2. ea. Függvények.

Definíció: (függvény)

Legyenek $H \subseteq R$ és $K \subseteq R$ valós számhalmazok. Rendeljünk hozzá minden $x \in H$ számhoz **egyetlen** $y \in K$ számot. Az ilyen **egyértelmű** hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Feltételezzük, hogy a függvény fogalma a középiskolai tanulmányok alapján mindenki előtt ismert, valamint az alábbi függvénytani fogalmak is:
Értelmezési tartomány, érték készlet, kölcsönösen egyértelmű leképezés, inverz függvény, növő illetve csökkenő függvény, páros illetve páratlan függvény, periodikus függvény.

Definíció: (határérték I.)

Az *f(x)* függvénynek az $x_0 \in R$ helyen létezik a határértéke és az a $h \in R$ valós szám, ha **bármely** $\varepsilon > 0$ számhoz **található** $\delta > 0$ szám úgy, hogy a $0 < |x - x_0| < \delta$ egyenlőtlenséget kielégítő *x* értékek benne vannak az *f(x)* függvény értelmezési tartományában és **teljesül** az $|f(x) - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Definíció: (határérték II.)

Az *f(x)* függvénynek az $x_0 \in R$ helyen létezik a határértéke és az a $h \in R$ valós szám, ha bármely az *f(x)* függvény értelmezési tartományából választott és **x_0-hoz konvergáló** x_n sorozat esetén az $f(x_n)$ függvényérték sorozat **konvergál** *h*-hoz.

Jelölés: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = h$$

Meg lehet mutatni, hogy a két definíció ekvivalens.

Definíció: Jobb oldali határérték.

Az *f(x)* függvénynek az $x_0 \in R$ helyen létezik a **<u>jobb oldali határértéke</u>** és az a $h \in R$ valós szám, ha **<u>bármely</u>** $\varepsilon > 0$ számhoz **<u>található</u>** $\delta > 0$ szám úgy, hogy a $0 < x - x_0 < \delta$ egyenlőtlenséget kielégítő *x* értékek benne vannak az *f(x)* függvény értelmezési tartományában és **<u>teljesül</u>** az $|f(x) - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Definíció: Bal oldali határérték (hasonlóan).

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = h$ ill. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = h$

Tétel:

Az *f(x)* függvénynek az $x_0 \in R$ helyen létezik a határértéke és az a $h \in R$ valós szám, ha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = h \quad .$$

Definíció:

Az *f(x)* függvény határértéke $x \to +\infty$ esetén a $h \in R$ valós szám, ha **<u>bármely</u>** $\varepsilon > 0$ számhoz **<u>található</u>** *k* valós szám úgy, hogy a függvény értelmezve van $x > k$ esetén és **ezen *x* értékekre teljesül** az $|f(x) - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Határértékre vonatkozó tételek:

Ha létezik $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, akkor

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

továbbá, ha $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Összetett függvény határértékére vonatkozó tétel:

Ha $\lim_{x\to a} g(x) = b$ és $\lim_{x\to b} f(x) = c$, továbbá van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$0 < |x-a| < \delta$ esetén $g(x) \neq b$, akkor $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$.

Tétel:

Ha az *f, g* és *h* függvények értelmezve vannak az x_0 pont egy környezetében és itt

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, valamint $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, akkor

$\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

Fontos függvényhatárértékek:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$ vagy $$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$$ spec. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$ spec. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$$

Definíció: (folytonosság lokálisan)

Az *f(x)* függvény folytonos az x_0 helyen, ha

- értelmezve van az x_0 helyen és annak környezetében,
- létezik a $\lim_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definíció:

Egy függvény folytonos az (a,b) intervallumon, ha annak minden pontjában folytonos.

Definíció:

Jobb és bal oldali folytonosság.

Definíció:

Egy függvény folytonos az [a,b] intervallumon, ha folytonos az (a,b) intervallumon és az *a* pontban jobbról, *b* pontban balról folytonos.

Tételek:

Folytonos függvények összege, szorzata, hányadosa (ha a nevező nem zérus) folytonos.

Összetett függvény és inverz függvény folytonossága.

Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai:

1. Az [a,b] zárt intervallumon folytonos függvény **korlátos**.
2. Az [a,b] zárt intervallumon folytonos függvény **felveszi legnagyobb és legkisebb értékét**. (Weierstass tétel)
3. Ha az *f(x)* függvény folytonos az [a,b] zárt intervallumon és $f(a)<c<f(b)$, akkor létezik olyan $x \in [a,b]$, hogy **$f(x)=c$**. (Bolzano - Darboux tétel)
4. Ha az *f(x)* függvény folytonos az [a,b] zárt intervallumon, akkor a **minimuma és maximuma között minden értéket felvesz**. (Bolzano - Weierstrass tétel)

Definíció: (konvexitás)

Az *f(x)* függvény az [a, b] intervallumon **konvex**, ha **bármely**

α *és* $\beta \in [a,b]$, *és* $x \in (a,b)$

esetén $$f(x) \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$$.

Definíció: (konkáv fv.) Fordított egyenlőtlenség jel.

Tétel: Ha az *f(x)* függvény **konvex** az [a, b] intervallumon, akkor **folytonos is**.

Elemi függvények:

1. $y = const.$, $y=x^n$, *polinomok*, $y=x^{-n}$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y=x^r$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, *spec.:* $y=e^x$ *és* $y = \ln x$,

2. trigonometrikus függvények: *sinx, cosx, tgx, ctgx* és inverzeik,

hiperbolikus függvények: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

és inverzeik: $ar \operatorname{sh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $ar \operatorname{ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$,

$$ar \operatorname{th} x = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad ar \operatorname{cth} x = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

tulajdonságok, grafikonok.