Matemaika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

10. elődás:
Egyoldali derivált, Érintőegyenes egyenlete, Láncszabály, Inverz függvény deriválása.

Egyoldali deriváltak

Jobb oldali derivált x_0-ban: $\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

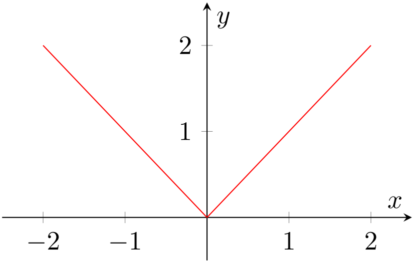
Bal oldali derivált x_0-ban: $\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h}$.

Példa: $f(x) = |x|$.

Differenciahányadosa $x_0 = 0$-ban:

$$\frac{f(0 \pm h) - f(0)}{\pm h} = \frac{|0 \pm h| - |0|}{\pm h} = \frac{|h|}{\pm h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h > 0 \\ -1, & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

$h = 0$-ban nincs határértéke, de van jobb és bal oldali határérték:



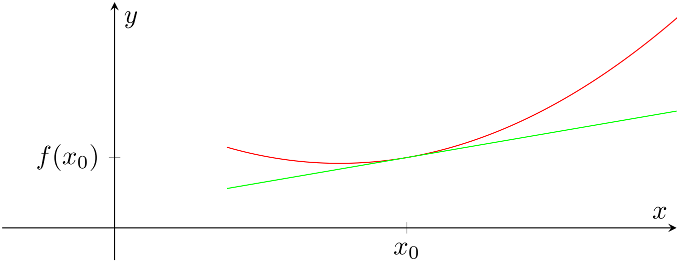
Deriválás lineáris átfogalmazása

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f$) függvény az x_0 pontban differenciálható, és deriváltja x_0-ban M, ha létezik egy $\varepsilon(x)$ függvény, melyre $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ és

$$f(x) = f(x_0) + M \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0).$$

Tehát a függvény:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{érintő: legjobban simuló egyenes}} + \underbrace{\varepsilon(x)\cdot(x-x_0)}_{\text{hibatag}}.$$



Érintő

Az f függvény grafikonjának érintője az x_0 pontban az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő, $f'(x_0)$ meredekségű egyenes, azaz

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Példa:

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény érintőjét az $x_0 = 1$ pontban.

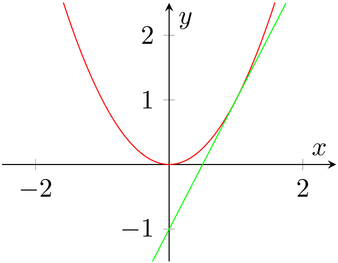
$f'(x) = 2x$, így $f'(1) = 2$.

Másrészt $f(1) = 1$, így

$$y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$

Lineáris átfogalmazásban:

$$x^2 = \underbrace{2x_0(x - x_0)}_{M\cdot(x-x_0)} + \underbrace{(x - x_0)}_{\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x)=0} (x-x_0)+x_0^2.$$



Példa

Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

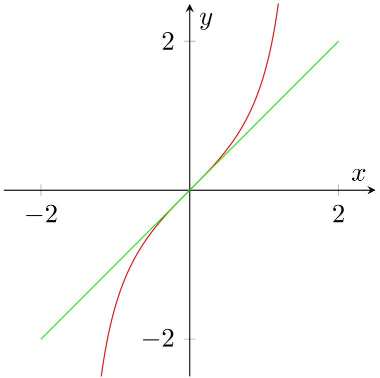
$f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$, így $f'(0) = 1$.

Másrészt $f(0) = 0$, így

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 0 + 1(x - 0) \quad \text{azaz}$$

$$y = x.$$



Tétel: Ha egy függvény egy x_0 pontban differenciálható, akkor az x_0 pontban folytonos a függvény.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} M(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x)(x-x_0) + f(x_0) = 0+0+f(x_0).$$

Visszafelé nem igaz, pl. az abszolútérték függvény a 0-ban folytonos, de ott nem differenciálható.

Inverz függvény deriválása

Tétel: Ha az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az $x \in D_f$ pont környezetében szigorúan monoton és $f'(x) \neq 0$ (diffható azaz folytonos is), akkor f^{-1} (létezik és) differenciálható $y = f(x)$-ben, és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Példák:

- $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ monoton növő és deriválható, az $f^{-1}(y) = \ln y$

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

- $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ monoton és folytonos, $f^{-1}(y) = \arcsin y$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

mivel $\cos x \geq 0$.

Hasonlóan $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ és $(x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Összetett függvények deriválása (láncszabály)

Tétel: Ha a g függvény differenciálható az x helyen, és az f függvény differenciálható a $g(x)$ helyen, akkor az $f \circ g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példák:

$$(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\mathrm{tg} x$$

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

Hiperbolikus függvények deriváltjai:

$$(\mathrm{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh} x$$

$$(\mathrm{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch} x$$

Logaritmikus derivált

Az a^x deriváltja ($a > 0$):

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a^x)}\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Példa:

$$\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \ln x}\right)' = e^{\sin x \ln x} \left(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}\right).$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))'$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

$$\left((x+2)^2\right)'$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)'$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)' = 3^{2-x}\ln 3\cdot(-1) = -3^{2-x}\ln 3$$
$$(3^x)' = 3^x\ln 3$$