

Matematika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

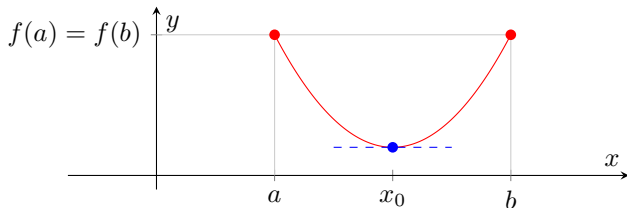
**13. előadás:
Középértéktételek,
L'Hospital-szabály.**

Rolle-tétel

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, az (a, b) -n differenciálható, és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $x_0 \in (a, b)$, hogy $f'(x_0) = 0$ (az érintő vízszintes).

Bizonyítás:

A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált ott nulla.

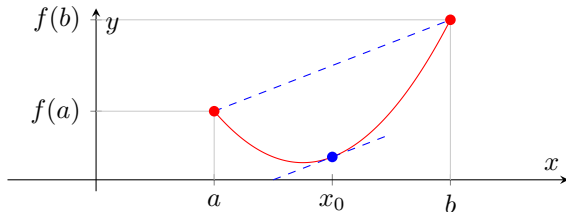


Lagrange-tétel

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, az (a, b) -n differenciálható, akkor van olyan $x_0 \in (a, b)$, hogy $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (létezik olyan érintő, mely a grafikondarab végpontjait összekötő szakasszal párhuzamos).

Bizonyítás: A Rolle-tételt alkalmazzuk az $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ függvényre, mivel $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) = F(a)$. Ekkor létezik $x_0 \in (a, b)$, hogy

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Cauchy-tétel

Tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $[a, b]$ intervallumon folytonosak, az (a, b) -n differenciálhatók és $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in (a, b)$ esetén, akkor van olyan $x \in (a, b)$, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás: A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$$

függvényre, mivel

$$F(b) - F(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0,$$

tehát $F(b) = F(a)$. Ekkor létezik $x_0 \in (a, b)$, hogy

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x) = 0 \iff \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Intervallumon definiált tulajdonságok

Ha adott egy **lokális függvénytulajdonság** f -re, mely egy x_0 pontban jellemzi a függvényt (vizsgálva x_0 egy kicsi környezetét, ahol értelmezve van f), akkor ezt a tulajdonságot **vizsgálhatjuk** egy teljes zárt, nyílt, félig zárt vagy nem korlátos **intervallumon is**. Például:

Az f függvény folytonos $(a, b) \subset D_f$ -en, ha bármely $x_0 \in (a, b)$ belső intervallumpontban folytonos.

Az f függvény folytonos $[a, b] \subset D_f$ -en, ha bármely $x_0 \in (a, b)$ belső intervallumpontban folytonos ÉS " a "-ban jobbról, " b "-ben balról folytonos.

Az f függvény folytonos $[a, \infty) \subset D_f$ -en, ha bármely $x_0 \in (a, \infty)$ intervallumpontban folytonos ÉS " a "-ban jobbról folytonos.

Stb.

Hasonlóan a deriválhatóság fogalmát is kiterjeszthetjük intervallumokra.

Megjegyzés: A deriválhatóságból következik a folytonosság, ezért az "erősebb" fogalom. Ha feltesszük, hogy f egy pontban folytonos is és deriválható is, akkor elég kikötnünk, hogy az adott pontban deriválható.

L'Hospital-szabály

Bernoulli–L'Hospital-szabály a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték kiszámítására.

Tétel: Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az x_0 egy nyílt környezetében (esetleg x_0 -ban nem). Ebben a környezetben $g'(x) \neq 0$ ha $x \neq x_0$, továbbá

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Ekkor ha létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és "A"-val egyenlő.

Megjegyzés 1.: Az "A" valós szám vagy $\pm\infty$ is lehet.

Megjegyzés 2.: Az x_0 -ban jobb vagy bal oldali határértéket is számolhatunk így.

L'Hospital-szabály

Bizonyítás: A Cauchy-tételt felhasználva f diffható $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq D_f$ és $(x_0, x_0 + \delta) \subseteq D_f$ nyílt intervallumokon.

Legyen $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (azaz $x < x_0$). Abban az esetben, ha x_0 -ban f vagy g nem folytonosak, értelmezzük a függvényeket úgy, hogy

$$f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{és} \quad g(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Ekkor már f és g folytonosak x_0 -ban is, tehát $[x, x_0]$ -on is.

Mivel f folytonos $[x, x_0]$ zárt intervallumon és diffható (x, x_0) , ezért létezik $\xi \in (x, x_0)$, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{f(x_0)=0 \\ \text{és} \\ g(x_0)=0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \underset{\substack{= \\ \text{akkor} \\ \xi \rightarrow x_0}}{=} \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ha $x > x_0$ hasonlóan.

Példa

Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ határérték?

Ekkor

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{és} \quad g(x) = x,$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

A deriváltak

$$f'(x) = e^x \quad \text{és} \quad g'(x) = 1.$$

$$\text{Így } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{Ezért } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Megjegyzés

Csak akkor működik a szabály, ha a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik.

Ha nem létezik, attól még a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ létezhet, például:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sin x, & g(x) &= x, \\ f'(x) &= 1 + \cos x, & g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \cos x$, ami nem létezik.

De $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1$.

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \dots = A$$

Példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \dots = A$$

Példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - x - 1 = e^0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x - x - 1 & g(x) = x^2 \\ f'(x) = e^x - 1 & g'(x) = 2x \\ f''(x) = e^x & g''(x) = 2 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Példák

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

Példák

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Példák

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Példák

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0,$$

tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

Más kritikus esetek, ahol a L'Hospital-szabály alkalmazható

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani. Például:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = "0 \cdot \infty" = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Például

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-2x} = "\infty \cdot 0" = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0.$$

Vagy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln(x) = "0 \cdot -\infty" &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0. \end{aligned}$$

Más kritikus esetek, ahol a L'Hospital-szabály alkalmazható

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani. Például két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \text{"}\infty - \infty\text{"} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - f(x)}{f(x)g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \ln x}{x \ln x} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + x \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

A tört deriválása és a L'Hospital-szabály két különböző dolog!

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem szabad összekeverni!