11. Gyakorlat
Teljes helyettesítés, parciális törtek és határozott integrálok

F1. (Helyettesítés.) Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$(a)\ \displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x,$

$(b)\ \displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x,$

$(c)\ \displaystyle\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás [F1(a)]. Válasszuk $t=\sqrt[3]{x}$ helyettesítést, ekkor $x=t^3$, így $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$.

A változó cseréjével $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=\int e^t\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t$

A parciális integrálás technikáját kétszer alkalmazva az integrálon

$$\int e^t\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t=e^t\cdot 3t^2-\int e^t\cdot 6t\,\mathrm{d}t=e^t\cdot 3t^2-e^t\cdot 6t+\int e^t\cdot 6\,\mathrm{d}t=e^t\cdot 3t^2-e^t\cdot 6t+e^t+c=e^t(3t^2-6t+6)+c$$

A változót visszacserélve: $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=e^{\sqrt[3]{x}}(3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6)+c.$

Megoldás [F1(b)]. Válasszuk $t=e^x$ helyettesítést, ekkor $x=\ln(t)$, így $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$.

A változó cseréjével $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\operatorname{arctg}(t)+c=\operatorname{arctg}(e^x)+c.$

Megoldás [F1(c)]. Válasszuk $t=\sqrt{5+x}$ helyettesítést, ekkor $x=t^2-5$, így $\dfrac{dx}{dt}=2t$.

A változó cseréjével $\displaystyle\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x=\int(t^2-5)t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int 2t^4-10t^2\,\mathrm{d}t=2\frac{t^5}{5}-10\frac{t^3}{3}+c=$

$$=\frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}+c.$$

F2. (Parc.törtek.) Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$(a)\ \displaystyle\int\frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x,$

$(b)\ \displaystyle\int\frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x,$

$(c)\ \displaystyle\int\frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás [F2(a)]. $\displaystyle\int\frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(x+4)(x-3)+10}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int x+4\,\mathrm{d}x+\int\frac{10}{x-3}\,\mathrm{d}x=$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+10\ln|x-3|+c.$$

Megoldás [F2(b)].

$$\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5\right| + \frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{2}{5}x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+5| + \sqrt{\frac{2}{5}}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5\right| + \sqrt{\frac{2}{5}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + c.$$

Megoldás [F2(c)]. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(x-3)(x+3)}\,\mathrm{d}x$

Parciális törtekre bontva: $\displaystyle\frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-3B}{(x-3)(x+3)}.$

Tehát $A+B=0,\quad 3A-3B=2 \to A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3}$

$$\int \frac{2}{(x-3)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\ln|x+3| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c.$$

F3. (Határozott integrál.) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x,$

(d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x,$

(e) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás [F3(a)].

$$\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{15}\sqrt{(5x+4)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{15}\left(\sqrt{9}^3 - \sqrt{4}^3\right) = \frac{2\,(27-8)}{15} = \frac{38}{15}.$$

Megoldás [F3(b)]. $\displaystyle\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^3 = \left[\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}\right]_1^3 =$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{(1+27)^4} - \sqrt[3]{(1+1)^4}\right) = \frac{28^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}}{4}.$$

Megoldás [F3(c)]. $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c$, ezért

$$\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\Big[(5x-2)\ln(5x-2)-(5x-2)\Big]_1^4 = \frac{1}{5}\left(18\ln(18)-18-3\ln(3)+3\right) =$$

$$= \frac{18\ln(18)-3\ln(3)-15}{5}.$$

Megoldás [F3(d)]. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(\ln(x))\Big]_1^e = -\cos(1)+\cos(0) = 1-\cos(1).$

Megoldás [F3(e)]. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\,\mathrm{d}x$

$x = Ax-2A+Bx-B \to A+B=1,\ -2A-B=0 \to A=-1,\ B=2,$

$$\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|x-1|+2\ln|x-2|\Big]_3^4 = \left[\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right|\right]_3^4 =$$

$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{8}{3}\right).$$