10. Gyakorlat
Határozatlan integrálok (primitív függvények).

F1. (Primitív fgv. keresése) Keressük meg azt az f függvényt, amelyre

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(4) = 1,$

(b) $f''(x) = 3e^x + 5\sin x, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 2,$

(c) $f''(x) = \cos(3x)$ és $f(0) = 1$ és $f'(0) = 6$, **(hf)**

(d) $f'(x) = 5xe^{5x^2}$ és $f(0) = 1$. **(hf)**

Megoldás [F1(a)]. Ha $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, akkor $\sqrt{x}$ függvény deriválásából $(\sqrt{x}+c)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ látjuk, hogy a primitív függvény $f(x) = \sqrt{x} + c$. Ekkor $f(4) = \sqrt{4} + c = 1$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c = -1$, tehát $f(x) = \sqrt{x} - 1$ a megoldás.

Megoldás [F1(b)]. Ha $f''(x) = 3e^x + 5\sin x$, akkor a $f'(x) = 3e^x - 5\cos(x) + c_1$ primitív függvények közül választjuk, mivel $(3e^x - 5\cos(x))' = 3e^x + 5\sin x$. Ekkor $f'(0) = 3e^0 - 5\cos(0) + c_1 = 3 - 5 + c_1 = 2$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c_1 = 4$, tehát $f'(x) = 3e^x - 5\cos(x) + 4$. Ekkor, mivel $(3e^x - 5\sin(x) + 4x)' = 3e^x - 5\cos(x) + 4$, ezért $f(x) = 3e^x - 5\sin(x) + 4x + c_2$ primitív függvények közül $f(0) = 3e^0 - 5\sin(0) + 4\cdot 0 + c_2 = 3 - 0 + 0 + c_2 = 1$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c_2 = -2$, tehát $f(x) = 3e^x - 5\sin(x) + 4x - 2$ a megoldás.

Megoldás [F1(c)]. Ha $f''(x) = \cos(3x)$, akkor $f'(x) = \dfrac{\sin(3x)}{3} + c_1$ primitív függvények közül kell választanunk, mivel $\left(\dfrac{\sin(3x)}{3}\right)' = \cos(3x)$. Ekkor $f'(0) = \dfrac{\sin(3\cdot 0)}{3} + c_1 = 0 + c_1 = 6$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c_1 = 6$, tehát $f'(x) = \dfrac{\sin(3x)}{3} + 6$. Ekkor $f(x) = \dfrac{-\cos(3x)}{9} + 6x + c_2$ primitív függvények közül választva, az $f(0) = \dfrac{-\cos(3\cdot 0)}{9} + 6\cdot 0 + c_2 = -\dfrac{1}{9} + 0 + c_2 = 1$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c_2 = \dfrac{10}{9}$, tehát $f(x) = \dfrac{-\cos(3x)}{9} + 6x + \dfrac{10}{9}$ a megoldás.

Megoldás [F1(d)]. Ha $f'(x) = 5xe^{5x^2}$, akkor $f(x) = \dfrac{e^{5x^2}}{2} + c$ primitív függvények közül az $f(0) = \dfrac{e^{5\cdot 0^2}}{2} + c = \dfrac{1}{2} + c = 1$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c = \dfrac{1}{2}$, tehát $f(x) = \dfrac{e^{5x^2}+1}{2}$ a megoldás.

F2. (Primitív fgv.) Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x,$

(b) $\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$, **(hf)**

(c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, **(hf)**

(e) $\int (x+4)^3\,\mathrm{d}x$. **(hf)**

Megoldás [F2(a)]. $\int x^2+2x-3\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+x^2-3x+c$,

Megoldás [F2(b)]. $\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+c$,

Megoldás [F2(c)]. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt[8]{x^7}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+c$,

Megoldás [F2(d)].

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}+c,$$

Megoldás [F1(e)]. $\int (x+4)^3\,\mathrm{d}x = \int x^3+12x^2+48x+64\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+4x^3+24x^2+64x+c$.

F3. (Egyszerű helyettesítés) Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\int \mathrm{sh}(5x-3)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \frac{1}{(3x-6)^5}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int x^3(4x^4+6)^{2021}\,\mathrm{d}x$. **(hf)**

Megoldás [F3(a)]. $\int \mathrm{sh}(5x-3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{ch}(5x-3)+c$,

Megoldás [F3(b)]. $\int \frac{1}{(3x-6)^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(3x-6)^{-4}}{-4}+c = \frac{-1}{12(3x-6)^4}+c$,

Megoldás [F3(c)]. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{e^{3x}+5}\cdot 3e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}+5\right|+c$,

Megoldás [F3(d)]. $\int x^3(4x^4+6)^{2021}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\frac{(4x^4+6)^{2022}}{2022}+c$.

F4. (Parciális integrálás) A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int x \ln(x) \, \mathrm{d}x$, **(hf)**

(d) $\int \arcsin(3x) \, \mathrm{d}x$.

Megoldás [F4(a)]. $\int xe^{3x} \, \mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} \, \mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c,$

Megoldás [F4(b)].

$$\int x^2 \cos(5x) \, \mathrm{d}x = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x \cdot \frac{\sin(5x)}{5} \, \mathrm{d}x = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} + 2x\frac{\cos(5x)}{25} + 2 \int \frac{\cos(5x)}{25} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x^2 \frac{\sin(5x)}{5} + 2x\frac{\cos(5x)}{25} - 2\frac{\sin(5x)}{125} + c,$$

Megoldás [F4(c)]. $\int x \ln(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c,$

Megoldás [F4(d)]. $\int \arcsin(3x) \, \mathrm{d}x = x \arcsin(3x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} \, \mathrm{d}x = x \arcsin(3x) + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + c.$