \frac{(1+i)ln(1+i) - i}{i^2}$$

$$\ddot{a}_x^{(\infty)} = \ddot{a}_x - r\lim_{m\to\infty} B(m) = \ddot{a}_x - r\frac{i - ln(1+i)}{i^2}$$

7.2.4. Összefoglalás

Évközi járadékfizetés

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - rB(m) = \frac{N_x}{D_x} - (1+i)\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k}{m+ki}$$

Időszakos

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{x:n|}} - rB(m)\cdot(1 - A_{\overset{1}{\overline{x:n|}}}) = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - rB(m)\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

Halasztott

$$_{f|}\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(m)} = _{f|}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} - rB(m)\cdot(A_{\overset{1}{\overline{x:f|}}} - A_{\overset{1}{\overline{x:n+f|}}}) = \frac{N_{x+f} - N_{x+f+n}}{D_x} - rB(m)\frac{D_{x+f} - D_{x+f+n}}{D_x}$$

Folytonos

$$\ddot{a}_x^{(\infty)} = \ddot{a}_x - r\frac{i - ln(1+i)}{i^2}$$

7.1. Feladat.

Egy 65 éves férfi az önkéntes nyugdíjpénztári számláján felgyülemlett 15 millió forintját életjáradékra váltja.
a) Mekkora összegű (nettó) életjáradék jár neki év elején?
b) Mekkora összegű (nettó) járadék jár neki, ha nem évente egyszer, hanem havonta kapja a járadékot?

7.2. Feladat.

Egy 65 éves férfi az önkéntes nyugdíjpénztári számláján felgyülemlett 15 millió forintját 15 évre szóló évjáradékra váltja.
a) Mekkora összegű (nettó) életjáradék jár neki év elején?
b) Mekkora összegű (nettó) járadék jár neki, ha nem évente egyszer, hanem havonta kapja a járadékot?

7.3. Feladat.

Egy 15 millió forintos bankkölcsönt 15 éven keresztül kell törleszteni évi 3%-os kamattal. Mennyi a havi törlesztőrészlet?

8. Évközi kifizetés

8.1. Haláleseti biztosítás

Minden évet m egyenlő részre osztunk. Tegyük fel, hogy a haláleset a $j+1$-edik év k-adik részintervallumában következik be, és ennek a részintervallumnak a végén megtörténik az 1 pénzegység kifizetése. Ekkor a biztosító kiadásának készpénzértéke:

$$\frac{d_{x+j}}{m} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{m}i} \cdot \nu^j = d_{x+j} \cdot \nu^{j+1} \cdot r \cdot \frac{1}{m+ki}$$

azaz

$$A_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{\infty} d_{x+j} \nu^{j+1} \cdot r \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+ki}$$

Az

$$A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{\infty} d_{x+j} \nu^{j+1}$$

és

$$\hat{C}(m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+ki}$$

jelöléssel

$$A_x^{(m)} = r\hat{C}(m) A_x$$

Speciálisan, ha $m=1$, akkor

$$A_x^{(1)} = A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

8.1.1. Folytonos haláleseti biztosítás

A biztosító a biztosítási összeget a haláleset bekövetkezésekor azonnal kifizeti. A készpénzérték meghatározásához csak $\hat{C}(m)$ határértéke kell.

$$\lim_{m\to\infty} \hat{C}(m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{k}{m}i} \cdot \frac{1}{m} = \int_0^1 \frac{1}{1+it} dt = \frac{1}{i} ln(1+i) \approx \frac{1}{i}\left(i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \cdots\right)$$

ezért

$$r \cdot \frac{1}{i} ln(1+i) \approx 1 + \frac{i}{2}$$

és

$$\overline{A}_x \approx \left(1 + \frac{i}{2}\right) A_x$$

tehát

$$A_x^{(m)} = r\hat{C}(m) A_x$$

$$A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}^{(m)} = r\hat{C}(m) A_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}$$

$$ {}_fA_x^{(m)} = r\hat{C}(m)_f A_x $$
$$ {}_fA_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}^{(m)} = r\hat{C}(m)_f A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} $$

Folytonos esetben:

$$ \lim_{m\to\infty} r\hat{C}(m) = \frac{r}{i} ln(r) \approx 1 + \frac{i}{2} $$

Időszakos haláleseti biztosítás esetén nyilván

$$ A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \frac{r}{i} ln(r) A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \frac{r}{i} ln(r) \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{1} $$

Megjegyzés: 3%-os technikai kamat esetén

$$ \frac{r}{i} ln(r) = 1.01485 $$

Hasonlóan adódik, hogy

$$ {}_{f|}\overline{A}_x = \frac{r}{i} ln(1+i)_{f|} A_x $$
$$ {}_{f|}\overline{A}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \frac{r}{i} ln(1+i)_{f|} A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} $$

8.1. Példa.

Egy 40 éves férfi 5 évre szóló azonnal kezdődő haláleseti biztosítást kíván vásárolni, amelyet rögtön kifizet készpénzben. A biztosítási összeg 5 millió forint. Mennyi a biztosítás nettó készpénzértéke?

Megoldás Az (1) formula alapján egy pénzegység készpénzértéke:

$$ A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} \approx 1,015 \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 1,015 \cdot \frac{12984 - 11959}{28737} = 0,0362033 $$

Ezért $K_{x:\overline{n}|} = 5000000 \cdot 0,0362033 = 181017 Ft$

8.2. Évközi díjfizetés

Ha a díjat k éven keresztül évi m egyenlő részletben fizetik, akkor évente $m \cdot P^{(m)}_{x:\overline{k}|}$ pénzmennyiség kerül befizetésre, tehát

$$ P^{(m)}_{x:\overline{k}|} = \frac{K_{x:\overline{n}|}}{m \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k}|}} $$

(Itt $P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ tehát nem az éves díj, hanem az évközi részlet.)
Bruttó díj az éves díjfizetéshez hasonlóan:

$$ P^{b(m)}_{x:\overline{k}|} \cdot m \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k}|} = K_{x:\overline{n}|} + a + b \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k}|} + c \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} $$

amiből

$$ P^{b(m)}_{x:\overline{k}|} = \frac{K_{x:\overline{n}|} + a + c \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}{m \cdot (1-\beta) \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k}|}} $$

8.2. Példa.

Egy 40 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor a biztosító fizessen neki 2 millió forintot. A biztosított azt vállalja, hogy a díjat havonta egyenlő részletekben fizeti 20 éven keresztül. Ha a biztosított előbb meghal, akkor a szerződés kötelezettség nélkül megszűnik. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg fél százaléka. Mekkora a fizetendő havi díj?
Megoldás: A biztosítás nettó készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n}|} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = 596238Ft$$

Az alfa költség: 100000Ft. A gamma költség: 10000Ft. A járadéktagok:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:k}|} = 13,9705858 \quad \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:n}|} = 15,7867179$$

Ezért

$$P^{b(m)}_{\overline{x:k}|} = \frac{596238 + 100000 + 10000 \cdot 15,7867179}{12 \cdot 0,9 \cdot 13,9705858} = 5752Ft$$

8.3. Példa.

Egy 40 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha meghal 65 éves kora előtt, akkor a biztosító fizessen örökösének 2 millió forintot. A biztosított azt vállalja, hogy a díjat havonta egyenlő részletekben fizeti 20 éven keresztül. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg fél százaléka. Mekkora a fizetendő havi díj? **Megoldás:** A biztosítás nettó készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n}|} \approx S \cdot 1,015 \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 2000000 \cdot 1,015 \cdot \frac{12984 - 6028}{28734} = 491410Ft$$

Az alfa költség: 100000Ft. A gamma költség: 10000Ft. A járadéktagok:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:k}|} = 13,9705858 \quad \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:n}|} = 15,7867179$$

Ezért

$$P^{b(m)}_{\overline{x:k}|} = \frac{491410 + 100000 + 10000 \cdot 15,7867179}{12 \cdot 0,9 \cdot 13,9705858} = 5043Ft$$

8.4. Példa.

Egy 40 éves férfi arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor a biztosító fizessen neki 2millió forintot. Ha pedig előbb meghal, akkor örököse kapja meg a 2 millió forint biztosítási összeget. A biztosított azt vállalja, hogy a díjat havonta egyenlő részletekben fizeti 20 éven keresztül. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg fél százaléka. Mekkora a fizetendő havi díj?
Megoldás: Az elérési rész nettó készpénzértéke:596238Ft
A haláleseti rész nettó készpénzértéke:491410Ft
Ezért

$$P^{b(m)}_{\overline{x:k|}} = \frac{596238 + 491410 + 100000 + 10000 \cdot 15,7867179}{12 \cdot 0,9 \cdot 13,9705858} = 9074Ft$$

8.3. Elérési biztosítás díjvisszatérítéssel

8.5. Példa.

Egy 40 éves nő 10 évre köt 100000EUR biztosítási összegű díjvisszatérítéses életbiztosítást.
Mennyi a biztosítás nettó készpénzértéke?
Mennyi az éves nettó díj?
Mennyi legyen az éves bruttó díj, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$?
Mennyi a havi bruttó díj?
Megoldás
Az első három kérdésre már válaszoltunk. Lásd (6.9) példa. A havi bruttó díj pedig

$$P^b = \frac{K_{\overline{x:n|}} + a + c \cdot \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:k|}}} =$$

$$= \frac{73426 + 5000 + 500 \cdot 8,539416}{12 \cdot 0,9 \cdot 8,539416} = 897EUR,$$

mert $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{40:10|}} = 8,539416$.

8.4. Term fix biztosítás

8.6. Példa.

Egy 40 éves nő 20 évre szóló fix lejáratú (term fix) biztosítást kíván kötni 100ezer EUR értékre. Ennek fejében vállalja, hogy 10 éven keresztül havi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját.
a) Mennyi a biztosítás készpénzértéke?
b) Mennyi legyen az éves nettó díj?
c) Mennyi az éves bruttó díj, ha $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$, és a technikai kamat 3%?
d) Mennyi legyen a bruttó havi díj?

Megoldás
Láttuk, a (6.7) példa megoldásában, hogy a biztosítás nettó készpénzértéke:

$$K_{\overline{x:n|}} = 100000 \cdot 1.03^{-20} = 55367$$

Éves nettó díja:

$$P_{\overline{x:k|}} = \frac{55367}{8,6703} = 6386EUR$$

Éves bruttó díja:

$$P^b_{\overline{x:k|}} = \frac{K_{\overline{x:n|}} + a + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{\overline{x:k|}}} = \frac{55367 + 5000 + 500 \cdot 14,7991}{0,9 \cdot 8,6703} = 8684EUR$$

Mivel $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{40:10|}} = 8,539416$ és $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{40:20|}} = 14,565014$, ezért

$$P^b = \frac{55367 + 5000 + 500 \cdot 14,565014}{12 \cdot 0,9 \cdot 8,6539416} = 724EUR.$$

Feladatok

8.1. Feladat.

Egy 50 éves nő arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor a biztosító fizessen neki 3 millió forintot. A biztosított azt vállalja, hogy a díjat havonta egyenlő részletekben fizeti 10 éven keresztül. Ha a biztosított előbb meghal, akkor a szerződés kötelezettség nélkül megszűnik. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg 1%-a. Mekkora a fizetendő havi díj?

8.2. Feladat.

Egy 50 éves nő arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha meghal 65 éves kora előtt, akkor a biztosító fizessen örökösének 3 millió forintot. A biztosított azt vállalja, hogy a díjat havonta egyenlő részletekben fizeti 10 éven keresztül. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg 1%-a. Mekkora a fizetendő havi díj?

8.3. Feladat.

Egy 50 éves nő arra az esetre kíván biztosítást kötni, hogy ha eléri a 65 éves kort, akkor a biztosító fizessen neki 3 millió forintot. Ha pedig előbb meghal, akkor örököse kapja meg a 3 millió forint biztosítási összeget. A biztosított azt vállalja, hogy a díjat havonta egyenlő részletekben fizeti 10 éven keresztül. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg 1%-a. Mekkora a fizetendő havi díj?

8.4. Feladat.

Egy 50 éves nő 15 évre szóló fix lejáratú (term fix) biztosítást kíván kötni 3 millió Ft értékre. Ennek fejében vállalja, hogy 10 éven keresztül havi egyenlő részletekben fizeti a biztosítás díját. Mekkora a fizetendő havi díj?

8.5. Feladat.

Egy 50 éves nő 15 évre köt 3 millió Ft biztosítási összegű díjvisszatérítéses életbiztosítást. Legyen a technikai kamat 3%, az alfa költség a biztosítási összeg 5%-a, a béta költség a bruttó díj 10%-a és a gamma költség a biztosítási összeg 1%-a. Mekkora a fizetendő havi díj?

8.6. Feladat.

Egy 50 éves nő 10 millió Forintját azonnal kezdődő életjáradékra váltja. Legyen a technikai kamat 3%. Nincs szerzési költség, de a járadékfolyósító cég minden hónapban a járadék 10%-t számolja fel költségként. Mekkora összeget kap havonta a járadékos?

8.7. Feladat.

Egy 50 éves nő 10 millió Forintját azonnal kezdődő 15 évig tartó járadékra váltja. Legyen a technikai kamat 3%. Nincs szerzési költség, de a járadékfolyósító cég minden hónapban a járadék 10%-t számolja fel költségként. Mekkora összeget kap havonta a járadékos?

8.5. Két életre szóló biztosítás

Feltesszük, hogy a két személy halálozási valószínűsége független. Jelölés: ${}_tp(k|2)$ annak a valószínűsége, hogy a 2 személy közül t év múlva még legalább k életben van. Ekkor

$$ {}_tp(0|2) = 1 $$

$$ {}_tp(1|2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 $$
$$ {}_tp(2|2) = p_1 \cdot p_2 $$
$$ p_t = \frac{l_{x_i+t}}{l_{x_i}} $$

Díjszámítás:
A (t, t+1) intervallumban esedékes szolgáltatások várható értéke az év elejére diszkontálva:

$$ Q(t) = e_t \cdot_t p(k|2) + h_{t+1} \cdot [{}_tp(k|2) -_{t+1} p(k|2)] \cdot \nu $$

Ezért a biztosítás készpénzértéke:

$$ K(k|2) : n = \sum_{t=0}^{n} Q(t)\nu^t $$

Tehát elérési biztosítás esetén:

$$e_0 = e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 0$$

$$e_n = 1$$

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$$

Így:

$$K(k|2) : n =_n p(k|2) \cdot \nu^n$$

Haláleseti biztosítás esetén:

$$e_0 = e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0$$

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 1$$

Így:

$$K(k|2) : n = \sum_{t=0}^{n-1} \left[{}_t p(k|2) -_{t+1} p(k|2)\right] \nu^{t+1}$$

Vegyes biztosítás esetén az előző kettő összege.
Előleges járadék esete:

$$e_0 = e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 1$$

$$e_n = 0$$

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$$

Így:

$$\ddot{a}(k|2) : n = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p(k|2) \cdot \nu^t$$

9. Díjtartalék

A tartalék a biztosításoknál a jövőbeli szolgáltatások fedezetére félretett pénzösszeg. Jelölések: (x éves egyén n évre köt biztosítást)

$$I_r = [0, t)$$

$$I_p = [t, n]$$

$K_r(t)$: a kiadások várható értéke I_r-ben
$B_r(t)$: a bevételek várható értéke I_r-ben
$K_p(t)$: a kiadások várható értéke I_p-ben
$B_p(t)$: a bevételek várható értéke I_p-ben

$$B_r(t) + B_p(t) = K_r(t) + K_p(t)$$

$$B_r(t) - K_r(t) = K_p(t) - B_p(t) = V_{x,t}$$

A

$$B_r(t) - K_r(t) = V_{x,t}$$

tartalékszámítási módszert *retrospektív* módszernek, a

$$K_p(t) - B_p(t) = V_{x,t}$$

számítási módszert *prospektív* módszernek nevezzük.

9.1. Nettó díjtartalék évenkénti díjfizetéssel

Az általános eset jelöléseivel a $(j, j+1)$ intervallumban esedékes szolgáltatások várható értéke egy t időpontra:

$$s_j(t) = \frac{1}{l_{x+t}} \left(e_j l_{x+j} \nu^{j-t} + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j-t+1} \right) + b_j \nu^{j-t}$$

a díj várható értéke pedig

$$d_j(t) = \frac{1}{l_{x+t}} P_j l_{x+j} \nu^{j-t}$$

$$K_p(t) = \sum_{j=t}^{n} s_j(t)$$

és

$$B_p(t) = \sum_{j=t}^{n} d_j(t)$$

Tehát a prospektív módon meghatározott díjtartalék:

$$V_{x,t} = K_p(t) - B_p(t) = \sum_{j=t}^{n} [s_j(t) - d_j(t)]$$

részletesen:

$$V_{x,t} = \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} \left[(e_j - P_j)\, l_{x+j} \nu^{j-t} + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j-t+1} \right] + \sum_{j=t}^{n} b_j \nu^{j-t}$$

Kezdetben természetesen

$$V_{x,0} = 0$$

és a biztosítás tartamának végére

$$V_{x,n} = e_n + b_b.$$

Speciális esetek:
Elérési biztosítás
a) $0 < t < k$ (díjfizetés tartama alatt)

$$V_{x,t} = \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} \left[(e_j - P_j)\, l_{x+j} \nu^{j-t} \right] = S\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - S\frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{D_{x+t}}\frac{D_x}{N_x - N_{x+k}} =$$

$$= S\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}\right)$$

b) $k \leq t < n$ (díjfizetés utáni időszak)

$$V_{x,t} = S\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

c) $t = n$

$$V_{x,t} = S$$

9.1. Példa.

Egy 45 éves nő arra köt biztosítást, hogy ha megéri, akkor 60 éves korában fizessen neki a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat.
Mekkora a nettó díj?
Mekkora a nettó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?
Megoldás $P = 675 EUR$
$V_{x,0} = 0 \qquad V_{x,5} = 3744 \qquad V_{x,10} = 8247 \qquad V_{x,15} = 10000$

9.1. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra köt biztosítást, hogy ha megéri, akkor 65 éves korában fizessen neki a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat.
Mekkora a nettó díj?
Mekkora a nettó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?

Haláleseti biztosítás a) $0 < t < k$ (díjfizetés tartama alatt)

$$V_{x,t} = \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} \left[(-P_j)\, l_{x+j} \nu^{j-t} + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j-t+1} \right] =$$

$$= S \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - S \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{D_{x+t}} \frac{D_x}{N_x - N_{x+k}} =$$

$$= S \left(\frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+t}} \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}} \right)$$

b) $k \leq t < n$ (díjfizetés utáni időszak)

$$V_{x,t} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}}$$

c) $t = n$

$$V_{x,t} = 0$$

9.2. Példa.

Egy 45 éves nő arra köt biztosítást, hogy ha meghal 60 éves kora előtt fizessen örökösének a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat.
Mekkora a nettó díj?
Mekkora a nettó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?
Megoldás $P = 83,4 EUR$
$V_{x,0} = 0$ $\quad V_{x,5} = ...$ $\quad V_{x,10} = ...$ $\quad V_{x,15} = 0$

9.2. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra köt biztosítást, hogy ha meghal 65 éves kora előtt fizessen örökösének a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat.
Mekkora a nettó díj?
Mekkora a nettó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?

9.2. Bruttó díjtartalék évenkénti díjfizetéssel

$$K_p^b(t) = K_p^t + \beta \cdot \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} P_j^b l_{x+j} \nu^{j-t} + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}$$

és

$$B_p^b(t) = \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} P_j^b l_{x+j} \nu^{j-t}$$

$$V^b_{x,t} = K^t_p - (1-\beta)\frac{1}{l_{x+t}}\sum_{j=t}^{n} P^b_j l_{x+j}\nu^{j-t} + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}$$

Összevetve a nettó díjtartalék formulával adódik, hogy

$$V^b_{x,t} = V_{x,t} + \frac{1}{l_{x+t}}\sum_{j=t}^{n}\Big[P_j - (1-\beta)P^b_j\Big]\cdot l_{x+j}\nu^{j-t} + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}$$

Nyílván

$$V^b_{x,0} = V_{x,0} = 0$$

és

$$V^b_{x,n} = V_{x,n}$$

Ha az éves díj állandó és

$$P_0 = P_1 = \cdots = P_{k-1} = P$$
$$P_k = \cdots = P_n = 0$$
$$P^b_0 = P^b_1 = \cdots = P^b_{k-1} = P^b$$
$$P^b_k = \cdots = P^b_n = 0$$

akkor a bruttó tartalék $0 < t < k$ esetén:

$$V^b_{x,t} = V_{x,t} + \Big[P - (1-\beta)P^b\Big]\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:k-t|}} + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}$$

és

$$P - (1-\beta)P^b = -\frac{a + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}$$

azaz

$$V^b_{x,t} = V_{x,t} - \frac{a + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:k-t|}} + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}} = V_{x,t} - a\cdot\frac{\ddot{a}_{\overline{x+t:k-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} + c\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}} - \ddot{a}_{\overline{x:n|}}\cdot\frac{\ddot{a}_{\overline{x+t:k-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}\right) \tag{2}$$

Az évenkénti díjfizetéshez tartozó bruttó tartalékot két részre bontjuk. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$Z^b_{x,t} = V_{x,t} - a\cdot\frac{\ddot{a}_{\overline{x+t:k-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} \tag{3}$$

$$U^b_{x,t} = c\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}} - \ddot{a}_{\overline{x:n|}}\cdot\frac{\ddot{a}_{\overline{x+t:k-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}}\right) \tag{4}$$

Tehát

$$V^b_{x,t} = Z^b_{x,t} + U^b_{x,t}$$

Definíció: A bruttó tartalék (3) kifejezésben definiált részét Zillmer tartaléknak, a (4) részét ügyviteli tartaléknak nevezzük.
Ha pedig $k \le t < n$ akkor

$$V^b_{x,t} = V_{x,t} + c\cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}$$

A díjfizetési időszakon túl a nettó tartalékon kívül már csak a folyamatos költségre kell tartalékolni.
Ha pedig $k = n$, akkor

$$V_{x,t}^{b} = V_{x,t} - a\frac{\ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}},$$

mert a tartam végéig tartó díjfizetés miatt nem kell külön ügyviteli tartalékot képezni.

9.3. Zillmer tartalék + ügyviteli tartalék

Egy biztosítási szerződés megkötésekor a tartalék még zérus. $V_{x,0}^{b} = 0$. A tartalék feltöltése a díjbefizetésekből történik. Azonban tipikus esetben a biztosítónak kezdetben felmerülő költségei (elsősorban az α költség miatt) lehetnek nagyobbak, mint az első díjbefizetés. Így ezeket a költségeket meg kell előlegezni. Ez a biztosított korai halála (vagy a szerződés más okból történő megszűnése) esetén veszteséget okozhat a biztosítónak. A kockázat csökkentésére az óvatos biztosítók csak akkora α költséget vállalnak, hogy a biztosítás első évfordulóján a Zillmer tartalék már pozitív legyen. Ezt hívják zillmerezésnek.

August Zillmer (1831-1893) német aktuárius. Az általa írt biztosítás-matematika könyv "Die mathematischen Rechnungen bei Lebens und Rentenversicherungen" Berlin in 1861., (Életbiztosítás és járadék matematikai elmélete) hosszú ideig a legjelentősebb munka ebben a témakörben.

9.3. Példa.

Oldjuk meg most a (9.1) példát azzal a kiegészítéssel, hogy $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$, és a technikai kamat 3%?
Mekkora a bruttó díj?
Mekkora a Zillmer tartalék az első év végén?
Mekkora a bruttó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?
Megoldás
$P^(b) = 891 EUR \qquad Zillmertartalk = ...$
$V_{x,0}^{b} = 0 \qquad V_{x,5}^{b} = 3578,5 \qquad V_{x,10}^{b} = 8479 \qquad V_{x,15}^{b} = 10000$

9.3. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra köt biztosítást, hogy ha megéri, akkor 65 éves korában fizessen neki a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat. Legyen $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$, és a technikai kamat 3%?
Mekkora a bruttó díj?
Mekkora a Zillmer tartalék az első év végén?
Mekkora a bruttó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?

9.4. Példa.

Egy 45 éves nő arra köt biztosítást, hogy ha meghal 60 éves kora előtt fizessen örökösének a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat. Legyen $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$, és a technikai kamat 3%?
Mekkora a bruttó díj?
Mekkora a Zillmer tartalék az első év végén?
Mekkora a bruttó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?

Megoldás $P = 234EUR \qquad Zillme = ...$
$V_{x,0} = 0 \qquad V_{x,5} = ... \qquad V_{x,10} = ... \qquad V_{x,15} = 0$

9.4. Feladat.

Egy 50 éves férfi arra köt biztosítást, hogy ha meghal 65 éves kora előtt fizessen örökösének a biztosító 10000 EUR-t. Ennek fejében vállalja, hogy azonnal kezdve 10 egyenlő részletben, mindig a biztosítás évfordulóján fizeti a díjat. Legyen $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $\gamma = 0,5\%$, és a technikai kamat 3%?
Mekkora a bruttó díj?
Mekkora a Zillmer tartalék az első év végén?
Mekkora a bruttó díjtartalék induláskor, 5 év után, 10 év után és a futam végén?

9.4. Díjtartalék évközi fizetés mellett

$$V^b_{x,t} = V_{x,t} - a\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x+t:k-t|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:k|}}} + c \cdot \left(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x+t:n-t|}} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:n|}}\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x+t:k-t|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:k|}}}\right)$$

9.5. Példa.

Mekkora a ˙(9.3) példa bruttó tartaléka az 5. évben, ha a díjfizetés nem évente, hanem havonta történik?

9.5. Feladat.

Mekkora a ˙(9.3) feladat bruttó tartaléka az 5. évben, ha a díjfizetés nem évente, hanem havonta történik?

9.6. Példa.

Mekkora a ˙(9.4) példa bruttó tartaléka az 5. évben, ha a díjfizetés nem évente, hanem havonta történik?

9.6. Feladat.

Mekkora a ˙(9.4) feladat bruttó tartaléka az 5. évben, ha a díjfizetés nem évente, hanem havonta történik?

9.5. Díjtartalék meghatározása rekurziós módszerrel

9.5.1. Nettó díjtartalék

Láttuk, hogy a nettó díjtartalék

$$V_{x,t} = \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} \left[(e_j - P_j)\, l_{x+j} \nu^{j-t} + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j-t+1} \right] + \sum_{j=t}^{n} b_j \nu^{j-t}$$

Most foglalkozzunk csak azzal az esettel, amikor $b_j = 0$ azaz

$$V_{x,t} = \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} \left[(e_j - P_j)\, l_{x+j} \nu^{j-t} + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j-t+1} \right]$$

Innen

$$V_{x,t+1} = \frac{1}{l_{x+t+1}} \sum_{j=t+1}^{n} \left[(e_j - P_j)\, l_{x+j} \nu^{j-t} + h_{j+1} d_{x+j} \nu^{j-t+1} \right]$$

Átszorozva l_{x+t}-vel illetve l_{x+t+1}-gyel és kivonva egymásból a két egyenletet adódik, hogy

$$l_{x+t} V_{x,t} - l_{x+t+1} V_{x,t+1} = (e_t - P_t) \cdot l_{x+t} + h_{t+1} d_{x+t} \nu$$

Ebből

$$-l_{x+t+1} V_{x,t+1} = (e_t - P_t - V_{x,t}) \cdot l_{x+t} + h_{t+1} d_{x+t} \nu$$

$$V_{x,t+1} = \frac{(V_{x,t} + P_t - e_t) \cdot l_{x+t} - h_{t+1} d_{x+t} \nu}{l_{x+t+1}}$$

Bővítve ν^{x+t}-vel:

$$V_{x,t+1} = \frac{(V_{x,t} + P_t - e_t) \cdot D_{x+t} - h_{t+1} C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

A rekurzió a $V_{x,0} = 0$-tól indul.

9.7. Példa.

Határozzuk meg a (9.1) példa tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.7. Feladat.

Határozzuk meg a (9.1) feladat tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.8. Példa.

Határozzuk meg a (9.2) példa tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.8. Feladat.

Határozzuk meg a (9.2) feladat tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.5.2. Bruttó díjtartalék

Kiindulva a

$$V_{x,t}^b = V_{x,t} + \frac{1}{l_{x+t}} \sum_{j=t}^{n} \left[P_j - (1-\beta)P_j^b\right] \cdot l_{x+j} \cdot \nu^{j-t} + c \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}$$

formulából az előzőhöz hasonló módon adódik, hogy

$$V_{x,t+1}^b = \frac{\left(V_{x,t}^b + (1-\beta)P_t^b - e_t - c\right) \cdot D_{x+t} - h_{t+1} \cdot C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

9.9. Példa.

Határozzuk meg a (9.3) példa tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.9. Feladat.

Határozzuk meg a (9.3) feladat tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.10. Példa.

Határozzuk meg a (9.4) példa tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

9.10. Feladat.

Határozzuk meg a (9.4) feladat tartalékát a $t = 0$, $t = 1$, és $t = 2$ évfordulókon rekurziós módszerrel!

Hivatkozások

[1] Banyár József, *Életbiztosítás* Aula kiadó, 2003.

[2] Krekó Béla, *Biztosítási matematika, Életbiztosítás I.* Aula kiadó, 1994.

[3] Hans U. Gerber, *Life Insurance Mathematics* Springer, 1997.

10. Táblázatok

10.1. Halandósági táblázat és Kommutációs számok

3%	ffi	1998					
év	lx	D	N	S	C	M	R
0	100000	100000,00	2876019,52	67966630,20	1050,485437	16232,44	896408,93
1	98918	96036,89	2776019,52	65090610,68	94,25959091	15181,96	880176,49
2	98818	93145,44	2679982,63	62314591,16	44,84194131	15087,70	864994,53
3	98769	90387,63	2586837,18	59634608,54	38,20494306	15042,85	849906,84
4	98726	87716,77	2496449,56	57047771,35	24,15304596	15004,65	834863,98
5	98698	85137,76	2408732,78	54551321,80	18,42465365	14980,50	819859,33
6	98676	82639,60	2323595,02	52142589,01	16,26183023	14962,07	804878,84
7	98656	80216,36	2240955,43	49818993,99	16,57759392	14945,81	789916,77
8	98635	77863,38	2160739,07	47578038,56	16,09475138	14929,23	774970,96
9	98614	75579,42	2082875,69	45417299,49	17,11416004	14913,14	760041,72
10	98591	73360,96	2007296,27	43334423,80	18,78295319	14896,02	745128,59
11	98565	71205,45	1933935,31	41327127,53	18,93725677	14877,24	730232,56
12	98538	69112,57	1862729,85	39393192,22	19,74758886	14858,30	715355,32
13	98509	67079,84	1793617,28	37530462,37	19,17241637	14838,56	700497,02
14	98480	65106,88	1726537,45	35736845,08	17,33027258	14819,38	685658,47
15	98453	63193,23	1661430,57	34010307,63	26,79617839	14802,05	670839,08
16	98410	61325,86	1598237,33	32348877,07	30,85583874	14775,26	656037,03
17	98359	59508,81	1536911,47	30750639,73	35,24367646	14744,40	641261,77
18	98299	57740,30	1477402,66	29213728,26	39,92002188	14709,16	626517,37
19	98229	56018,63	1419662,36	27736325,60	43,74038458	14669,24	611808,22
20	98150	54343,28	1363643,73	26316663,24	47,30433628	14625,50	597138,98
21	98062	52713,16	1309300,46	24953019,51	48,01411008	14578,19	582513,48
22	97970	51129,81	1256587,30	23643719,05	47,62902435	14530,18	567935,29
23	97876	49592,96	1205457,49	22387131,75	47,71757242	14482,55	553405,11
24	97779	48100,79	1155864,53	21181674,26	47,76055693	14434,83	538922,56
25	97679	46652,03	1107763,74	20025809,73	50,07903056	14387,07	524487,73
26	97571	45243,16	1061111,71	18918045,98	52,67211952	14336,99	510100,66
27	97454	43872,72	1015868,55	17856934,28	55,94582441	14284,32	495763,67
28	97326	42538,93	971995,82	16841065,73	60,68152981	14228,37	481479,35
29	97183	41239,25	929456,89	15869069,90	65,50589476	14167,69	467250,97
30	97024	39972,60	888217,64	14939613,01	71,59769898	14102,19	453083,28
31	96845	38736,76	848245,04	14051395,37	76,89073276	14030,59	438981,09
32	96647	37531,61	809508,28	13203150,33	82,56874803	13953,70	424950,51
33	96428	36355,89	771976,67	12393642,05	88,94891064	13871,13	410996,81
34	96185	35208,03	735620,79	11621665,38	97,375051	13782,18	397125,68
35	95911	34085,18	700412,76	10886044,59	108,3401815	13684,81	383343,50
36	95597	32984,06	666327,58	10185631,83	122,9387379	13576,47	369658,69

3%	ffi	folytatás	1998				
év	lx	D	N	S	C	M	R
37	95230	31900,43	633343,52	9519304,25	139,5220194	13453,53	356082,23
38	94801	30831,76	601443,09	8885960,74	156,6137588	13314,00	342628,70
39	94305	29777,14	570611,33	8284517,65	173,204615	13157,39	329314,70
40	93740	28736,64	540834,19	7713906,32	186,6127565	12984,19	316157,30
41	93113	27713,04	512097,55	7173072,14	197,35915	12797,57	303173,12
42	92430	26708,50	484384,51	6660974,59	205,918515	12600,21	290375,54
43	91696	25724,67	457676,01	6176590,07	213,5394775	12394,30	277775,33
44	90912	24761,86	431951,35	5718914,06	221,3351281	12180,76	265381,03
45	90075	23819,31	407189,48	5286962,71	231,0628751	11959,42	253200,28
46	89175	22894,48	383370,17	4879773,23	241,5317433	11728,36	241240,86
47	88206	21986,12	360475,69	4496403,06	252,888747	11486,83	229512,50
48	87161	21092,86	338489,58	4135927,36	264,0841284	11233,94	218025,67
49	86037	20214,42	317396,72	3797437,79	273,9566028	10969,85	206791,73
50	84836	19351,69	297182,30	3480041,07	281,7011704	10695,90	195821,88
51	83564	18506,35	277830,61	3182858,77	287,0420883	10414,20	185125,98
52	82229	17680,29	259324,26	2905028,16	290,1629052	10127,15	174711,79
53	80839	16875,16	241643,97	2645703,90	293,0610889	9836,99	164584,63
54	79393	16090,59	224768,81	2404059,93	296,1345921	9543,93	154747,64
55	77888	15325,80	208678,21	2179291,12	301,0728749	9247,80	145203,71
56	76312	14578,35	193352,41	1970612,91	306,7705726	8946,72	135955,92
57	74658	13846,96	178774,06	1777260,50	312,7813037	8639,95	127009,20
58	72921	13130,87	164927,10	1598486,44	318,7061258	8327,17	118369,24
59	71098	12429,71	151796,23	1433559,33	323,8507358	8008,46	110042,07
60	69190	11743,83	139366,52	1281763,11	328,0957109	7684,61	102033,61
61	67199	11073,68	127622,68	1142396,59	330,6987436	7356,52	94349,00
62	65132	10420,45	116549,00	1014773,91	332,2504885	7025,82	86992,48
63	62993	9784,69	106128,55	898224,91	332,8280741	6693,57	79966,66
64	60786	9166,87	96343,86	792096,36	332,9437406	6360,74	73273,09
65	58512	8566,93	87176,99	695752,50	332,4860215	6027,80	66912,35
66	56173	7984,92	78610,05	608575,52	331,6345089	5695,31	60884,55
67	53770	7420,72	70625,13	529965,46	329,6126168	5363,68	55189,24
68	51310	6874,97	63204,41	459340,34	326,5165634	5034,06	49825,57
69	48800	6348,21	56329,44	396135,93	322,0582666	4707,55	44791,50
70	46250	5841,25	49981,23	339806,48	316,724349	4385,49	40083,95
71	43667	5354,39	44139,98	289825,25	309,4041259	4068,76	35698,47
72	41068	4889,04	38785,58	245685,28	300,6235152	3759,36	31629,70
73	38467	4446,01	33896,55	206899,69	290,7453548	3458,74	27870,34
74	35876	4025,77	29450,53	173003,15	280,6428653	3167,99	24411,60
75	33300	3627,88	25424,76	143552,62	270,4591323	2887,35	21243,61

3%	ffi	folytatás	1998				
év	lx	D	N	S	C	M	R
76	30743	3251,75	21796,88	118127,86	260,9386209	2616,89	18356,26
77	28202	2896,10	18545,13	96330,98	247,6555497	2355,95	15739,37
78	25718	2564,09	15649,03	77785,85	234,7312931	2108,30	13383,42
79	23293	2254,68	13084,94	62136,82	221,785948	1873,56	11275,13
80	20933	1967,22	10830,26	49051,88	208,8481303	1651,78	9401,56
81	18644	1701,08	8863,04	38221,62	195,6785809	1442,93	7749,79
82	16435	1455,85	7161,96	29358,59	182,066988	1247,25	6306,86
83	14318	1231,38	5706,11	22196,63	168,0803329	1065,18	5059,60
84	12305	1027,44	4474,73	16490,52	153,456933	897,10	3994,42
85	10412	844,05	3447,29	12015,79	138,3622278	743,65	3097,32
86	8654	681,11	2603,24	8568,50	122,8704631	605,28	2353,67
87	7046	538,40	1922,13	5965,26	106,9767713	482,41	1748,38
88	5604	415,74	1383,73	4043,14	91,25645967	375,44	1265,97
89	4337	312,38	967,99	2659,41	75,66186417	284,18	890,53
90	3255	227,61	655,61	1691,42	60,9661666	208,52	606,35
91	2357	160,02	428,00	1035,80	47,39191059	147,55	397,83
92	1638	107,97	267,98	607,80	35,32459409	100,16	250,28
93	1086	69,50	160,01	339,82	25,10049249	64,84	150,12
94	682	42,37	90,52	179,81	16,82936991	39,74	85,28
95	403	24,31	48,14	89,29	10,59997896	22,91	45,54
96	222	13,00	23,83	41,15	6,254345789	12,31	22,64
97	112	6,37	10,83	17,31	3,312098388	6,05	10,33
98	52	2,87	4,47	6,48	1,607814751	2,74	4,28
99	22	1,18	1,60	2,01	0,728459758	1,13	1,54
100	8	0,42	0,42	0,42	0,404138562	0,40	0,40
101	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00

3%	női	1998					
év	lx	D	N	S	C	M	R
0	100000	100000	3009766,158	76201723,45	820,3883495	12336,91	790298,49
1	99155	96266,99029	2909766,158	73191957,29	67,86690546	11516,52	777961,58
2	99083	93395,23046	2813499,168	70282191,13	33,8602414	11448,65	766445,06
3	99046	90641,12079	2720103,938	67468691,97	17,76974096	11414,79	754996,40
4	99026	87983,31841	2629462,817	64748588,03	22,42782839	11397,02	743581,61
5	99000	85398,26965	2541479,499	62119125,21	20,09962216	11374,59	732184,59
6	98976	82890,84179	2456081,229	59577645,71	16,26183023	11354,50	720809,99
7	98956	80460,2836	2373190,387	57121564,48	11,84113851	11338,23	709455,50
8	98941	78104,93905	2292730,103	54748374,1	9,197000788	11326,39	698117,27
9	98929	75820,84091	2214625,164	52455643,99	8,185033064	11317,20	686790,87
10	98918	73604,28187	2138804,324	50241018,83	8,669055319	11309,01	675473,68
11	98906	71451,79878	2065200,042	48102214,5	9,819318323	11300,34	664164,67
12	98892	69360,85911	1993748,243	46037014,46	11,57617278	11290,52	652864,33
13	98875	67329,06374	1924387,384	44043266,22	12,56123831	11278,95	641573,80
14	98856	65355,46181	1857058,32	42118878,84	10,26979116	11266,38	630294,86
15	98840	63441,63488	1791702,858	40261820,52	14,95600654	11256,11	619028,47
16	98816	61578,86427	1728261,223	38470117,66	15,12541115	11241,16	607772,36
17	98791	59770,1797	1666682,359	36741856,43	15,85965441	11226,03	596531,20
18	98764	58013,44103	1606912,179	35075174,08	15,96800875	11210,17	585305,17
19	98736	56307,76114	1548898,738	33468261,9	16,61027263	11194,21	574094,99
20	98706	54651,11899	1492590,977	31919363,16	16,66402755	11177,60	562900,79
21	98675	53042,6748	1437939,858	30426772,18	16,17866753	11160,93	551723,19
22	98644	51481,56386	1384897,183	28988832,32	15,7074442	11144,75	540562,26
23	98613	49966,39339	1333415,62	27603935,14	15,24994583	11129,05	529417,51
24	98582	48495,8116	1283449,226	26270519,52	15,28337822	11113,80	518288,46
25	98550	47068,02885	1234953,415	24987070,29	16,22931546	11098,51	507174,67
26	98515	45680,88607	1187885,386	23752116,88	17,55737317	11082,28	496076,16
27	98476	44332,81746	1142204,5	22564231,49	19,66845389	11064,73	484993,87
28	98431	43021,90189	1097871,682	21422026,99	22,06601084	11045,06	473929,15
29	98379	41746,77078	1054849,78	20324155,31	24,71920557	11022,99	462884,09
30	98319	40506,12621	1013103,01	19269305,53	27,19912587	10998,27	451861,10
31	98251	39299,137	972596,8833	18256202,52	30,29028866	10971,07	440862,83
32	98173	38124,21165	933297,7463	17283605,64	33,17830971	10940,78	429891,76
33	98085	36980,61941	895173,5346	16350307,89	35,87240017	10907,60	418950,97
34	97987	35867,64159	858192,9152	15455134,36	39,09217376	10871,73	408043,37
35	97877	34783,86083	822325,2736	14596941,44	43,12905313	10832,64	397171,64
36	97752	33727,60961	787541,4128	13774616,17	47,90255998	10789,51	386339,00
37	97609	32697,34949	753813,8032	12987074,76	53,01186284	10741,61	375549,49
38	97446	31691,98764	721116,4537	12233260,95	58,09865246	10688,60	364807,88
39	97262	30710,82139	689424,4661	11512144,5	63,1507092	10630,50	354119,29
40	97056	29753,18074	658713,6447	10822720,03	68,75206817	10567,35	343488,79

3%	női	folytatás	1998				
év	lx	D	N	S	C	M	R
41	96825	28817,83117	628960,4639	10164006,39	74,26252058	10498,59	332921,44
42	96568	27904,21435	600142,6328	9535045,924	79,67419381	10424,33	322422,85
43	96284	27011,79605	572238,4184	8934903,291	84,97999613	10344,66	311998,52
44	95972	26140,06471	545226,6224	8362664,873	90,1735707	10259,68	301653,86
45	95631	25288,53003	519086,5577	7817438,251	94,47904228	10169,50	291394,18
46	95263	24457,49186	493798,0276	7298351,693	97,70943587	10075,03	281224,68
47	94871	23647,42829	469340,5358	6804553,665	99,70350599	9977,32	271149,65
48	94459	22858,96474	445693,1075	6335213,13	102,2033771	9877,61	261172,34
49	94024	22090,96627	422834,1427	5889520,022	104,7011496	9775,41	251294,72
50	93565	21342,83892	400743,1765	5466685,879	108,9598867	9670,71	241519,32
51	93073	20612,24295	379400,3376	5065942,703	114,1717969	9561,75	231848,61
52	92542	19897,71456	358788,0946	4686542,365	120,2401679	9447,58	222286,86
53	91966	19197,92931	338890,38	4327754,271	126,6688662	9327,34	212839,28
54	91341	18512,09745	319692,4507	3988863,891	132,6210731	9200,67	203511,95
55	90667	17840,28908	301180,3533	3669171,44	137,7370196	9068,05	194311,28
56	89946	17182,93199	283340,0642	3367991,087	141,1441389	8930,31	185243,24
57	89185	16541,3141	266157,1322	3084651,022	142,9754491	8789,16	176312,93
58	88391	15916,5528	249615,8181	2818493,89	145,2796437	8646,19	167523,76
59	87560	15307,68424	233699,2653	2568878,072	148,6861869	8500,91	158877,57
60	86684	14713,14317	218391,5811	2335178,807	154,4076751	8352,22	150376,66
61	85747	14130,19735	203678,4379	2116787,226	162,0695826	8197,82	142024,44
62	84734	13556,56862	189548,2405	1913108,788	170,5521442	8035,75	133826,63
63	83636	12991,16496	175991,6719	1723560,547	179,9111429	7865,19	125790,88
64	82443	12432,87037	163000,507	1547568,875	189,6051645	7685,28	117925,69
65	81148	11881,14277	150567,6366	1384568,368	199,2926046	7495,68	110240,40
66	79746	11335,79747	138686,4938	1234000,732	208,1168703	7296,39	102744,72
67	78238	10797,51174	127350,6964	1095314,238	215,5880896	7088,27	95448,34
68	76629	10267,43301	116553,1846	967963,5416	223,6183157	6872,68	88360,07
69	74910	9744,763251	106285,7516	851410,357	232,8923308	6649,06	81487,39
70	73066	9228,042865	96540,98835	745124,6054	244,134022	6416,17	74838,33
71	71075	8715,130895	87312,94549	648583,617	256,308997	6172,04	68422,16
72	68922	8204,983134	78597,81459	561270,6715	268,1455422	5915,73	62250,13
73	66602	7697,857501	70392,83146	482672,8569	279,6362116	5647,58	56334,40
74	64110	7194,011847	62694,97396	412280,0255	290,8837152	5367,94	50686,82
75	61440	6693,593807	55500,96211	349585,0515	301,450343	5077,06	45318,87
76	58590	6197,184421	48807,3683	294084,0894	325,3260728	4775,61	40241,81
77	55422	5691,357831	42610,18388	245276,7211	324,9232836	4450,28	35466,20
78	52163	5200,666843	36918,82605	202666,5372	324,4615647	4125,36	31015,92
79	48811	4724,729545	31718,15921	165747,7112	323,845075	3800,90	26890,56
80	45365	4263,270988	26993,42966	134029,552	322,5330452	3477,05	23089,66

3%	női	folytatás	1998				
év	lx	D	N	S	C	M	R
81	41830	3816,565002	22730,15867	107036,1223	320,0483081	3154,52	19612,60
82	38217	3385,354606	18913,59367	84305,96365	315,8866541	2834,47	16458,08
83	34544	2970,865391	15528,23907	65392,36998	309,5249847	2518,59	13623,61
84	30837	2574,810346	12557,37367	49864,13091	300,5096939	2209,06	11105,02
85	27130	2199,306176	9982,563328	37306,75724	288,2152891	1908,55	8895,96
86	23468	1847,033426	7783,257152	27324,19391	272,332295	1620,34	6987,41
87	19904	1520,90404	5936,223727	19540,93676	252,6788372	1348,00	5367,07
88	16498	1223,927027	4415,319686	13604,71303	229,2575463	1095,33	4019,07
89	13315	959,0211211	3191,392659	9189,393343	202,7206509	866,07	2923,74
90	10416	728,3678163	2232,371538	5998,000685	173,6653164	663,35	2057,67
91	7858	533,4879032	1504,003721	3765,629147	143,3621774	489,68	1394,33
92	5683	374,5872432	970,5158181	2261,625426	113,2690789	346,32	904,64
93	3913	250,4078563	595,9285748	1291,109608	84,99374686	233,05	558,32
94	2545	158,1206767	345,5207185	695,181033	60,13936128	148,06	325,27
95	1548	93,37585884	187,4000418	349,6603145	39,64743511	87,92	177,22
96	871	51,00873852	94,02418295	162,2602727	24,05080244	48,27	89,30
97	448	25,47224467	43,01544443	68,23608971	13,30359519	24,22	41,03
98	207	11,42673944	17,54319976	25,22064528	6,538446656	10,92	16,81
99	85	4,555475129	6,116460324	7,67744552	2,861806192	4,38	5,89
100	30	1,560985196	1,560985196	1,560985196	1,515519607	1,52	1,5
101	0	0	0	0	0	0,00	0,00