**Differenciálegyenletek**

Differenciálegyenletnek olyan egyenletet nevezünk, amelyben az ismeretlen egy függvény és az egyenlet tartalmazza az ismeretlen függvény (valahányad rendű) deriváltját.
Néhány példa:

(1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$

(2) $y'' + 5y' + 6y = e^x$

(3) $(y')^2 y - \sin x = 0$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + x\frac{\partial z}{\partial y}$

Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet
közönségesnek differenciálegyenletnek nevezzük. Pl.: (1), (2), (3) egyenlet.
Ha az ismeretlen függvény többváltozós, akkor a differenciálegyenletet
parciális differenciálegyenletnek nevezzük. Pl.: (4) egyenlet.
Differenciálegyenlet rendje: az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendje.

Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja:
$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, ahol *x* a független változó és *y* az *x* ismeretlen függvénye.

Pl.: Az (1) egyenlet egy közönséges elsőrendű differenciálegyenlet. Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek egy megoldása az $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 100$ függvény.
A differenciálegyenlet általános megoldása az összes megoldást tartalmazó halmaz. Ez az (1) egyenlet esetében az $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + c$ függvénysereg, ahol *c* egy tetszőleges konstans.
Egy differenciálegyenletet megoldása az általános megoldás meghatározását jelenti. Az alkalmazások többségénél azonban egy további feltételt kielégítő, úgynevezett partikuláris megoldást keresünk. Pl.: az (1) egyenlet esetén kérdezhetjük melyik az a megoldás, amelyiknél x=2 esetén y=15, vagy röviden: A megoldás függvények grafikonjai közül melyik megy át a (2, 15) koordinátájú ponton? A választ úgy kapjuk, hogy az általános megoldásból meghatározzuk a feltételt kielégítő *c* konstanst (jelen esetben c=3).

További elnevezések:
Az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletet az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel,
kezdeti érték problémának nevezik.

**Közönséges, elsőrendű, szeparálható (szétválasztható változójú) differenciálegyenlet**
Általános alakja. $y' = f(x)g(y)$

Megoldás: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

**Közönséges, elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet**
Általános alakja: $y' + p(x)y = q(x)$
Ha $q(x) = 0$, akkor homogén lineárisnak nevezzük.
Ha $q(x) \neq 0$, akkor inhomogén lineárisnak nevezzük.

Jelölje $y_{hom,ált}$ az $y' + p(x)y = 0$ homogén rész általános megoldását és $y_{inh,part}$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Az inhomogén egyenlet általános megoldása:
$y_{inh,ált} = y_{hom,ált} + y_{inh,part}$.
Az egyenlet megoldása két lépésből áll:
1. lépés a homogén rész $y_{hom,ált}$ általános megoldásának meghatározása.
2. lépés az $y_{hom,ált}$ ismeretében az inhomogén egyenlet $y_{inh,part}$ egy partikuláris megoldásának meghatározása.
1. lépés: Az $y' + p(x)y = 0$ homogén lineáris rész mindig szeparálható, ezért
$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$, ahonnan $\ln y = -\int p(x)dx + \ln c$, vagyis
$y_{hom,ált} = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$, ahol *c* egy tetszőleges konstans.

2. lépés: Keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_{inh,part} = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ alakban, ahol most *c*(*x*) egy ismeretlen függvény. Behelyettesítve az $y_{inh,part} = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ függvényt az eredeti $y' + p(x)y = q(x)$ differenciálegyenletbe a *c*(*x*) függvényre az alábbi feltételt kapjuk: $c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, ahonnan $c'(x) \cdot = q(x)e^{\int p(x)dx}$ és integrálással:
$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$. Tehát
$y_{inh,part} = (\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)(e^{-\int p(x)dx})$ és
$y_{inh,ált} = y_{hom,ált} + y_{inh,part}$