Kétváltozós függvények

Definíció: f: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ vagy z = f(x,y)
Szemléltetés: x,y,z koordinátarendszerben felülettel.
Pl. $z = x^2 + y^2$ forgási paraboloid
$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ félgömb
$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ forgási hiperboloid (két köpenyű)
$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ forgási hiperboloid (egy köpenyű)
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp
$z = f(u)$ görbe z-tengely körüli forgatásával keletkező felület: $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

Határérték:
Definíció (1): Az $f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban a határértéke A, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$ szám úgy, hogy $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ esetén $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Definíció (2): Az $f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban a határértéke A, ha minden $P_0(x_0, y_0)$ ponthoz konvergáló $P_n(x_n, y_n)$ pontsorozat esetén a $z_n = f(x_n, y_n)$ függvényérték sorozat A-hoz konvergál.

Jelölés. $\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y) = A$

Megjegyzés: A definíció (1)-ben $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ egyenlőtlenség helyett $0 < |x - x_0| + |y - y_0| < \delta$ vagy $0 < \max(|x - x_0|, |y - y_0|) < \delta$ egyenlőtlenség is írható.
Tétel: Definíció (1) és definíció (2) ekvivalens.

Példák:
(1) $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} =$ nem létezik, mert különböző irányból megközelítve az origót különböző határértékeket kapunk: Pl.: $y = mx$ egyenes fölött a függvény értéke
$\frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$
(2) $\lim_{(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} =$ nem létezik, annak ellenére, hogy bármely egyenes mentén megközelítve az origót a függvényértékek 0-hoz tartanak:
$\lim_{x \to 0} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} = 0$. Azonban $y = \sqrt{x}$ görbe fölött megközelítve az origót a határérték $\lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x})^2}{x^2 + (\sqrt{x})^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim_{(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$, mert tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$ szám úgy, hogy $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ esetén $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$. Ugyanis $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}$ mert $x^2+y^2-2|xy| \ge 0$.

Ezért $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|y| < \varepsilon$, ha $|y| \le \sqrt{x^2+y^2} < 2\varepsilon$.

Határértékre vonatkozó tételek. (ugyan úgy, mint egy változós fv. esetén)

Ha létezik $\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y)$ és $\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ valamint

létezik $\lim_{(x_0,y_0)} g(x,y)$ és $\lim_{(x_0,y_0)} g(x,y) = B$, akkor

a) létezik $\lim_{(x_0,y_0)} [f(x,y)+g(x,y)]$ és $\lim_{(x_0,y_0)} [f(x,y)+g(x,y)] = A+B$.

b) létezik $\lim_{(x_0,y_0)} [f(x,y)\cdot g(x,y)]$ és $\lim_{(x_0,y_0)} [f(x,y)\cdot g(x,y)] = A\cdot B$.

c) továbbá $B \neq 0$ esetén létezik $\lim_{(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ és $\lim_{(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$.

Definíció: Az $f(x,y)$ függvény folytonos az (x_0,y_0) pontban, ha

a) létezik $\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y)$

b) létezik $f(x_0,y_0)$ és

c) $\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Folytonosságra vonatkozó tételek:

Ha $f(x,y)$ és $g(x,y)$ folytonosak az (x_0,y_0) pontban, akkor az $f(x,y)+g(x,y)$, az $f(x,y)\cdot g(x,y)$ függvények is, valamint ha $g(x_0,y_0) \neq 0$, akkor az $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ függvény is folytonos az (x_0,y_0) pontban.

Definíció: A síkon egy P_0 pont δ sugarú környezete azon P pontok összessége, amelyeknek távolsága P_0-tól kisebb, mint δ.

Definíció: Egy P pontot a H halmaz belső pontjának nevezünk, ha a P pontnak van olyan környezete, amelynek minden pontja a H halmazhoz tartozik.

Definíció: Egy P pontot a H halmaz külső pontjának nevezünk, ha a P pontnak van olyan környezete, amelynek egyetlen pontja sem tartozik a H halmazhoz.

Definíció: Egy P pontot a H halmaz határpontjának nevezünk, ha nem belső pont és nem külső pont.

Definíció: Egy P pontot a H halmaz torlódási pontjának nevezünk, ha a P pont tetszőleges környezetének van a H halmazhoz tartozó pontja.

Definíció: Egy ponthalmaz nem összefüggő, ha felosztható két olyan diszjunkt részre, hogy egyik sem tartalmazza a másiknak torlódási pontját. Ellenkező esetben összefüggő.

Egy összefüggő ponthalmazt tartománynak is nevezünk.

Definíció: Egy tartomány zárt, ha tartalmazza minden határpontját.
Definíció: Egy tartomány nyílt, ha minden pontja belső pont.

Tétel: Ha az $f(x,y)$ függvény folytonos egy zárt *T* tartomány minden pontjában, akkor a függvény korlátos is ezen a tartományon.
Tétel: Ha az $f(x,y)$ függvény folytonos egy zárt *T* tartomány minden pontjában, akkor a függvény felveszi a legnagyobb és legkisebb értékét is ezen a tartományon.

Differenciálszámítás:
Parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Iránymenti derivált: $\underline{v}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ vektor irányában

$$f_\alpha'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cos\alpha, y+h\sin\alpha) - f(x,y)}{h}$$

Tétel: Ha az (x,y) pontban minden irányban van iránymenti derivált, akkor

$$f_\alpha'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cos\alpha, y+h\sin\alpha) - f(x,y)}{h} = f_x'(x,y)\cos\alpha + f_y'(x,y)\sin\alpha$$

Speciálisan, ha $\alpha = 0$, akkor az iránymenti derivált megegyezik az *x* szerinti parciális deriválttal. Ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor az iránymenti derivált megegyezik az *y* szerinti parciális deriválttal.
Az *x* és *y* szerinti parciális deriváltak létezése nem biztosítja az iránymenti deriváltak létezését:

Pl. az $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ha \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ha \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ függvény parciális deriváltjai az origóban léteznek, de semmilyen más irányban nincs iránymenti deriváltja.
Megjegyzés: A fenti függvény parciális deriváltjai léteznek az origóban annak ellenére, hogy a függvény itt nem folytonos.

Tétel: Ha $f_{xy}''(x,y)$ és $f_{yx}''(x,y)$ létezik az *(a,b)* pont egy δ sugarú környezetében és az *(a,b)* pontban mindkettő folytonos, akkor $f_{xy}''(a,b) = f_{yx}''(a,b)$.

A $z = f(x,y)$ felület normálisa az $\underline{n}\left(f_x', f_y', -1\right)$ vektor.
A $z = f(x,y)$ felület érintősíkjának egyenlete az (x_0, y_0) pont fölött:
$f_x'(x_0,y_0)\left(x-x_0\right) + f_y'(x_0,y_0)\left(y-y_0\right) - \left(z - f(x_0,y_0)\right) = 0$.

Definíció: A $z = f(x,y)$ függvény gradiense a parciális deriváltakból, mint koordinátákból alkotott vektor: $grad\ f(x,y) = \left(f_x'(x,y), f_y'(x,y) \right)$.

A gradiens legfontosabb tulajdonságai:
(1) Minden pontban a gradiens merőleges a ponton áthaladó szintvonalra.
(2) A gradiens a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat.

Kétváltozós (differenciálható) függvény szélsőértéke:
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 0 \\ f_y'(x,y) = 0 \end{cases}$$

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele:

Ha $\begin{cases} f_x'(x_0,y_0) = 0 \\ f_y'(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$ és $f_{xx}''(x_0,y_0) \cdot f_{yy}''(x_0,y_0) - \left[f_{xy}''(x_0,y_0) \right]^2 > 0$, akkor az $f(x,y)$ függvénynek szélsőértéke van az (x_0,y_0) pontban. Mégpedig $f_{xx}''(x_0,y_0) > 0$ esetén minimuma van, $f_{xx}''(x_0,y_0) < 0$ esetén maximuma van a függvénynek.

Ha $\begin{cases} f_x'(x_0,y_0) = 0 \\ f_y'(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$ és $f_{xx}''(x_0,y_0) \cdot f_{yy}''(x_0,y_0) - \left[f_{xy}''(x_0,y_0) \right]^2 < 0$, akkor nincs szélsőérték. Ekkor nyeregpontja van a felületnek.

Példa olyan felületre, amelyet bármely z-tengelyre illeszkedő síkkal elmetszve a metszetgörbének minimuma van az origóban, de a felületnek nincs minimuma:
$z = \left(y - x^2 \right)\left(y - 2x^2 \right) = 2x^4 - 3x^2 y + y^2$.

Feltételes szélsőérték:
Keressük $z = f(x,y)$ szélsőértékét $g(x,y) = 0$ feltétel mellett.
Vizsgáljuk meg az $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$ szélsőértékét!

Kettősintegrál
Legyen *T* egy téglalap alakú tartomány a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalakkal: $T = \left\{ (x,y) | a \le x \le b,\ c \le y \le d \right\}$

Definíció: $\iint\limits_T f(x,y)dT$

Legyen $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum és $c = y_0, y_1, \ldots, y_m = d$ a $[c,d]$ intervallum egy felosztása.

A $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j$ összeget integrál közelítő összegnek nevezzük, ahol

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, és ahol $x_{i-1} \le \bar{x}_i \le x_i$, $y_{j-1} \le \bar{y}_j \le y_j$.

Legyen $m_{ij} = \inf f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ *ha* $x_{i-1} \le \bar{x}_i \le x_i$, $y_{j-1} \le \bar{y}_j \le y_j$.

Az $s_{n,m} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ összeget az integrál alsó közelítő összegének nevezzük.

Legyen $M_{ij} = \sup f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ *ha* $x_{i-1} \le \bar{x}_i \le x_i$, $y_{j-1} \le \bar{y}_j \le y_j$.

Az $S_{n,m} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ összeget az integrál felső közelítő összegének nevezzük.

Világos, hogy $s_{n,m} \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j \le S_{n,m}$.

Ugyan úgy, ahogy egyváltozós esetben, most is belátható, hogy új osztópontok felvételével az
alsó közelítő összeg monoton nő (nem csökken),
a felső közelítő összeg monoton csökken (nem nő),
valamint tetszőleges felosztások esetén
bármely alsó közelítő összeg kisebb vagy egyenlő, mint egy felső közelítő összeg.
Következmény: $\sup s_{n,m} \le \inf S_{n,m}$.

Ha $\sup s_{n,m} < \inf S_{n,m}$, akkor az $f(x,y)$ függvény nem integrálható a *T* téglalap fölött.

Ha $\sup s_{n,m} = \inf S_{n,m} = I$, akkor az $f(x,y)$ függvény integrálható a *T* téglalap fölött és $\iint_T f(x,y)dT = I$.

Kettősintegrál kiszámítása kétszeres integrálással

$$\iint_T f(x,y)dT = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Integrálás normál tartományon

Ha $T = \{(x,y) | a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, akkor

$$\iint_T f(x,y)dT = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Ha pedig $T = \{(x,y) |\ h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d\}$, akkor

$$\iint_T f(x,y)dT = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Integrálás helyettesítéssel

Ha az $\begin{cases} x = \xi(u,v) \\ y = \eta(u,v) \end{cases}$ leképezés a Θ tartományt a *T* tartományba képezi, akkor

$$\iint_T f(x,y)dT = \iint_\Theta f\left(\xi(u,v),\eta(u,v)\right)\left|\begin{matrix} \xi_u(u,v) & \xi_v(u,v) \\ \eta_u(u,v) & \eta_v(u,v) \end{matrix}\right| d\Theta$$

$J = \left|\begin{matrix} \xi_u(u,v) & \xi_v(u,v) \\ \eta_u(u,v) & \eta_v(u,v) \end{matrix}\right|$ az úgynevezett Jacobi determináns.

Speciális eset: Áttérés polár koordinátákra

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, ekkor a Jacobi determináns: $J = \left|\begin{matrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{matrix}\right| = \rho$.

Néhány alkalmazás:
Térfogat számítás
Tömegközéppont
Másodrendű (inercia) nyomaték