

## 12. Gyakorlat

### Integrálszámítás alkalmazásai

**F1. (Területszámítás)** Határozzuk meg az  $f(x) = x^2$  és a  $g(x) = \sqrt{x}$  függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

**Megoldás [F1].** Metszéspontok  $f(x) = g(x)$  helyeken, azaz

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

Tehát a  $[0, 1]$  intervallumon kell integrálnunk, itt  $\sqrt{x} > x^2$ , tehát

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

**F2. (Területszámítás)** Határozzuk meg az  $y = -x^2 + 8x - 9$  és az  $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$  egyenletű görbék által közrezárt síkidomok területét.

**Megoldás [F2].** Metszéspontok

$$-x^2 + 8x - 9 = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$$

$$0 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$$

$$0 = x^2 - 8x + 12$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64^2 - 48}}{2} = 2, 6,$$

$$\begin{aligned} \int_2^6 -x^2 + 8x - 9 - \frac{x^2}{2} + 4x - 9 dx &= \left[ -\frac{3x^3}{6} + 12\frac{x^2}{2} - 18x \right]_2^6 = \left[ -\frac{x^3}{2} + 6x^2 - 18x \right]_2^6 = \\ &= -108 + 216 - 108 + 4 - 24 + 36 = 16. \end{aligned}$$

**F3. (hf)** Határozzuk meg az  $y = x^4$  és az  $y = 3x^2 - 2$  egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

**Megoldás [F3].** Metszéspontok

$$\begin{aligned}x^4 &= 3x^2 - 2 \\x^4 - 3x^2 + 2 &= 0 \\(x^2 - 1)(x^2 - 2) &= 0 \\x &= \pm 1, \pm \sqrt{2}.\end{aligned}$$

A  $[-\sqrt{2}, -1]$  és  $[1, \sqrt{2}]$  intervallumok feletti síkidomok egybevágóak, mert mindkét függvény páros, továbbá itt  $x^4 \leq 3x^2 - 2$

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{2}}^{-1} 3x^2 - 2 - x^4 \, dx &= \int_1^{\sqrt{2}} 3x^2 - 2 - x^4 \, dx = \left[ x^3 - 2x - \frac{x^5}{5} \right]_1^{\sqrt{2}} = \\&= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - \left( 1 - 2 - \frac{1}{5} \right) = -\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

A  $[-1, 1]$  intervallum feletti síkidom esetén  $x^4 \geq 3x^2 - 2$

$$\int_{-1}^1 x^4 - 3x^2 + 2 \, dx = \left[ \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5} - 1 + 2 - \left( -\frac{1}{5} + 1 - 2 \right) = \frac{12}{5}.$$

**F4. (Ívhossz.)** Számítsuk ki az  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  függvény grafikonjának az ívhosszát.

**Megoldás [F4].**  $(x\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ , így az ívhossz

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \frac{4}{9} \left[ \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} - 1).$$

**F5. (Ívhossz.)** Számítsuk ki az  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  függvény grafikonjának az ívhosszát.

**Megoldás [F5].**  $(\ln(1 - x^2))' = \frac{-2x}{1 - x^2}$ , így az ívhossz

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}} \, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1 - x^2)^2}} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \, dx = \\&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1 - x^2) + 2}{(1 - x^2)} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{2}{(1 - x^2)} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \, dx = \\&= \left[ -x - \ln|x - 1| + \ln|x + 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 0.\end{aligned}$$

**F6. (Térfogat.)** Határozzuk meg az  $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

**Megoldás [F6].**

$$\pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi \left[ \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

**F7. (Térfogat)** Határozzuk meg az  $f(x) = x^2 + 1$  ( $x \in [-1, 1]$ ) függvény megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.

**Megoldás [F7].** Térfogat:  $\pi \int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 x^4 + 2x^2 + 1 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$

**F8. (Felszín)** Határozzuk meg az  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x \in [0, 1]$ ) függvény megforgatásával keletkezett forgási paraboloid felszínét.

**Megoldás [F8].** A felszín, ha  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \left[ 2\frac{\sqrt{(x + 1/4)^3}}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

**F9. (hf)** Határozzuk meg az  $f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

**Megoldás [F8].** A térfogat

$$\pi \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} \right]_1^3 = \pi \left( 9 - 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{16}{3}\pi.$$