Extrémérték-elmélet

Dr. Barabás Béla
egyetemi docens
BME Természettudományi Kar
Matematika Intézet
Sztochasztika Tanszék

2010. július 18.

Tartalomjegyzék

1. Extremális eloszlások története 4

2. A nagy klasszikusok 5

3. Bevezetés 8

   3.1. Centrális határeloszlás-tételek 8

4. A normális eloszlás vonzási tartománya 9

   4.1. Stabilis eloszlások 10

   4.2. α -stabil eloszlások vonzási tartománya 13

   4.3. Reguláris változású függvények 14

5. A normalizált maximum határeloszlása 16

6. Kitekintés a többváltozós esetre 23

   6.1. Definíciók, alaptulajdonságok 23

   6.2. Pontfolyamatokkal való kapcsolat: 25

   6.3. A függőség mértéke 25

7. A maximum vonzási tartománya 27

8. Általános extrémérték-eloszlások (GEV) 29

   8.1. Fréchet és Weibull eloszlások maximum vonzási tartományának karakterizációja 30

9. Az általánosított Pareto eloszlás 33

10. Rekordok 34

    10.1. Rekordok vonzási tartománya 37

Irodalomjegyzék 38

1. Extremális eloszlások története

[7] Fisher és Tipet, (1928) *Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample.*

Az első és legfontosabb eredmény 1928-ból. Egy statisztikai minta legnagyobb vagy legkisebb értékének határeloszlása háromféle lehet.

[8] Gnedenko B.V. (1943) *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire.* Ebben olvasható az extremális határeloszlások szigorú matematikai bizonyítása.

[15] Jenkinson A.F. (1955) *The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements.*

Az extrémérték eloszlások három típusa egy formulába írható. Általánosított extrémérték eloszlás (GEV).

[22] Pickand, J. (1971) *The two-dimensional Poisson process and extremal processes.* Itt jelenik meg az a gondolat, hogy a maximum helyett egy küszöbérték túllépéseit vizsgáljuk.

[18] Leadbetter M.R. (1974) *On extreme values in stationary sequences.* A legtöbb korábbi munka független megfigyelésekre vonatkozott. Ebben a cikkben Leadbetter megmutatja, hogy a határeloszlás tételek akkor is igazak, ha a hosszútávú függés nem túl erős.

[23] Pickands, J. (1975) *Statistical inference using extreme order statistics.* A küszöbérték túllépések határértékben általánosított Pareto eloszlásúak, ha a küszöbértéket növeljük.

[11] de Haan, L. és Resnick, S.I. (1977) *Limit theory for multivariate sample extremes.* Az elmélet kiterjesztése egy változóról több változóra. Bizonyos feltételek mellett a többváltozós extrémérték eloszlás komponensenként GEV, de nem teljesen karakterizálható véges sok paraméterrel.

[19] Leadbetter, M.R. (1983) *Extremes and local dependence in stationary sequences.* Az extremális index bevezetése.

[10] de Haan, L. (1985) *Extremes in higher dimensions.* Egy többváltozós eloszlás, amely legalább az egyik komponensében extrém eloszlású, határértékben többváltozós Poisson folyamat.

[14] Hsing T., Husler J. and Leadbetter M.R. (1988) *On the exceedance point process for a stationary sequence.* Stacionárius folyamat esetén egy magas küszöb túllépéseinek időtartama klaszterekben jelentkezik és határértékben Poisson folyamat.

[28] Tawn, J.A. (1988) *Bivariate extreme value theory - models and estimation.* Mivel a kétváltozós extrémérték eloszlások nem jellemezhetők véges sok paraméterrel, ezért néhány alosztályt vizsgál és azok becslését.

[3] Davison, A.C. és Smith, R.L. (1990) *Models for exceedances over high thresholds.* Statisztikai módszerek, küszöb túllépés általánosított Pareto eloszlás, beleértve a kovariancia bevezetését. Küszöb feletti csúcsok ("peaks-over-threshold" POT) megközelítés.

[20] Leadbetter, M.R. (1991) *On a basis for 'Peaks over Threshold' modeling.* Valószínűségszámítási igazolása a küszöb feletti csúcsok modellnek.

[2] Coles, S.G. and Tawn, J.A. (1991) *Modelling extreme multivariate events.* Paraméteres modellkonstrukció többváltozós extrémérték eloszlásra a határ Poisson folyamat becslésével. Lásd még:

[16] Joe, H., Smith R.L. és Weissman, I. (1992) *Bivariate threshold methods for extremes.*

[27] Smith R.L., Tawn J.A. és Coles S.G. (1997) *Markov chain models for threshold exceedances.* Markov láncokkal modellezi az extrém értékek klaszterében az idő fejlődését.

[6] Ferro C.A.T. és Segers J. (2003) *Inference for clusters of extreme values.* Az extremális értékek klaszterekbe csoportosítása önkényes eljárás, de ez a cikk ad egy asszimptotikusan jó eljárást az extremális index becslésére.

[13] Heffernan J. és Tawn J.A. (2004) *A conditional approach for multivariate extreme values.* A többváltozós folyamat extrém értékeinek modellezésére egy természetesebb megközelítés, mint a klasszikus komponensenkénti.

2. A nagy klasszikusok

Ronald. A. Fisher: 1890-1962
Angol statisztikus, aki komolyan foglalkozott evolúció biológiával, genetikával. Gyermekkorától kezdve látása nagyon gyenge, ezért a matematikát is papír, ceruza nélkül tanulta. Ennek következtében vizuális képessége rendkívül kifejlett. Legendás volt arról, hogy matematikai eredményeket a levezetések, közbülső lépések nélkül adja közzé. Biológiai, agrár alkalmazások vezették a kisérlettervezési módszerek, a variancia analízis megalkotásához.

Maurice Frechet: 1878-1973
Francia matematikus. Jelentős eredményeket ért el a valószínűségszámítás és matematikai statisztika terén. A vastag farkú eloszlások gyakorlati alkalmazásait is tanulmányozta. A róla elnevezett extrémérték eloszlásoknak vastag farka van.

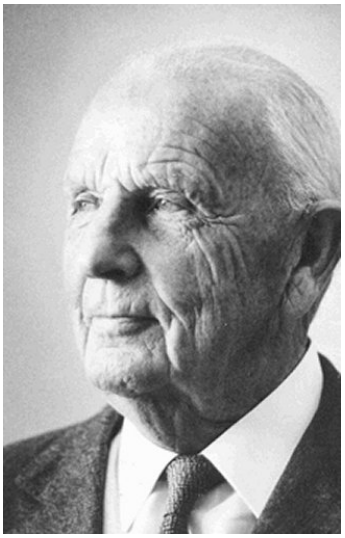
Boris Vladimirovich Gnedenko:1912-1995
Orosz matematikus. Kolmogorov tanítványa és munkatársa. 1949-től az Ukrán Tudományos Akadémia Fizika, Kémia és Matematika szakosztályának vezetője.

Emil Gumbel: 1891-1966
Németországban született és tanult statisztikus. Pacifista és szocialista nézetei miatt el kellett hagynia Németországot. Először Franciaországba emigrált, majd az Egyesült Államokba. Az extrémérték-elmélet alkalmazásának úttörője volt, elsősorban a klímakutatás és hidrológia terén.

Vilfredo Pareto: 1848-1923
Franciaországban született. Olaszországban mérnöki diplomát szerzett, majd érdeklődése a társadalomtudományok felé fordult. Svájcban szociológiával, biztosítással foglalkozott. A róla elnevezett hatványrendű eloszlást jövedelmek és a társadalom javainak modellezésére használta.

Leonard Henry Caleb Tippett: 1902-1985
Angol matematikus, fizikus. Pearson és Fisher tanítványa. Legjelentősebb eredményeit az extrém érték elmélet és a statisztikai minőségellenőrzés területén érte el. 1985-ben egy teherautó elütötte.

Waloddi Weibull: 1887-1979
Svéd mérnök. A megbízhatóságelmélet terén kifejtett úttörő munkássága tette híressé. Szerkezetek kifáradásának, élettartamának modellezésére elsőként használt statisztikai módszereket. Ma is a róla elnevezett eloszlást használjuk leggyakrabban élettartam modellezésre.



3. Bevezetés

Legyen $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, azonos eloszlású, nem elfajult valószínűségi változók sorozata közös F eloszlásfüggvénnyel, és

$$M_n = max\left(X_1, X_2, \ldots X_n\right).$$

Nyilvánvalóan $M_n \to x_F$, ha $n \to \infty$, egy valószínűséggel, ahol x_F (véges vagy végtelen) az F eloszlásfüggvény értelmezési tartományának jobb oldali végpontja. Természetes gondolat azt kérdezni, hogy van-e nem elfajult határeloszlása az alkalmasan transzformált (standardizált) M_n maximumnak, azaz van-e olyan Z valószínűségi változó és alkalmas $a_n > 0$, b_n sorozatok, hogy eloszlásban

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \to Z.$$

Mivel a feltett kérdés első ránézésre is hasonló a centrális határeloszlás-tételekhez, azaz ha

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

akkor van-e olyan Z valószínűségi változó és alkalmas $a_n > 0$, b_n sorozatok, hogy

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \to Z$$

eloszlásban, ezért először is felidézzük az arra vonatkozó alapvető eredményeket.

3.1. Centrális határeloszlás-tételek

3.1. Tétel.

(Moivre-Laplace tétel) Ha $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ha & x \leq 0 \\ q = 1-p & ha & 0 < x \leq 1 \\ 1 & ha & 1 < x \end{cases}$$

eloszlásfüggvénnyel, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x)$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

3.2. Tétel.

Ha $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók m várhatóértékkel és d szórással, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}d} < x\right) = \Phi(x).$$

3.3. Tétel.

Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \dots X_n$ független valószínűségi változók, amelyeknek létezik az első három momentuma. Jelölje X_k várható értékét $E[X_k] = m_k$, szórását $D[X_k] = d_k$, és harmadik centrális momentumát h_k, ahol $h_k^3 = E[|X_k - m_k|^3]$. Legyen

$$\mu_n = m_1 + \dots + m_n, \quad \delta_n = \sqrt{d_1^2 + \dots + d_n^2} \quad s \quad \chi_n = \sqrt[3]{h_1^3 + \dots + h_n^3}$$

Ha a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi_n}{\delta_n} = 0$$

Ljapunov feltétel teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - \mu_n}{\delta_n} < x\right) = \Phi(x).$$

4. A normális eloszlás vonzási tartománya

4.1. Definíció.

A normális eloszlás vonzási tartományának nevezzük azoknak az $F(x)$ eloszlásfüggvényeknek a halmazát, amelyek az alábbi tulajdonságúak.
Legyen $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos eloszlású, nem elfajult valószínűségi változók sorozata közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény a normális eloszlás vonzási tartományába tartozik, ha találhatók alkalmasan választott $a_n > 0$, b_n sorozatok úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - b_n}{a_n} < x\right) = \Phi(x). \tag{1}$$

Jelölés: $F(x) \in DA(\Phi)$ (Domain of attraction of the normal distribution.)

4.1. Megjegyzés.

A (3.2) tétel alapján minden olyan valószínűségi változó, amelynek van szórása, a normális eloszlás vonzási tartományába tartozik. Azonban a normális eloszlás vonzási tartománya bővebb. Igaz ugyanis a következő tétel:

4.1. Tétel. *(P.Lévy, W.Feller, A.Hincsin)*

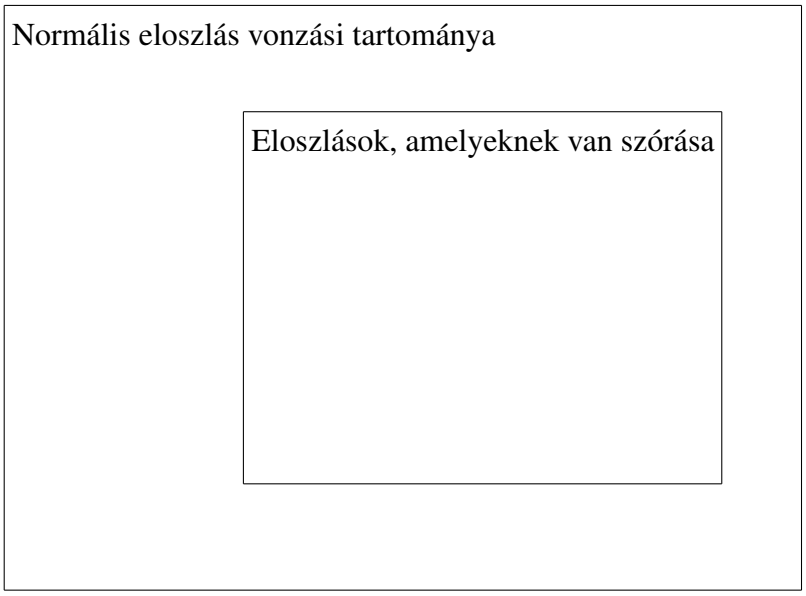
Egy $F(x)$ eloszlásfüggvény akkor és csak akkor tartozik a normális eloszlás vonzási tartományába, ha

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y^2\left[F(-y)+(1-F(y))\right]}{\int_{-y}^{y} x^2 dF(x)} = 0 \tag{2}$$

vagy ugyan ez más formában:

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\int_{[-y;y]^c} dF(x)}{\int_{[-y;y]} x^2 dF(x)} = 0 \tag{3}$$

Bizonyítás: Rényi ([24]) VII.3.§.383.old.



1. ábra. Normális eloszlás vonzási tartománya

4.1. Stabilis eloszlások

Felvetődik a kérdés, hogy a normális eloszláson kívül vannak-e olyan eloszlások, amelyeknek van vonzási tartománya. A válasz az, hogy igen. Az úgynevezett *stabilis eloszlásoknak* van vonzási tartománya.

4.2. Definíció.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvényű X valószínűségi változót *stabilisnak* nevezzük, ha az ugyancsak $F(x)$ eloszlásfüggvényű független X_1 és X_2 valószínűségi változókhoz bármely $c_1, c_2 \in R_+$ esetén találhatók a és b konstansok úgy, hogy

$$c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{\text{dis}}{=} aX + b$$

(eloszlásban megegyeznek)

Következés képpen, ha $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos stabilis eloszlású valószínűségi változók sorozata, akkor van olyan a_n és b_n konstans, hogy

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{\text{dis}}{=} a_nX + b_n$$

Tehát $\frac{S_n - b_n}{a_n}$ eloszlásfüggvénye megegyezik X eloszlásfüggvényével.

Következmény: A stabilis eloszlások halmaza egybe esik a független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegének alkalmasan centrált és skálázott nem-elfajult határeloszlásával.

4.2. Megjegyzés.

A normális eloszlás stabilis, mert két független normális eloszlás konvolúciója normális. Sőt:

4.2. Tétel.

Ha ξ és η független, azonos eloszlású valószínűségi változók 0 várhatóértékkel és véges szórással, valamint $\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$ eloszlásfüggvénye megegyezik ξ és η közös eloszlásfüggvényével, akkor ξ és η normális eloszlású.

Bizonyítás: Rényi ([24]) V.5.§.2.Tétel.277.old.

4.3. Megjegyzés.

Ebből a tételből következik, hogy a normális eloszlás az egyetlen véges szórású stabilis eloszlás.

4.3. Tétel.

A stabilis eloszlások karakterisztikus függvénye:

$$\phi_X(t) = E[\exp(iXt)] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta sign(t)z(t,\alpha)\} \tag{4}$$

ahol $\gamma \in R$, $c > 0$, $\alpha \in (0;2]$, $\beta \in [-1;1]$ és

$$z(t;\alpha) = \begin{cases} tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & ha \quad \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}ln|t| & ha \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Bizonyítás: Gnyegyenko ([9]) 7.fejezet 34.§. 171.old.

4.3. Definíció.

A fenti kifejezésben az α paramétert karakterisztikus kitevőnek hívják. A megfelelő eloszlás α -stabil. Az α -stabil eloszlás eloszlásfüggvényét ezentúl G_α jelöli.

Speciálisan: Ha $\alpha = 2$, akkor $\phi_X(t) = \exp\{i\gamma t - ct^2\}$, ami a γ várhatóértékű és $\sqrt{2c}$ szórású normális eloszlás karakterisztikus függvénye.

Kérdés: Ha adott $\alpha \in (0; 2]$ és az $a_n > 0$, b_n sorozatok úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - b_n}{a_n} < x\right) = G_\alpha(x),$$

akkor előfordulhat-e, hogy alkalmas $\tilde{a_n} > 0$, és $\tilde{b_n}$ sorozatokkal

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - \tilde{b_n}}{\tilde{a_n}} < x\right) = G_{\tilde{\alpha}}(x),$$

ahol $\alpha \neq \tilde{\alpha}$?
A válasz: nem. Nevezetesen, igaz a következő Gnedenkotól ([8]) származó tétel, amelynek kicsit általánosabb formája megtalálható Feller ([5] 2.kötet 253.old) könyvében:

4.4. Tétel.

Tegyük fel, hogy $F(x)$ és $G(x)$ nem elfajult eloszlásfüggvények és az $F_n(x)$ eloszlásfüggvény sorozat olyan, hogy tetszőleges $x \in R$ esetén alkalmas $a_n > 0$ és b_n, valamint $\alpha_n > 0$ és β_n sorozatokkal

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = F(x), \tag{5}$$

továbbá

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = G(x), \tag{6}$$

akkor

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \to a > 0 \qquad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \to b. \tag{7}$$

és

$$F(x) = G(ax + b). \tag{8}$$

Az állítás megfordítása is igaz. Ha (7) határérték reláció fennáll, akkor (5) és (6) határértékek is, valamint

$$F(x) = G(ax + b) \tag{9}$$

minden valós x esetén.
Bizonyítás:
Először tegyük fel, hogy (5) és (6) teljesül. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$H_n(x) = F_n(a_n x + b_n), \qquad \rho_n = \frac{\alpha_n}{a_n} \qquad \sigma_n = \frac{\beta_n - b_n}{a_n}.$$

Ha most $\rho_n \to a \quad \sigma_n \to b$ valamint $H_n(x) \to F(x)$, akkor

$$H_n(\rho_n x + \sigma_n) \to F(ax + b).$$

Másrészt

$$H_n(\rho_n x + \sigma_n) = F_n(a_n(\rho_n x + \sigma_n) + b_n) = F_n(\alpha_n x + \beta_n) \to G(x).$$

Tehát $F(x) = G(ax + b)$.

A fordított irány bizonyítására megmutatjuk, hogy $H_n(\rho_n x + \sigma_n) \to G(x)$ csak akkor teljesülhet, ha $\frac{\alpha_n}{a_n} \to a > 0 \qquad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \to b$.

Mivel $G(x)$ nem egy pontra koncentrálódó valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ezért létezik legalább két különböző x' és x'' úgy , hogy a $\rho_n x' + \sigma_n$ és a $\rho_n x'' + \sigma_n$ sorozatok korlátosak maradnak. Ebből következik, hogy maguk a ρ_n és σ_n sorozatok is korlátosak. Található ezért az egész számoknak olyan n_k sorozata, hogy $\rho_{n_k} \to a \quad \sigma_{n_k} \to b$. Mivel $G(x) = F(ax+b)$, ezért $a > 0$ egyébként $G(x)$ nem lehetne eloszlásfüggvény, és minden részsorozatra ugyan azt az a és b határértéket kapjuk, tehát (7) teljesül.

4.4. Megjegyzés.

Az a feltétel, hogy $F(x)$ és $G(x)$ nem elfajult eloszlásfüggvények lényeges, mert ha pl. $G(x)$ egy pontra koncentrálódó valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor $\rho_n \to \infty$ és $\sigma_n = (-1)^n$ esetén a (7) feltétel nem teljesül, de $H_n(\rho_n x + \sigma_n) \to G(x)$ ahol $G(x)$ egy origóra koncentrált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

4.5. Megjegyzés.

Nyilvánvaló, hogy a (9) egyenlőség szimmetrikus, reflexív és tranzitív, tehát ekvivalencia reláció. Az egymással ekvivalens eloszlásfüggvényeket *azonos típusúaknak* nevezzük.

4.2. α -stabil eloszlások vonzási tartománya

4.4. Definíció.

Az α-stabil eloszlások vonzási tartományának nevezzük azoknak az $F(x)$ eloszlásfüggvényeknek a halmazát, amelyek az alábbi tulajdonságúak:
Legyen $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, azonos eloszlású, nem elfajult valószínűségi változók sorozata közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény az α -stabil eloszlások vonzási tartományába tartozik, ha találhatók alkalmasan választott $a_n > 0$ és b_n sorozatok úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - b_n}{a_n} < x\right) = G_\alpha(x) \tag{10}$$

Az $\alpha = 2$ esetet már láttuk.

4.5. Tétel.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény az α -stabil eloszlás vonzási tartományába tartozik valamely $0 < \alpha < 2$ esetén akkor és csak akkor, ha $x \to +\infty$ esetén

$$F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x) \qquad 1 - F(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x) \tag{11}$$

ahol $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ és $c_1 + c_2 > 0$, valamint $L(x)$ lassú változású függvény.

4.5. Definíció.

Az $L(x)$ lassú változású függvény, ha minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1 \tag{12}$$

Valamint a kisordó jelentése: $f(x) = o(x^\alpha)$, ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Ezzel a függvényosztállyal a következő szakaszban részletesen foglalkozunk.
A (4.5) tétel bizonyítása: ....

4.6. Tétel.

Ha $F(x)$ eloszlásfüggvény az α -stabil eloszlások vonzási tartományába tartozik, akkor $\delta < \alpha$ esetén $E[|X|^\delta]$ véges, $\delta > \alpha$ esetén végtelen.

Bizonyítás Gnyegyenko ([9]) 7.fejezet 35.§. 3. tétel, 185.old.

4.3. Reguláris változású függvények

4.6. Definíció.

Egy $U : \quad R^+ \to R^+$ függvényt végtelenben *reguláris változásúnak* nevezünk, ha bármely $x > 0$ esetén létezik $\alpha \in R$ valós szám, úgy hogy

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha. \tag{13}$$

4.7. Definíció.

Az $\alpha = 0$ speciális esetben, azaz, ha

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = 1$$

az U függvényt *lassú változásúnak* nevezzük.

4.8. Definíció.

Ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = 0 \qquad vagy \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = \infty, \tag{14}$$

akkor a függvény a végtelenben gyorsan változik.

4.1. Példa.

Az alábbi függvények reguláris változásúak a végtelenben α kitevővel:

$$x^\alpha, \quad x^\alpha \cdot \log(1+x), \quad x^\alpha \cdot \log^\alpha(1+x), \quad x^\alpha \cdot \log log(e+x), \ldots$$

4.2. Példa.

Az $\arctan x$ függvény lassú változású a végtelenben.

4.3. Példa.

Az $e^x, \quad e^{-x}$ függvények gyorsan változnak a végtelenben.

4.4. Példa.

Az alábbi függvények nem reguláris változásúak:

$$2 + \sin x, \quad e^{[\log x]},$$

ahol $[x]$ az egészrész függvény.

4.7. Tétel.

Ha az U függvény reguláris változású α kitevővel, akkor az

$$L(x) = x^{-\alpha} \cdot U(x)$$

függvény lassú változású.
Következmény:
Minden reguláris változású $U(x)$ függvény előállítható

$$U(x) = x^\alpha \cdot L(x)$$

alakban, ahol az $L(x)$ függvény lassú változású.

4.6. Megjegyzés.

Érdekesek az alábbi eredmények a lassú változású függvények integráljáról:

1. Ha $\beta > -1$ akkor

$$\int_0^x y^\beta L(y)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{\beta+1} + o(1)\right) x^{\beta+1} L(x)$$

2. Ha $\beta < -1$, akkor

$$\int_x^\infty y^\beta L(y)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{|\beta+1|} + o(1)\right) x^{\beta+1} L(x)$$

3. Minden lassú változású függvény előáll az alábbi alakban:

$$L(x) = a(x) \exp\left\{\int_1^x \frac{\varepsilon(y)}{y}\mathrm{d}y\right\},$$

ahol $a(x) \to c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon(x) \to 0$ ha $x \to \infty$.

4.7. Megjegyzés. *Meg kell nézni, hogy a survival func., hazard rate, öregedő eloszlások, reguláris farok, stb. dolgok hogyan függnek össze!*

Farokbecslés: Szabó Balázs beszámolója

5. A normalizált maximum határeloszlása

5.1. Megjegyzés.

Ebben a szakaszban az $1 - F(x) = \bar{F}(x)$ jelölést fogjuk használni.

Kulcskérdés: Alkalmas b_n lokációs és $a_n > 0$ skálaparaméterrel van-e nem elfajult határeloszlása egy n-elemű minta maximumának? Tehát a

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x\right) \tag{15}$$

valószínűség határértékét tanulmányozzuk. Bevezetve az $u_n = a_n x + b_n$ jelölést, az (15) kifejezés így is írható:

$$P\left(M_n < u_n\right) \tag{16}$$

5.1. Lemma. *Poisson approximáció*

Adott $\tau \in [0; +\infty]$ és u_n valós sorozat esetén az alábbi két állítás ekvivalens:

$$n\bar{F}(u_n) \to \tau \tag{17}$$

$$P\left(M_n < u_n\right) \to e^{-x} \tag{18}$$

5.2. Megjegyzés.

τ függhet x-től. Valójában később látni fogjuk, hogy $x^{-\alpha}$ vagy e^{-x} lehet.

Bizonyítás. . . .

A következő lemma arról szól, hogy ha alkalmas sorozatokkal a maximumnak van határeloszlása, akkor az lényegében egyértelmű.

5.1. Definíció.

Ha $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, az X valószínűségi változóval azonos eloszlású valószínűségi változók, valamint $a_n > 0$ és b_n alkalmas konstansok úgy, hogy

$$M_n = max\left(X_1, X_2, \ldots X_n\right) \overset{\text{dis}}{=} a_n X + b_n. \tag{19}$$

akkor az X valószínűségi változót max-stabilisnak nevezzük.

A (19) kifejezés

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \overset{\text{dis}}{=} X$$

alakba is írható, ami azt mutatja, hogy a max-stabilis eloszlások beletartoznak a maximumok lehetséges határeloszlásainak halmazába. Valójában a max-stabilis eloszlások halmaza egybe esik az alkalmasan normált maximumok határeloszlásával, ami a következő klasszikus eredményből adódik.

5.1. Tétel.

Fisher-Tippett tétel

Legyenek $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, valamint $a_n > 0$ és b_n alkalmas konstansok úgy, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x\right) = H(x) \tag{20}$$

ahol $H(x)$ nem elfajult eloszlásfüggvény, akkor $H(x)$ csak az alábbi három eloszlásfüggvény valamelyike lehet.

Fréchet eloszlás:

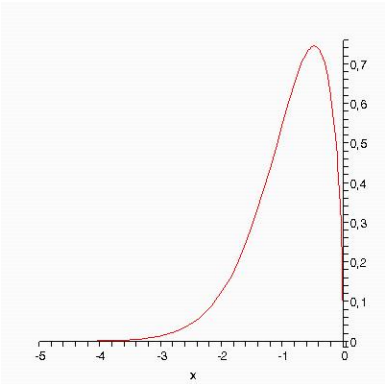
$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & ha \quad x > 0 \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{21}$$

Weibull eloszlás:

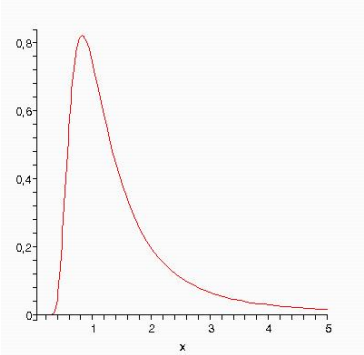
$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{-\alpha}\} & ha \quad x \leq 0 \\ 1 & ha \quad x > 0 \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{22}$$

Gumbel eloszlás:

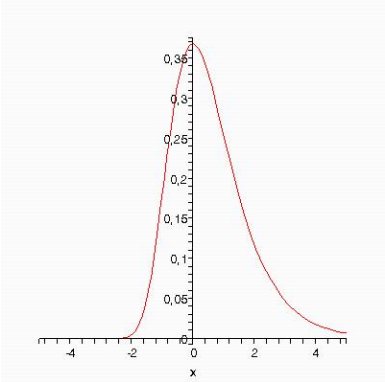
$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in R \tag{23}$$



Weibull eloszlás sûrûségfüggvénye alpha =1,5



Fréchet eloszlás sûrûségfüggvénye alpha =2 .



Gumbel eloszlás sûrûségfüggvénye

2. ábra. Extrémérték eloszlások sűrűségfüggvénye.

5.2. Definíció.

A $\Phi_\alpha(x)$ Frechet, $\Psi_\alpha(x)$ Weibull és $\Lambda(x)$ Gumbel eloszlásfüggvényeket standard extrémérték eloszlásfüggvényeknek nevezzük.
Fisher-Tippett tétel bizonyítása:
Tegyük fel, hogy alkalmasan választott $a_n > 0$ és b_n valós konstansokkal:

$$F^n(a_n x + b_n) \to G(x) \text{ ha } n \to \infty \tag{24}$$

Ezért triviálisan:

$$\lim_{n\to\infty} [F^n(a_{nk}x + b_{nk})]^k = G(x) \text{ minden } k > 0 \text{ egészre} \tag{25}$$

Illetve A. Khintchine tétele miatt ([**?**] 43. tétel *hivatkozás!*) léteznek olyan $\alpha_k > 0$ és β_k konstansok, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_{nk}x + b_{nk}) = G(\alpha_k x + \beta_k) \tag{26}$$

A kettőt összerakva kapjuk:

$$G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x) \tag{27}$$

Most α_k lehetséges értékei szerint három részben végezzük el a bizonyítást.

(I) $0 < \alpha_k < 1$ legalább egy $k > 1$ konstansra:

Erre a létező k-ra vizsgáljuk meg az olyan x-eket, amikre:

$$x \geq \frac{\beta_k}{1-\alpha_k} \text{ vagyis } \alpha_k x + \beta_k \leq x \tag{28}$$

Az ilyen x-ekre az eloszlásfüggvény monotonsága miatt:

$$G(\alpha_k x + \beta_k) \leq G(x) \tag{29}$$

Így használva (27) -t, illetve azt, hogy $0 \leq G(x) \leq 1$ kapjuk:

$$G(x) = G^k(\alpha_k x + \beta_k) \leq G^k(x), \tag{30}$$

amiből vagy $G(x) = 0$, vagy $1 \leq G^{k-1}(x)$ adódik, de akkor $G(x) = 1$. Tehát

$$G(x) = 1 \text{ ha } x \geq \frac{\beta_k}{1-\alpha_k} \tag{31}$$

Ezt követően megmutatjuk, hogy az ennél kisebb x-ekre $G(x) < 1$. Ehhez tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis, hogy létezik $x_0 < \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$, hogy $G(x_0) = 1$.

Legyen $x < x_0$. Válasszunk olyan n-t, amire:

$$x_0 \leq \alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}\right) \tag{32}$$

Ez x_0-ról feltettek, illetve a k-ról feltettek értelmében megtehető, mert

$$\alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}\right) = \alpha_k^n x + \beta_k \cdot \frac{1-\alpha_k^n}{1-\alpha_k} \tag{33}$$

Itt az $0 < \alpha_k < 1$ feltétel miatt tetszőleges x esetén $\alpha_k^n \to 0$, ha $x \to \infty$ és ezért a jobb oldal éppen a felső határhoz konvergál. Így mivel $G(x_0) = 1$:

$$G(\alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}\right)) = 1 \tag{34}$$

Így az előző kifejezés tetszőleges hatványa is 1, ezt illetve (27)-t használva:

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & G^{k^n}(\alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \cdots + \alpha_k^{n-1}\right)) & = \\ & = & \left[G^k\left(\alpha_k\{\alpha_k^{n-1}x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \cdots + \alpha_k^{n-2}\right)\} + \beta_k\right)\right]^{k^{n-1}} & = \\ & = & G^{k^{n-1}}(\alpha_k^{n-1}x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \cdots + \alpha_k^{n-2}\right)) = \cdots & = G(x) \end{array} \tag{35}$$

Így $G(x) = 1$ minden x -re, ami ellentmondás.
Eljutottunk odáig, hogy $G(x) = 1$ ha $x \geq \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$ és $G(x) < 1$ egyébként. Ebből az is látszik, hogy a határfüggvény nem lehet egy pontra koncentrált eloszlás eloszlásfüggvénye.
Most megmutatjuk, hogy ha egy k-ra teljesül, hogy $\alpha_k < 1$, akkor minden k-ra teljesül. Valóban, tegyük először fel, hogy létezik r, hogy $\alpha_r = 1$, ekkor (27) miatt $G^r(x + \beta_r) = G(x)$, emiatt igazak:

$$\begin{array}{rcll} G^r\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} + \beta_r\right) & = & G\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}\right) & = 1 \\ G\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} - \beta_r\right) & = & G^r\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}\right) & = 1 \end{array} \tag{36}$$

Így ha $\beta_r \neq 0$, akkor az előjelétől függően az egyik állítás ellentmond $\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$ levezetett elválasztó szerepének. Ha pedig $\beta_r = 0$, akkor $G^r(x) = G(x)$, amiből az következik, hogy $G(x) = 0$ ha $x < \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$. Ez pedig ellentmondás.
Most megmutatjuk, hogy $\alpha_r > 1$ sem fordulhat elő. Mert ha lenne ilyen r, akkor minden $x \leq \frac{\beta_r}{1-\alpha_r}$-re átrendezéssel $\alpha_r x + \beta_r \leq x$, így:

$$G(\alpha_r x + \beta_r) \leq G(x) \tag{37}$$

Így (27) miatt:

$$G(x) = 0 \text{ ha } x \leq \frac{\beta_r}{1 - \alpha_r} \tag{38}$$

A fentiből, illetve abból, hogy régebbről tudjuk, hogy $G(x) = 1$ ha $x \geq \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$ szeretnénk ellentmondást kihozni. A két dolog rögtön ellentmondásban van, ha nem teljesül, hogy $\frac{\beta_r}{1-\alpha_r} \leq \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$. Így feltehető, hogy teljesül. Megmutatjuk, hogy $x = \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$-hoz tetszőlegesen közel is 0 G értéke. Ha ez sikerül, akkor kész vagyunk, a tétel kimondása után tett megjegyzés alapján. A fennmaradó részhez minden ϵ-hoz, és tetszőleges rögzített $x < \frac{\beta_r}{1-\alpha_r}$-hez tekintsük azt az n-t amire:

$$\frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} - \epsilon < \alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}\right) \tag{39}$$

Most (35) mintájára elvégezve az átalakítást:

$$G^{k^n}(\alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}\right)) = G(x) = 0 \tag{40}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $x \leq \frac{\beta_r}{1-\alpha_r}$. Így

$$G(\alpha_k^n x + \beta_k \cdot \left(1 + \alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}\right)) = 0$$

(39) miatt pedig $G\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}-\varepsilon\right)=0$. Ezzel megkaptuk az ellentmondást. Vagyis beláttuk, hogy ha egy k -ra igaz, hogy $\alpha_k<0$, akkor az összesre igaz.
Innen gyorsan be tudjuk fejezni a bizonyítást, legalábbis az első esetben. $\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$ korábban levezetett elválasztó tulajdonsága miatt:

$$\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}=\frac{\beta_n}{1-\alpha_n} \text{ minden } k\text{-ra és } n\text{-re} \tag{41}$$

A fenti miatt a következőképpen definiálhatunk egy k-tól független függvényt:

$$\bar{G}(z)=G\left(z+\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}\right) \tag{42}$$

Erre triviálisan igaz:

$$\bar{G}(\alpha_k z)=G\left(\alpha_k z+\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}\right) \tag{43}$$

Ha a felső képlet belsejét hatványsoros alakban írjuk ki, ezt követően pedig kiemelünk α_k-t, és használjuk (27)-t, akkor kapjuk az alábbi függvényegyenletet:

$$\bar{G}^k(\alpha_k z)=\bar{G}(z) \text{ minden } k \text{ -ra} \tag{44}$$

Ezzel kész vagyunk az első esettel, hiszen tudjuk, hogy (44)-t azzal a feltétellel, hogy $\bar{G}(z)=1$ ha $z\geq 0$ csak Ψ_α elégíti ki. ([**?**], 95. oldal *ide más hivatkozás kell!*).

(II) $\alpha_k>1$ legalább egy $k>1$ konstansra:

A bizonyítás teljesen analóg az előző esettel. Ugyanazzal a technikával belátja, hogy minden egész számra teljesül a (II) feltétel. Természetesen itt a használt kulcs szimmetrikusan eltér:

$$G(x)=0 \text{ ha } x\leq\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} \tag{45}$$

Emiatt megint látszik, hogy a kapott elválasztó konstansok megegyeznek, így megint definiálhatja a felülvonásos függvényt, amire ugyancsak kap egy függvényegyenletet, aminek ezúttal a megoldása (45) miatt Φ_α.

(III) $\alpha_k=1$ legalább egy $k>1$ konstansra:

Ekkor az (I) és a (II) esetben levezetett dolgok miatt minden k-ra teljesül (III). Ekkor be kell vezetni egy új jelölést: $\beta_k=e^{c_k}$. Az új függvényt kicsit máshogy definiálja:

$$\bar{G}(z)=\begin{matrix} G(\log z) & \text{ha } x>0 \\ 0 & \text{ha } x\leq 0 \end{matrix}$$

Ezzel (27) az alábbi egyenlethez vezet:

$$\bar{G}^k(c_k z)=\bar{G}(z) \text{ minden } k \text{ -ra} \tag{46}$$

Ennek pedig tudjuk az egyedüli megoldását. Ebből pedig G épp megegyezik Λ -val.
itt van a biz. vége
Megmutatjuk, hogy a $\Phi_\alpha(x)$ Frechet, a $\Psi_\alpha(x)$ Weibull és a $\Lambda(x)$ Gumbel eloszlásfüggvények max-stabilis eloszlásfüggvények.

- (i) Ha $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók $\Phi_\alpha(x)$ Frechet eloszlásfüggvénnyel, akkor

$$P\left(M_n < x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \Phi_\alpha^n\left(x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \exp\{-n(x \cdot n^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha}\} = \Phi_\alpha(x) \tag{47}$$

  Tehát $M_n \overset{\text{dis}}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X$.

- (ii) Hasonlóan, ha X a $\Psi_\alpha(x)$ Weibull eloszlásból származik, akkor $M_n \overset{\text{dis}}{=} n^{\frac{-1}{\alpha}} X$.

- (iii) Ha pedig X eloszlása $\Lambda(x)$ Gumbel , akkor $M_n \overset{\text{dis}}{=} X + \ln n$.
  (Gumbel eloszlásnál mean 0,577215 median=-lnln2 0,3665129 modus=0)

5.2. Tétel.

Ha $X > 0$, akkor $X \approx \Phi_\alpha \iff \ln X^\alpha \approx \Lambda \iff -X^{-1} \approx \Psi_\alpha$.
Bizonyítás.

6. Kitekintés a többváltozós esetre

Nándori Péter beszámolója alapján
Felhasznált irodalom: ([12]) és ([26]).
másik tex verzióból van, formulákat ellenőrizni!

6.1. Definíciók, alaptulajdonságok

Legyen $\underline{X}_i = (X_i^{(1)}, ..., X_i^{(m)})$ f.a.e. véletlen vektorok. Tegyük fel, hogy léteznek $a_n^{(r)}, b_n^{(r)}$ $(1 \leq r \leq m)$ sorozatok, hogy

$$\left(\frac{\max_{i \leq n}(X_i^{(1)} - b_n^{(1)})}{a_n^{(1)}}, ..., \frac{\max_{i \leq n}(X_i^{(m)} - b_n^{(m)})}{a_n^{(m)}}\right) \tag{48}$$

gyengén tart egy olyan eloszlású vektor változóhoz, melynek nemdegeneráltak a marginálisai. Legyen a határeloszlá s eloszlásfüggvénye $G(x_1, ...x_m)$.

Egyszerűsítő feltevés: $G(x_1, ...x_m)$ egy dimenzió s peremeloszlásai 1 paraméterű Fréchet eloszlásúak. Ebből adódik, hogy $a_n = n$ feltehető. A továbbiakban ilyen eloszlásokról mondunk ki néhány tételt bizonyítá s nélkül.

6.1. Definíció. *A $G(x_1, ...x_m)$ eloszlásfüggvény standard formájú max-stabilis, ha*

$$G^n(nx_1, ..., nx_m) = G(x_1, ...x_m) \tag{49}$$

minden $n \in \mathbf{N}$, $\quad x_1, ...x_m \in \mathbf{R}$ esetén.

6.1. Tétel. *Egy eloszlásfüggvény max-stabilis pontosan akkor, ha az előző értelemben határértékként előáll.*

6.1. Példa. *Legyenek $V_1, V_2, ...$ független, 1 paraméterű Fréchet eloszlású valószínűségi változók. Legyen G_m az $(X_1, ..., X_k)$ vektor eloszlásfüggvénye, ahol $1 \leq r \leq k$ -ra*

$$X_r = \max_{s \leq m} a_{rs} V_s, \tag{50}$$

ahol $a_{rs} \geq 0$ konstansok.

Ekkor nyilván, ha van olyan i index, hogy $x_i \leq 0$, akkor $G_m(X_1, ..., X_k) = 0$, egyébként

$$\begin{aligned} G_m(X_1, ..., X_k) &= \\ &= P(\max_{s \leq m} a_{rs} V_s \leq x_r \mid r = 1, ..., k) \\ &= P(a_{rs} V_s \leq x_r \mid r = 1, ..., k, \quad s = 1, ..., m) \\ &= P(V_s \leq \min_{r \leq k} \tfrac{x_r}{a_{rs}} \mid s = 1, ..., m) \\ &= \textstyle\prod_{s=1}^m \exp(-\max_{r \leq k} \tfrac{a_{rs}}{x_r}) \\ &= \exp(-\textstyle\sum_{s=1}^m \max_{r \leq k} \tfrac{a_{rs}}{x_r}) \end{aligned} \tag{51}$$

Ez az eloszlás nyilván max-stabilis. A marginálisok $\exp(-\frac{1}{x})$ alakúak, ha $\sum_{s=1}^m a_{rs} = 1 \quad (1 \leq r \leq k)$. A következő tétel értelmé ben minden max-stabilis eloszlás ezen eljárás általános ításaként kapható meg:

6.2. Tétel. *G standard formájú max-stabilis pontosan akkor, ha létezik egy U véges mérték az*

$$\Omega = \left\{ \underline{a} \in \mathbf{R}^m | \quad a_r \geq 0, \quad 1 \leq k \leq m; \quad \sum_{s=1}^m a_r^2 = 1 \right\} \tag{52}$$

halmazon, hogy

$$\int_\Omega a_r U(d\underline{a}) = 1 \tag{53}$$

és

$$G(x_1, ..., x_m) = \exp \int_\Omega (-\max_{r \leq m} \frac{a_{rs}}{x_r} U(d\underline{a})) \tag{54}$$

6.2. Példa. *Ha $m = 2$, és U a Lebesgue mérték, akkor $G(x_1, x_2) = \exp(-(x_1^{-2} + x_2^{-2})^{\frac{1}{2}})$.*

6.3. Tétel. *Legyenek $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ...$ f.a.e. valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel, ahol F marginálisai $1 - \frac{1}{x}$ alakúak. F a G standard formájú max-stabilis eloszlás vonzási tartományába tartozik pontosan akkor, ha*

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{\underline{X}_1}{\|\underline{X}_1\|} \in C | \quad \|\underline{X}_1\| > t) = \frac{U(C)}{U(\Omega)} \tag{55}$$

minden $C \subset \Omega$ Borel halmazra, melyre $U(\partial C) = 0$.

6.2. Pontfolyamatokkal való kapcsolat:

Tegyük fel, hogy F a G standard formájú max-stabilis eloszlás vonzási tartományába tartozik. Ekkor az $\left\{\frac{\underline{X}_1}{n}\right\}$ folyamat eloszlásban tart egy $\mathbf{R}_+^k \setminus \{0\}$-n értelmezett Poisson pontfolyamathoz, melynek ν intenzitásmértékére

$$\nu(\left\{\underline{x}| \quad \|\underline{x}\| > r; \quad \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \in C\right\}) = \frac{U(C)}{r} \tag{56}$$

minden $C \subset \Omega$ Borel halmazra, és minden $r > 0$ -ra.

Ezen Poisson pontfolyamat $\{\underline{W}_i\}_{i=1}^{\infty}$ pontjaira (itt $\underline{W}_i = (W_i^{(1)}, ..., W_i^{(m)})$):

$$\sup_i W_i^{(1)}, ..., \sup_i W_i^{(m)}) \sim G \tag{57}$$

6.3. A függőség mértéke

Legyen az $\underline{X}$ max-stabilis vektor valószínűségi változó eloszlású függvénye G_m.

Bizonyos gyenge feltételek esetén minden, az $M_m = \{1, 2, ..., m\}$ nemüres A részhalmazára létezik Θ_A, hogy $1 \leq \Theta_A \leq |A|$, hogy

$$P(\max_{i \in A} X_i < z) = \exp(-\frac{\Theta_A}{z}) \tag{58}$$

Ezeket a Θ_A-kat extremális együtthatóknak nevezzük. Nyilván G_m meghatározza $\{\Theta_A| \quad A \in C_m\}$-et, ahol $C_m = 2^{M_m} \setminus \{\emptyset\}$, és $\Theta_{\{i\}} = 1 \quad i = 1, ..., m$

Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $\Theta_i = \Theta_{\{i\}}$ és $\Theta_{\{i,j\}} = \Theta_{\{i,i\}}$.

Legyen:

$$V(x_1, ..., x_m) = -\ln G_m(x_1, ..., x_m) = \int_\Omega \max_{i \in M_m} \frac{a_i}{x_i} U(d\underline{a}) \tag{59}$$

Könnyű látni, hogy ekkor:

$$\Theta_A = \int_\Omega \max_{i \in A} a_i U(d\underline{a}) \tag{60}$$

Nézzünk két konkrét példát!

6.3. Példa. *Aszimmetrikus logisztikus eloszlás (Tawn, 1990).*

$$V(x_1, ..., x_m) = \sum_{c \in C_m} \left\{ \sum_{i \in c} (\frac{\xi_{c,i}}{x_i})^{r_c} \right\}^{\frac{1}{r_c}} \tag{61}$$

ahol $r_c \geq 1$ *minden* $c \in C_m$*-re, és* $i = 1, ..., m$*-re* $\xi_{c,i} = 0$*, ha* $i \notin c$*,* $\xi_{c,i} \geq 0$*, ha* $i \in c$*, és* $\sum_{c \in C_m} \xi_{c,i} = 1$.

Ekkor minden $A \in C_m$-re:

$$\Theta_A = \sum_{c \in C_m} \left\{ \sum_{i \in c \cap A} \xi_{c,i}^{r_c} \right\}^{\frac{1}{r_c}} \tag{62}$$

Speciálisan, ha m=2, $\xi_{1,1} = \xi_{1,2} = 0$, és $\xi_{12,1} = \xi_{12,2} = 1$, akkor

$$V(y,z) = (y^{-\frac{1}{\alpha}} + z^{-\frac{1}{\alpha}})^\alpha \qquad (0 < \alpha = r_{12}^{-1} \leq 1) \tag{63}$$

$$\Theta_{12} = 2^\alpha \tag{64}$$

Ami $\alpha = \frac{1}{2}$-re épp a korábbi példánk.

6.4. Példa. *Legyen $\underline{Z}^{(j)} = (Z_1^{(j)}, ..., Z_m^{(j)}) \quad j \in \mathbf{N}$ független Gauss eloszlású vektor változók, $\underline{0}$ várható érték vektorral, és (ξ_{ik}) korrelációs mátrixszal. Legyen $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, ...$ f.a.e. vlószínűségi változók, melyek F_τ eloszlásfüggvényére: $1 - F_\tau \sim \frac{c}{x}$. Ha $c = \sqrt{2\pi}$, és $\underline{X}^{(j)} = \tau^{(j)} \underline{Z}^{(j)}$, akkor az $\underline{X}$ komponensenkénti maximum képzéséből adódó eloszlásra $\Theta_{ik} = 1 + \sqrt{\frac{1-\xi_{ik}}{2}}$ adódik.*

Tehát egy adott $\{\Theta_{ik} | \quad i,k = 1, ..., m\}$ halmazhoz létezik olyan max-stabilis eloszlás, melyeknek épp ezek a megfelelő extremális együtthatói, ha a mátrix, melynek (i,k)-adik eleme $1 - 2(\Theta_{ik} - 1)^2$, pozitív definit.

Felmerül a kérdés, hogy extremális együtthatók adott halmazához mikor létezik max-stabilis eloszlás, amelynek épp az adottak a megfelelő extremális együtthatói, illetve van-e unicitás. Ezek megválaszolásában segítenek az alábbi tételek.

6.4. Tétel. *Legyen $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ max-stabilis eloszlású $\{\Theta_A | \quad A \in C_m\}$ extremális együtthatókkal. Ekkorlétezik $2^m - 1$ db független 1 paraméterű Fréchet eloszlású valószínűségi változó $T_c \quad (c \in C_m)$, és $0 \leq \tau_c$ konstansok, ahol $\sum_{c:\ c \in i} \tau_c = 1 \quad i = 1, ..., m$; hogy az $U = (U_1, .., U_m)$ vektor valószínűségi változónak, ahol*

$$U_i = \max_{c:\ i \in c} \tau_c T_c \tag{65}$$

ugyanazok az extremális együtthatói, mint Y-nak. Továbbá:

$$\Theta_A = \sum_{\substack{c \cap A \neq \emptyset \\ c \in C_m}} \tau_c \qquad (A \in C_m) \tag{66}$$

valamint

$$\tau_c = \sum_{\substack{A \supseteq M_m \setminus \{c\} \\ A \in C_m}} (-1)^{|A \cap c| + 1} \Theta_A \qquad (A \in C_m) \tag{67}$$

A tétel segítségével elvileg adott $\{\Theta_A | \quad A \in C_m\}$ halmazról eldönthető, hogy létezik-e hozzá max-stabilis eloszlás (vagy más szóval, hogy a halmaz konzisztens-e), u.i. az kell, hogy $0 \leq \tau_c \quad (c \in C_m)$ teljesüljön, csakhogy ez $2^m - 1$ db szám, és mindegyiknél $2^m - 2$ db halmazt kell figyelembe venni, ez $O(2^{2m})$ lépés, ami a gyakorlati alkalmazhatóságot kis m-ekre korlátozza. A következő tétel egy szükséges, és egy elegendő feltételt fogalmaz meg $\{\Theta_{ik} | \quad i,k = 1, ..., m\}$ konzisztenciájáról:

6.5. Tétel.

$$\begin{array}{rl} \{1-2(\Theta_{ij}-1)^2\}_{i,j=1,\dots,m} \textit{ pozitív definit} & \Longrightarrow \\ \{\Theta_{ik}| \quad i,k=1,\dots,m\} \textit{ konzisztens} & \Longrightarrow \\ & \{2-\Theta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m} \textit{ pozitív szemidefinit} \end{array} \tag{68}$$

Bizonyítás: A tétel első részét egy korábbi példa bizonyítja, így elegendő a második rész belátnunk.

Az előző tétel értelmében léteznek τ_c-k, hogy

$$2-\Theta_{ij}=\Theta_i+\Theta_j+\Theta_{ij}=\sum_{\substack{c\supseteq\{i,j\}\\ c\in C_m}}\tau_c \qquad i,j=1,\dots,m \tag{69}$$

Legyen $J_c=\{(i,j)\in M_m\times M_m| \qquad i\neq j, \quad \{i,j\}\subseteq c\}$.

Ekkor tetszőleges $a_i\in\mathbf{C}$ számokra:

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i,j=1}^m a_i(\Theta_i+\Theta_j-\Theta_{ij})\overline{a_j} \\ = \; & (\textstyle\sum_{i=1}^m |a_i|^2\sum_{c\in C_m}\tau_c)+(\sum_{(i,j)\in J_{M_m}} a_i\overline{a_j}\sum_{\substack{c\supseteq[i,j]\\ c\in C_m}}\tau_c) \\ = \; & \textstyle\sum_{i=1}^m \tau_{\{i\}}|a_i|^2+\sum_{\substack{|c|\geq 2\\ c\in C_m}}\tau_c\sum_{i\in c}|a_i|^2+\sum_{\substack{|c|\geq 2\\ c\in C_m}}\tau_c\sum_{(i,j)\in J_c}a_i\overline{a_j} \\ = \; & \textstyle\sum_{i=1}^m \tau_{\{i\}}|a_i|^2+\sum_{\substack{|c|\geq 2\\ c\in C_m}}\tau_c\left|\sum_{i\in c}a_i\right|^2\geq 0 \end{aligned} \tag{70}$$

Nándori rész vége

7. A maximum vonzási tartománya

7.1. Definíció.

Maximum vonzási tartománya

Az X valószínűségi változó (avagy az $F(x)$ eloszlásfüggvény) a $H(x)$ extremális eloszlás vonzási tartományába esik, ha vannak alkalmas $a_n>0$ és b_n konstansok úgy, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}<x\right)=H(x). \tag{71}$$

Jelölés: $X\in MDA(H)$ vagy $F(x)\in MDA(H)$ (Maximum domain of attraction)

7.1. Tétel.

Az X valószínűségi változó (avagy az $F(x)$ eloszlásfüggvény) a $H(x)$ extremális eloszlás vonzási tartományába esik az alkalmas $a_n>0$ és b_n konstansokkal akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to+\infty}n\bar{F}(a_nx+b_n)=-\ln H(x) \quad x\in R. \tag{72}$$

7.1. Megjegyzés.

$H(x) = 0$ esetén a határérték végtelen.

Bizonyítás.

Vannak olyan eloszlások, amelyekre (72) nem teljesül, akár hogy is választjuk az a_n, és b_n konstansokat.

7.1. Lemma.

Legyen az F eloszlásfüggvényű valószínűségi változó jobb oldali végpontja $x_F \leq +\infty$ és $\tau \in (0; +\infty)$. Akkor és csak akkor van olyan u_n sorozat, amelyre $n\bar{F}(u_n) \to \tau$, ha

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1, \qquad F(x_F-) = 1$$

Bizonyítás.

7.1. Példa.

A Poisson eloszlás maximumának nincs határeloszlása
Ha X Poisson eloszlású, akkor

$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} = \frac{\bar{F}(k-1) - P(X=k)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - \frac{F(k) - F(k-1)}{\bar{F}(k-1)} =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^k}{k!}\left(\sum_{r=k}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}\right)^{-1} = 1 - \left(1 + \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)^{-1}$$

Ha k elég nagy $k > \lambda$, akkor

$$\sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{k!}{r!}\lambda^{r-k} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{(k+1)\cdots(k+s)} \leq \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^s = \frac{\frac{\lambda}{k}}{1 - \frac{\lambda}{k}} \to 0,$$

ha $k \to \infty$.

Tehát a (5.1) és (7.1) lemma alapján nincs olyan u_n sorozat, amelyre $P(M_n < u_n) \to e^{-\tau}$.

7.2. Példa.

Exponenciális eloszlásból származó minta maximumának eloszlása Gumbel típusú eloszláshoz tart.

$$P(M_n - \ln n < x) = F(x + \ln n)^n = (1 - exp\{-x - \ln n\})^n =$$
$$= (1 - n^{-1}e^{-x})^n \to exp\{-e^{-x}\} = \Lambda(x), \quad x \in R$$

7.3. Példa.

Cauchy eloszlásból származó minta maximumának eloszlása Fréchet típusú eloszláshoz tart. Ha X Cauchy eloszlású, akkor $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\bar{F}(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1+x^2)} = 1$$

Tehát $\bar{F}(x) \approx (\pi x)^{-1}$, ha $x \to +\infty$ és ezért $\bar{F}(nx/\pi) \approx (nx)^{-1}$, , ha $n \to +\infty$. Következés képpen

$$P\left(M_n < \frac{nx}{\pi}\right) = \left(1 - \bar{F}(\frac{nx}{\pi})\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}(\frac{1}{x} + o(1))\right)^n \to exp\{-x^{-1}\} = \Phi_1(x), \quad x > 0.$$

Ha $x \leq 0$, akkor $P\left(M_n < \frac{nx}{\pi}\right) =\leq F(0)^n \to 0$ Tehát F beletartozik a Fréchet eloszlás vonzási tartományába és a konstansok alkalmas választása: $a_n = \frac{n}{\pi}$, $b_n = 0$.
(Max vonzási tartományába eső farok becslése: szbszig.pdf)

8. Általános extrémérték-eloszlások (GEV)

8.1. Definíció.

Az általános extrémérték-eloszlásfüggvény:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} exp\{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\} & ha \quad \gamma \neq 0 \\ exp\{-exp(-x)\} & ha \quad \gamma = 0 \end{cases} \tag{73}$$

ahol $1 + \gamma x > 0$. Tehát az eloszlásfüggvény tartója

$$\begin{array}{ll} x > -\gamma^{-1} & ha \quad \gamma > 0 \\ x < -\gamma^{-1} & ha \quad \gamma < 0 \\ x \in R & ha \quad \gamma = 0 \end{array}. \tag{74}$$

8.1. Lemma.

GEV vonzási tartományának karakterizációja.
(i) $F \in MDA(H_\gamma)$ $\gamma > 0$ esetén akkor és csak akkor, ha $F \in MDA(\Phi_\alpha)$, $\quad \alpha = \frac{1}{\gamma} > 0$
(ii) $F \in MDA(H_0)$ akkor és csak akkor, ha $F \in MDA(\Lambda)$
(iii) $F \in MDA(H_\gamma)$ $\gamma < 0$ esetén akkor és csak akkor, ha $F \in MDA(\Psi_\alpha)$, $\quad \alpha = \frac{-1}{\gamma} > 0$
Bizonyítás

8.1. Fréchet és Weibull eloszlások maximum vonzási tartományának karakterizációja

Ehhez először kell a reguláris változású függvény fogalma. (vesd össze (4.5) tétellel)

8.2. Definíció.

A $h : (0; \infty) \mapsto (0; \infty)$ mérhető függvény reguláris változású a végtelenben $\rho \in R$ indexszel, ha $x > 0$ esetén

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\rho}.$$

8.3. Definíció.

Ha $\rho = 0$, akkor a h függvényt lassú változásúnak nevezzük.

8.1. Megjegyzés.

Ha a $h(x)$ függvény reguláris változású ρ indexszel, akkor a $\frac{h(x)}{x^{\rho}}$ lassú változású, ezért egy reguláris változású függvény mindig $h(x) = L(x)x^{\rho}$ alakba írható, ahol $L(x)$ egy lassú változású függvény.

8.2. Lemma.

Az $L(x)$ függvény lassú változású akkor és csak akkor, ha

$$L(x) = c(x) \exp\{\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt\}, \quad x > 0 \tag{75}$$

ahol $c(x)$ és $\epsilon(x) : (0; \infty) \to (0; \infty)$ valamint $\lim_{x \to \infty} c(x) = c$ és $\lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = 0$.

8.3. Lemma. *Egy reguláris változású függvény reprezentációja.*

Mivel $h(x)$ reguláris változású, ha $h(x) = L(x)x^{\rho}$, ezért

$$h(x) = x^{\rho} c(x) \exp\{\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt\} = c(x) \exp\{\rho \ln x\} \exp\{\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt\} = \tag{76}$$

$$= c(x) \exp\{\int_1^x \frac{\rho}{t} dt\} \exp\{\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt\} = c(x) \exp\{\int_1^x \frac{\rho + \epsilon(t)}{t} dt\}$$

Következés képpen: A $h(x)$ függvény reguláris változású akkor és csak akkor, ha

$$h(x) = c(x) \exp\{\int_1^x \frac{\rho(t)}{t} dt\}, \quad x > 0 \tag{77}$$

ahol $c(x)$ és $\rho(x) : (0; \infty) \to (0; \infty)$ valamint $\lim_{x \to \infty} c(x) = c$ és $\lim_{t \to \infty} \rho(t) = \rho$.

8.4. Definíció.

Egy nem negatív valószínűségi változó reguláris változású, ha az eloszlás függvényének a farka $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ reguláris változású.

8.1. Példa.

A Fréchet eloszlás farka reguláris változású, mert

$$\frac{\bar{F}(x)}{x^{-\alpha}} = x^{\alpha}\left(1 - \exp\{-x^{\alpha}\}\right) = x^{\alpha}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^{-\alpha})^k}{k!}\right) =$$

$$= 1 - x^{-\alpha}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-x^{-\alpha})^{k-2})}{k!} \to 1$$

Tehát

$$\frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(t)} \approx \frac{(tx)^{-\alpha}}{t^{-\alpha}} = x^{-\alpha}.$$

8.2. Megjegyzés.

Ha X nem negatív valószínűségi változó és reguláris változású $-\alpha$ indexszel, akkor $E[X^{\beta}] < \infty$, ha $\beta < \alpha$ és $E[X^{\beta}] = \infty$, ha $\beta > \alpha$.

8.1. Tétel.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény a Φ_{α} Fréchet eloszlás maximum vonzási tartományába esik akkor és csak akkor, ha reguláris változású $-\alpha$ indexszel. Ebben az esetben

$$\frac{M_n}{a_n} \to \Phi_{\alpha}$$

eloszlásban, ahol
$a_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Itt $F^{\leftarrow}$ az általánosított inverz, azaz
$F^{\leftarrow}(x) = \inf\{u \in R : F(u) \geq x\}$.

8.2. Tétel.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény a Ψ_{α} Weilbull eloszlás maximum vonzási tartományába esik akkor és csak akkor, ha $x_F < \infty$ és $\bar{F}(x_F - x^{-1})$ reguláris változású $-\alpha$ indexszel. Ebben az esetben

$$\frac{M_n - x_F}{a_n} \to \Psi_{\alpha}$$

eloszlásban, ahol
$a_n = x_F - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

8.2. Példa.

Ha X egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, akkor beletartozik a Ψ_1 maximum vonzási tartományába, ahol $x_F = 1, \quad a_n = \frac{1}{n}$, és ezért

$$P[n(M_n - 1) < x] = \Psi_1(x)$$

8.3. Példa.

Ha X Cauchy eloszlású, akkor

$$P\left(M_n < \frac{nx}{\pi}\right) = \Phi_1(x)$$

8.4. Példa.

Ha X exponenciális eloszlású, akkor

$$P(M_n - \ln n < x) = \Lambda(x)$$

Néhány dolog a Gumbel eloszlásról:

$$\Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\} \quad \lambda(x) = \exp(-x)\exp\{-\exp(-x)\} \tag{78}$$

Karakterisztikus függvénye:

$$\phi_\Lambda(t) = \Gamma(1 - i\beta t)\exp(i\alpha t) \tag{79}$$

Ha az eloszlásfüggvény: $\Lambda\left(\frac{x-b}{a}\right)$, akkor az első momentum:
$m = b + a\gamma$, ahol γ az Euler-Mascheroni integrál, azaz

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{a}\exp\{-\frac{x+b}{a}\}\exp\{-\exp\{-\frac{x+b}{a}\}\}dx \tag{80}$$

$$x = -b - a\ln u, \quad dx = -a\frac{du}{u}$$

helyettesítéssel

$$m = \int_{\infty}^{0}(b + a\ln u)\exp(-u)du = b + a\int_0^{\infty} -e^{-u}\ln u du = b + a\gamma \tag{81}$$

8.3. Megjegyzés.

$\gamma \approx 0,5772$
A szórás explicite meghatározható:
$\sigma = \frac{b\pi}{\sqrt{6}}$.
Medián $= b - a\ln\ln 2 \approx b + 0,3665 \cdot a$, és a módusz $= a$.

9. Az általánosított Pareto eloszlás

Láttuk (82), hogy a standard extrémérték-eloszlásokat össze lehet foglalni egy formulába:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\} & ha \quad \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\} & ha \quad \gamma = 0, \end{cases} \tag{82}$$

ahol $1 + \gamma x > 0$. Tehát az eloszlásfüggvény tartója

$$\begin{array}{lll} x > -\gamma^{-1} & ha & \gamma > 0 \\ x < -\gamma^{-1} & ha & \gamma < 0 \\ x \in R & ha & \gamma = 0. \end{array} \tag{83}$$

Hasonlóan definiáljuk az általánosított Pareto eloszlást.

9.1. Definíció.

Általánosított Pareto eloszlás:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\} & ha \quad \gamma \neq 0 \\ 1 - \{-exp(-x)\} & ha \quad \gamma = 0 \end{cases} \tag{84}$$

és $x \in D(\gamma)$, ahol

$$D(\gamma) = \begin{cases} 0 \leq x < \infty & ha \quad \gamma \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{1}{\gamma} & ha \quad \gamma < 0 \end{cases} \tag{85}$$

Ennek a várható értéke $\frac{1}{1-\gamma}$ ha $-\infty < x < 1$ és végtelen, ha $\gamma \geq 1$.

9.1. Tétel. *Az általánosított Pareto eloszlás maximum vonzási tartományának karakterizációja.*

Minden valós γ esetén az alábbi két állítás ekvivalens:

- (i) $F \in MDA(H_\gamma)$ azaz az F eloszlás az általánosított Pareto eloszlás maximum vonzási tartományába tartozik.
- (ii) Létezik pozitív mérhető $a(.)$ függvény úgy, hogy $x \in D(\gamma)$ esetén

$$\lim_{u \nearrow x_F} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = \bar{G}_\gamma(x)$$

9.1. Megjegyzés.

Ha $\gamma > 0$, akkor lehet $a(u) = \gamma u$.
Bizonyítás
A (9.1) tételből következik, hogy $F \in MDA(H_\gamma)$ akkor és csak akkor, ha van pozitív mérhető $a(.)$ függvény úgy, hogy

$$\lim_{u \nearrow x_F} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x | X > u\right) = \bar{G}_\gamma(x).$$

Ez azt jelenti, hogy elég magas küszöb túllépése jól közelíthető az általánosított Pareto eloszlással. Pontosabban:

9.2. Tétel.

Ha

$$G_{\gamma,\nu,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \gamma\frac{x-\nu}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

és

$$F_u(x) = P(X - u < x | X > u),$$

akkor

$$\lim_{u \nearrow x_F} \sup_{x \in (0; x_F - u)} |F_u(x) - G_{\gamma,0,\beta}(x)| = 0$$

Bizonyítás
Túllépés: Bán Andrea beszámolója

10. Rekordok

Móra Peti beszámolója használható lesz, azután paraméter becslés: Éliás Gergely, Ruppert László és Kovács Tamás
Legyen $X_1, X_2, \ldots X_n$ független, azonos eloszlású, nem elfajult valószínűségi változók sorozata közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. (Statisztikai minta.)

10.1. Definíció (Rekord).

Az X_j mintaelem rekord, ha nagyobb minden előző mintaelemnél.

10.2. Definíció (Rekordidő).

T_k az k-edik rekord ideje, ha

$$T_k = min\{j : X_j > X_{T_{k-1}}\}$$

és $T_0 = 1$ egy valószínűséggel. (azaz X_1 a 0-ik rekord.)
A k-edik rekord tehát $R_k = X_{T_k}$.

10.3. Definíció (Rekord növekedése).

$$J_k = R_k - R_{k-1}.$$

10.4. Definíció (Rekordok közötti időtartam).

$$\Delta T_k = T_k - T_{k-1}$$

Az első n kísérletben ($X_1, X_2, \ldots X_n$ között) bekövetkező rekordok számát jelölje N_n.
Ha X standard exponenciális eloszlású valószínűségi változó , azaz eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \leq 0 \\ 1 - \exp(-x) & ha \quad x > 0, \end{cases} \tag{86}$$

akkor az ebből származó mintában a rekordokat jelölje $R_k^\diamond$.

10.1. Tétel.

Az $R_k^\diamond$ valószínűségi változó Gamma eloszlású $(k+1, 1)$ paraméterekkel.

Bizonyítás ide jön
Ha X eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor $F(X)$ egyenletes eloszlású a [0;1] intervallumon. Ebből következik, hogy $H(X) = -\ln(1 - F(X))$ standard exponenciális eloszlású.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvényű X valószínűségi változó megfigyeléséből származó mintában az R_k k-ik rekord eloszlásban megegyezik $F^{-1}(1 - \exp(-R_k^\diamond))$ valószínűségi változóval.

Definíciók és jelölések.

Ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor az $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ függvényt túlélés függvénynek nevezzük (survival function, szokásos az $S(x)$ jelölés is.) . A $H(x) = -\ln(1 - F(x))$ függvény a kockázat függvény (hazard function).

10.5. Definíció.

Legyen $\Psi_F(u) = H^{-1}(u)$, azaz $\Psi_F(u) = F^{-1}(1 - e^{-u})$.

10.2. Tétel.

Ha $\Psi_F(u)$ olyan, hogy

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\Psi_F(s + x\sqrt{s}) - \Psi_F(s)}{\Psi_F(s + \sqrt{s}) - \Psi_F(s)} = x$$

minden $x \in R$ esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{R_n - \Psi_F(n)}{\Psi_F(n+\sqrt{n}) - \Psi_F(n)} < x\right) = \Phi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény.
Bizonyítás

10.1. Példa.

Legyen X Weibull eloszlású valószínűségi változó , azaz $\Psi_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, akkor $\Psi_F(u) = u^{\frac{1}{\alpha}}$ és a rekordok eloszlása normális.

10.2. Példa.

Legyen X logisztikus eloszlású valószínűségi változó , azaz $F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, akkor $\Psi_F(u) =??$ és a rekordok eloszlása normális.

10.3. Példa.

Legyen X Gumbel eloszlású valószínűségi változó , azaz $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$, akkor $\Psi_F(u) = ??$ és a rekordok eloszlása normális.

10.3. Tétel (Tata 1969).

Ha a $H(x) = \Psi_F^{-1}(x)$ hazard függvény konvex, kétszer differenciálható és $x \to \infty$ esetén

$$\frac{H(x)}{x} \nearrow \infty \qquad \frac{H(x)}{x^2} \searrow 0,$$

akkor léteznek a_n és $b_n > 0$ konstansok úgy, hogy

$$\frac{R_n - a_n}{b_n} \longrightarrow^d N(0,1).$$

Bizonyítás: ...

10.1. Rekordok vonzási tartománya

Ebben a paragrafusban az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez hozzárendeljük (asszociáljuk) az

$$F_a(x) = 1 - \exp\{-\sqrt{H(x)}\}$$

függvényt.

10.6. Definíció.

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény beletartozik a $G(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó *rekordok vonzási tartományába,* ha léteznek megfelelő a_n és $b_n > 0$ konstansok úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{R_n - a_n}{b_n} < x\right) = G(x)$$

mindenütt, ahol G(x) folytonos. **Jelölése:** $F(x) \in RDA[G(x)]$ (Record domain of attraction).

10.4. Tétel (Dualitás Tétel). *(Resnick 1973)*

Ha $F(x)$ egy folytonos eloszlásfüggvény, amelyhez $F_a(x)$ van asszociálva, akkor igazak a következő állítások:

- (i) $F(x) \in RDA[\Phi_a(x)]$ akkor és csak akkor, ha $F_\alpha(x) \in MDA\left[G_{1,\frac{\alpha}{2}}(x)\right]$ és ebben az esetben $a_n = 0, \quad b_n = \Psi_F(n)$ alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{R_n}{\Psi_F(n)} < x\right) = \Phi_\alpha(x) \tag{87}$$

  Itt $\Phi_\alpha(x)$ a lognormális eloszlásfüggvény, azaz

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \le 0 \\ \Phi(\log x^\alpha) & ha \quad x > 0, \end{cases}$$

  és $G_{1,\alpha}(x)$ Frechet eloszlású, azaz

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \le 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & ha \quad x > 0. \end{cases}$$

- (ii) $F(x) \in RDA[\tilde{\Phi}_a(x)]$ akkor és csak akkor, ha $F_\alpha(x) \in MDA\left[G_{2,\frac{\alpha}{2}}(x)\right]$ és ebben az esetben $F^{-1}(1)$ szükségszerűen véges,$a_n = F^{-1}(1), \quad b_n = F^{-1}(1) - \Psi_F(n)$ alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{R_n - F^{-1}(1)}{F^{-1}(1) - \Psi_F(n)} < x\right) = \tilde{\Phi}_\alpha(x). \tag{88}$$

Itt $\tilde{\Phi}_\alpha(x)$ a negatív-lognormális eloszlásfüggvény, azaz

$$\tilde{\Phi}_\alpha(x) = \begin{cases} \Phi(\log(-x^\alpha) & ha \quad x \leq 0 \\ 1 & ha \quad x > 0, \end{cases}$$

és $G_{2,\alpha}(x)$ Weibull eloszlású, azaz

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x^\alpha)) & ha \quad x \leq 0 \\ 1 & ha \quad x > 0, \end{cases}$$

továbbá $\alpha > 0$.

- (iii) $F(x) \in RDA[\Phi(x)]$ akkor és csak akkor, ha $F_\alpha(x) \in MDA\,[G_3(x)]$ és ebben az esetben $a_n = \Psi_F(n), \quad b_n = \Psi_F(n + \sqrt{n}) - \Psi_F(n)$ alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{R_n - \Psi_F(n)}{\Psi_F(n+\sqrt{n}) - \Psi_F(n)} < x\right) = \Phi(x). \tag{89}$$

Itt $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény, és $G_3(x)$ a Gumbel eloszlásfüggvény, azaz

$$G_3(x) = \exp(-e^{-x}).$$

Bizonyítás: ...

10.5. Tétel (ez is Resnick).

- (i) $F(x) \in RDA[\Phi_\alpha(x)]$ akkor és csak akkor, ha minden valós x-re

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Psi_F^{-1}(sx) - \Psi_F^{-1}(x)}{\sqrt{\Psi_F^{-1}(sx)}} = \alpha \log x$$

- (ii) $F(x) \in RDA[\tilde{\Phi}_\alpha(x)]$ akkor és csak akkor, ha minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\Psi_F^{-1}(x_0 - \epsilon x) - \Psi_F^{-1}(x_0 - \epsilon)}{\sqrt{\Psi_F^{-1}(x_0 - \epsilon)}} = -\alpha \log x,$$

ahol $x_0 = F^{-1}(1)$ véges.

- (iii) $F(x) \in RDA[\Phi(x)]$ akkor és csak akkor, ha minden valós x-re

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Psi_F(s + x\sqrt{s}) - \Psi_F(s)}{\Psi_F(s+\sqrt{s}) - \Psi_F(s)} = x.$$

Bizonyítás: ...

Irodalomjegyzék

[1] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.(1998) *Records,* Wiley Series in Probability and Statistics,

[2] Coles SG and Tawn JA (1991) *Modelling extreme multivariate events,* Journal of the Royal Statistical Society, 53, 377-392.

[3] Davison AC and Smith RL (1990) *Models for exceedances over high thresholds (with discussion),* Journal of the Royal Statistical Society, 52, 393-442.

[4] Embrechts, P., Klüppelberg C., Mikosch, T.(1997) *Modelling Extremal Events,* Springer

[5] Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* John Wiley & Sons

[6] Ferro C.A.T. and Segers J (2003) *Inference for clusters of extreme values,* Journal of the Royal Statistical Society B, 65, 545-556.

[7] Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C. (1928) *Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample,* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180-190.

[8] Gnedenko B.V. (1943) *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire,* Annals of Mathematics, 44, 423-453.

[9] Gnedenko B.V. és A.N. Kolmogorov(1951) *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai,* Akadémia Kiadó.

[10] de Haan, L. (1975) *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes* Matematisch Centrum, Amsterdam.

[11] de Haan, L. és Resnick, S.I. (1977) *Limit theory for multivariate sample extremes,* Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 40, 317-337.

[12] de Haan L (1985) *Extremes in higher dimensions,* Proceedings of the 45th Session of the International Statistics Institute, paper 26.3.

[13] Heffernan J and Tawn JA (2004) *A conditional approach for multivariate extreme values (with discussion),* Journal of the Royal Statistical Society B, ?, ?-?.

[14] Hsing T, Husler J and Leadbetter MR (1988) *On the exceedance point process for a stationary sequence,* Probability Theory and Related Fields, 78, 97-112.

[15] Jenkinson A.F. (1955) *The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements,* Quarterly Journal of the Royal Meteorological Scoiety, 87, 158-171.

[16] Joe H, Smith RL and Weissman I (1992) *Bivariate threshold methods for extremes,* Journal of the Royal Statistical Society B, 54, 171-183.

[17] Lampert, J.W. (1996) *Probability, (A Survey of the Mathematical Theory)* Wiley Series in Probability and Statistics

[18] Leadbetter, M.R. (1974) *On extreme values in stationary sequences,* Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 28, 289-303.

[19] Leadbetter, M.R. (1983) *Extremes and local dependence in stationary sequences.* Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 65, 291-306.

[20] Leadbetter MR (1991) *On a basis for 'Peaks over Threshold' modeling,* Statistics and Probability Letters, 12, 357-362.

[21] McNeil, A.J., Frey, R. and Emrechts, P. (2005) *Quantitative Risk Management,* Princeton Series in Finance

[22] Pickand, J. (1971) *The two-dimensional Poisson process and extremal processes.* Journal of Applied Probability, 8, 745-756.

[23] Pickand, J. (1975) *Statistical inference using extreme order statistics,* Annals of Statistics, 3, 119-131.

[24] Rényi A. (1968) *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó

[25] Resnick, Sidney, I. (1987) *Extreme Values, Reguler Variation, and Point Processes* Springer-Verlag

[26] M. Schlater, J. A. Tawn, *A dependence measure for multivariate and spatial extreme values: Properties and interference,* Biometrika(2003), 90, 1, pp. 139-156

[27] Smith RL, Tawn JA and Coles SG (1997) *Markov chain models for threshold exceedances,* Biometrika, 84, 249-268.

[28] Tawn JA (1988) Bivariate extreme value theory - models and estimation. Biometrika, 77, 245-253.