Matemaika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

12. elődás:
Konvex, konkáv ívek,
Inflexiós pontok,
Aszimptotikus vizsgálat.

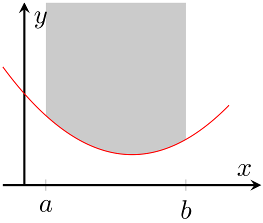
Konvexitás

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz konvex, ha bármely $P, Q \in K$ pontra a PQ szakasz teljes egészében benne van a K-ban.

Definíció(1): Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon **konvex**, ha a grafikonja feletti tartomány

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$

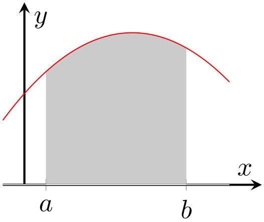
mint ponthalmaz konvex.



Definíció(1): Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon **konkáv**, ha a grafikonja alatti tartomány:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$

mint ponthalmaz konvex.



Ekvivalens definíciók függvény konvexitására

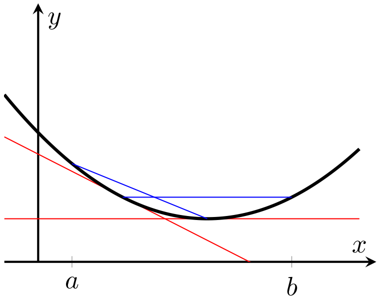
Definíció(2,3): Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha

- minden $x_1, x_2 \in [a, b]$-re az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$ minden $\lambda \in [0, 1]$-re.
- a függvénygrafikon az érintő felett halad minden $x_0 \in [a, b]$-re, azaz $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ minden $x, x_0 \in [a, b]$ esetén.

Tétel (konvexitás vizsgálata 1): Ha az érintő meredeksége ($f'(x)$) növekvő az $[a, b]$ intervallumon, azaz

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b],$$

akkor a függvény az intervallumon **konvex**.



Ekvivalens definíciók függvény konkávitására

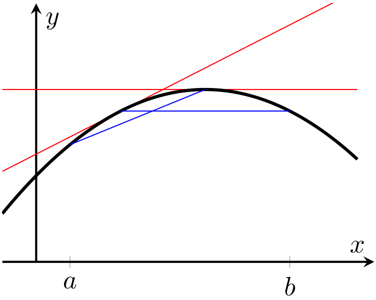
Definíció(2,3): Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha

- minden $x_1, x_2 \in [a, b]$-re az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$ minden $\lambda \in [0, 1]$-re.
- a függvénygrafikon az érintő alatt halad minden $x_0 \in [a, b]$-re, azaz $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ minden $x, x_0 \in [a, b]$ esetén.

Tétel (konvexitás vizsgálata 2): Ha az érintő meredeksége ($f'(x)$) csökkenő az $[a, b]$ intervallumon, azaz

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b],$$

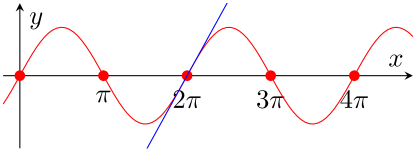
akkor a függvény az intervallumon **konkáv**.



Inflexiós pont

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D_f$ pontja inflexiós pont, ha a függvény x_0-ban konvexitást vált, azaz előtte, az $(x_0 - \delta, x_0)$-on konkáv, utána, az $(x_0, x_0 + \delta)$-on konvex vagy fordítva.

Példa: A $\sin x$-nek a π egész számú többszöröseiben van inflexiós pontja.



Megjegyzés: Ha a függvény differenciálható, akkor az inflexiós pontban az érintő meredeksége növekvőből csökkenőbe (vagy fordítva) megy át. Ez csak úgy lehetséges, ha az inflexiós pontban az érintő egyenese átmetszi a függvénygrafikont.

Inflexió létezésének feltételei

Tétel (inflexió szükséges feltétele): Ha az x_0 inflexiós pont, és létezik a függvény második deriváltja, akkor

$$f''(x_0) = 0.$$

Megjegyzés: Ez visszafelé nem feltétlenül igaz, ha $f(x) = x^4$, akkor $f''(x) = 12x^2$ így $f''(0) = 0$, de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).

Ha $f''(x_0) = 0$ és a függvény
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f''(x) > 0$ (f' szig. mon. nő azaz f konvex) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f''(x) < 0$ (f' szig. mon. csökken azaz f konkáv),
vagy
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f''(x) < 0$ (f' szig. mon. csökken azaz f konkáv) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f''(x) > 0$ (f' szig. mon. nő azaz f konvex),
akkor x_0-ban inflexiós pont van.

Elégséges feltétel a inflexió létezésére:
$f''(x_0) = 0$ és a második függvényderivált előjelet vált.

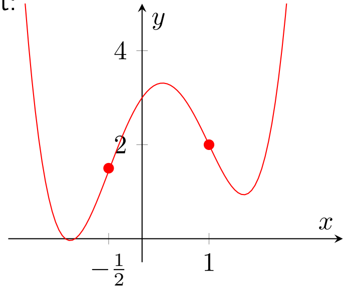
Egy példa

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Egy példa

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:



$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

A második derivált nullhelyei:

$$f''(x) = 0$$
$$12x^2 - 6x - 6 = 0$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2}.$$

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex

Elégséges feltétel inflexió létezésére

Ha az f függvény háromszor differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, és

$f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0-ban **inflexió** van.
$f'''(x_0) > 0$, akkor x_0-ban a függvény konkávból vált konvexbe.
$f'''(x_0) < 0$, akkor x_0-ban a függvény konvexből vált konkávba.

Megjegyzés: visszafelé ez nem igaz, mert $f(x) = x^5$ függvénynek $x_0 = 0$-ban inflexiója van, de

$f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, így $f'''(0) = 0$.

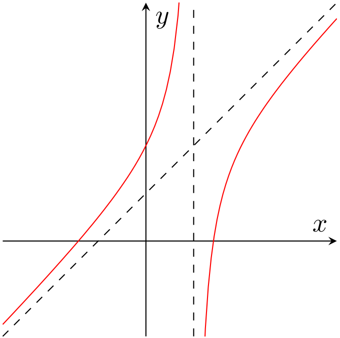
Előző példában: $f'''(x) = 24x - 6$, $f'''(-1/2) = -18$ (konvexből konkávba vált) és $f'''(1) = 18$ (konkávból konvexbe vált) inflexiós pontok.

Aszimptoták

Definíció: Az **aszimptota** olyan egyenes, melyet a függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít.

Az egyenes helyzetéből adódóan háromféle aszimptótát különböztetünk meg:

- függőleges aszimptota
- vízszintes aszimptota
- ferde aszimptota



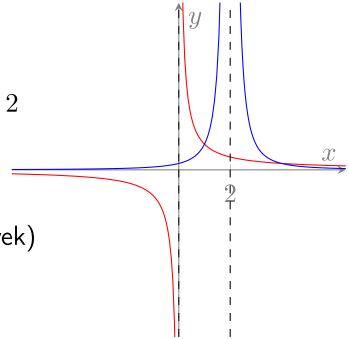
Függőleges aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **függőleges aszimptotája** van az x_0 pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$, esetleg csak az egyik oldali határérték.
Ekkor az $x = x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

Példák:

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 0$.

Az $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 2$.



Megjegyzés: A pólusokban (szakadási helyek) is ilyen aszimptóták vannak.

Vízszintes aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **vízszintes aszimptotája** van, ha $\pm\infty$-ben a határértéke egy véges szám.
Ha $\lim\limits_{x\to(-)\infty} f(x) = a$, akkor az $y = a$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptota.

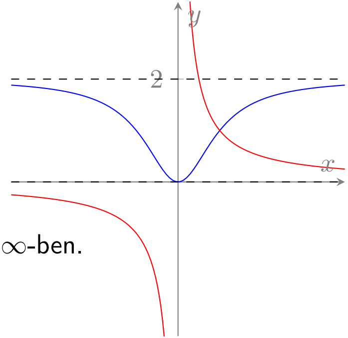
Példa:

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek a végteleneben vízszintes aszimptotája van.
Egyenlete: $y = 0$.

Az $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ függvényre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az $y = 2$ a vízszintes aszimptotája a $+\infty$-ben.
A $-\infty$-ben hasonlóan ugyanez az egyenes.



Ferde aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **ferde aszimptotája** van, ha a függvénygrafikon az $y = ax + b$ egyeneshez „simul” a végtelenben.

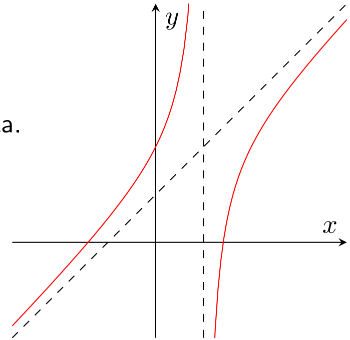
Az a és a b együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

A $-\infty$-ben hasonlóan számítható.

Ha valamelyik határérték nem létezik
vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.



Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-1}$ függvény ferde aszimptotája

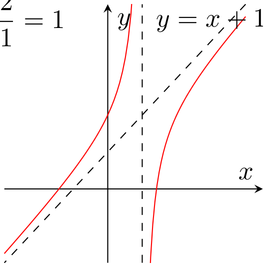
Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$ függvény ferde aszimptotája

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x^2}{1-1/x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2}{x-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$$



Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = x + 1$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.